

姓名：肖嘉华

省份：贵州

国籍：中国

指导老师：何应虎

吴波

研究题目：扑克牌飞行动力学行为研究

The Flight Dynamics of a Spinstabilized Poker Card

2020 S.-T. Yau High School Science Award

摘要

将一扑克牌旋转抛出，可以让其稳定飞行较远距离。从物理角度分析，这是由于扑克牌的旋转产生了垂直于表面的角动量，而作用与压力中心的空气动力提供了绕质心的力矩，从而产生了类似于陀螺仪的进动现象，保证了飞行过程的稳定。

本文对扑克牌飞行过程进行了理论研究、数值仿真和实验研究。自制了扔牌装置，探究了影响扑克牌飞行轨迹的参数，包括初速度、初转速、攻角、初入射角度等变量。建立了扑克牌飞行理论模型，研究了扑克牌的运动轨迹与发射初速度、初转速和攻角的关系。发现发射初速度影响飞行过程中产生的升力，攻角大小主要影响飞行阻力并造成不稳定气流的产生，转速大小主要影响飞行稳定性，同时影响扑克牌在水平面上飞行的回旋半径。采用 ANSYS 软件对标准扑克牌模型进行仿真，得到升力系数和阻力系数随速度和攻角变化的关系，升力系数与攻角近似成线性关系，阻力与攻角近似为二次函数关系。其中给出了当攻角 $\alpha = 3^\circ$ 时，不同初速度下，仿真得到升力系数值和阻力系数值。结合理论模型和仿真结果，用离散建模的方法，分析预测扑克牌在竖直面上的飞行运动轨迹和水平面上的回旋半径。采用 tracker 软件分析绘制了实验中扑克牌水平与竖直方向速度分量随时间变化图以及它的飞行轨迹，并与预测结果符合较好，检验了理论模型的可靠性。

关键词：扑克牌；飞行动力学；动态稳定状态；回旋现象；陀螺仪效应

2020 S.-T. Yau High School Science Award

1. 课题介绍

无论是在日常生活中还是影视剧里，都出现过扔飞牌的有趣现象。一张扑克牌，在高速旋转的情况下抛出，扑克牌能够稳定飞行较远的距离，而在无旋转抛出的情况下却很难保持稳定飞行，以及飞行距离大大缩短。我对此物理现象产生浓厚兴趣，于是进行了相关理论和实验研究，尝试探索扑克牌稳定飞行的原理和飞行轨迹的特点。

2. 现象分析

2.1 实验主要装置介绍

为减少用手扔扑克牌所带来的不可控变量以及实验中产生误差，首先设计并制作一台扔扑克的机械仿生手臂装置——ThrowArm，其结构如图 1 和图 2 所示。此装置由两部分组成——转动部分和基座（见图 2）。其中转动部分上半部为机械甩臂，下半部分为转盘。转盘通过绳子以及滑轮连接着重物。释放重物，联动装置会带动机械甩臂转动。当转盘撞击阻隔装置时（木块），转盘瞬间停止转动，而机械甩臂凭借强大惯性继续运动，最终将飞牌甩出。

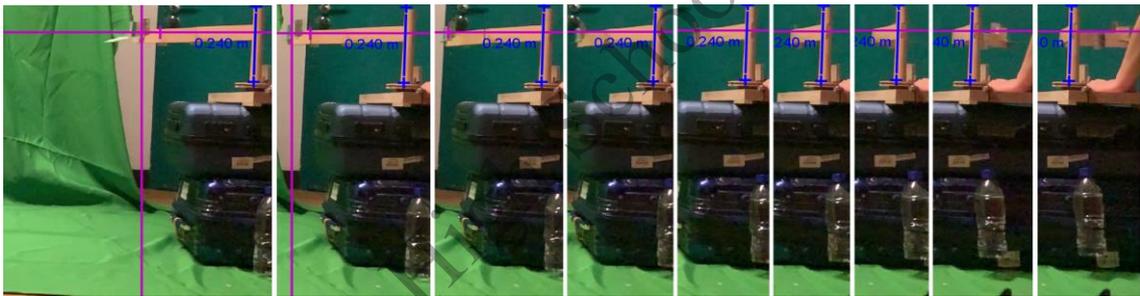


图 1 实验装置使用示意图

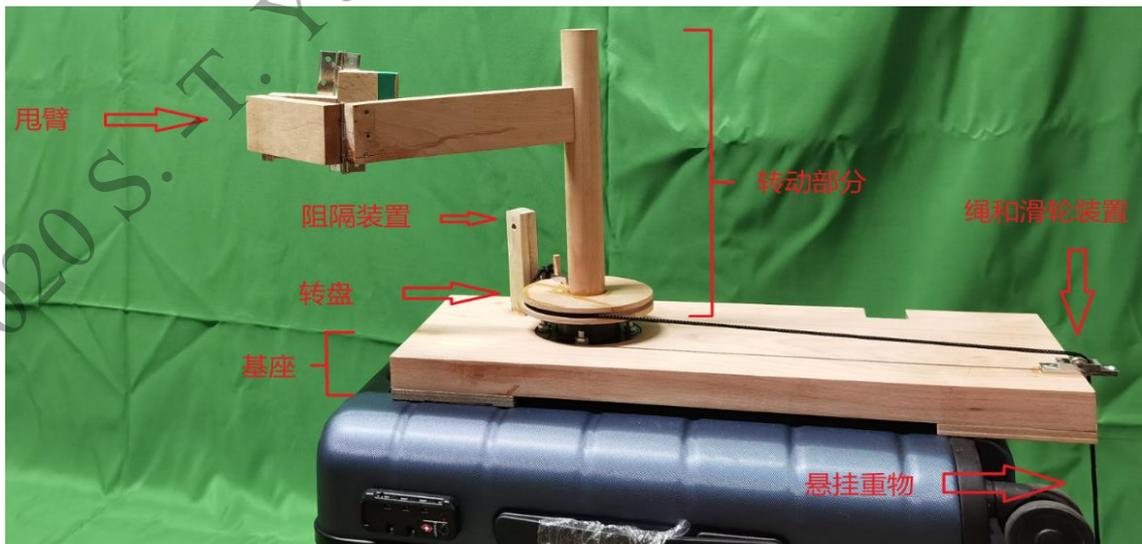


图 2 实验装置示意图

2.2 变量控制

此装置主要用于控制两个主要变量——飞牌初速度和飞牌的转速。

2.2.1 飞牌初速度的控制

飞牌初速度可以由改变悬挂重物质量来控制。通过改变重物质量来改变拉动圆盘力矩的大小，从而控制甩臂甩动的角加速度，最终改变扔出飞牌的初速度。

2.2.2 飞牌转速的控制

飞牌的转速可以通过改变甩臂夹牌点的位置来控制。视加速的甩臂为静止的参考系，在纸牌扔出去的那一刻。扑克牌质心的位置会受到一个向前的非惯性力。此时飞牌以夹牌点为转轴，质心处的非惯性力产生一个转动的力矩（图 3）。从而使得扑克牌以一定转速扔出去。当改变夹牌点的位置，即改变了转动力矩的大小，最终改变了飞牌的转速。



图 3 扑克牌以夹牌点为转轴，质心处非惯性力产生的力矩示意图

2.3 可靠性验证

通过对装置的调节完善，使得在误差范围内，在初始条件（包括悬挂重物的质量，夹牌点的位置等）一样的前提下，通过多组扔牌实验，得到扑克牌飞行轨迹及落点位置基本一致（如图 4 所示，6 次实验落点均在半径 20cm 的区域内），从而检验了本套扔牌装置对扔牌初始变量控制的可靠性。同时表明本装置对落点的控制误差约为 20cm（扑克牌飞行距离为 10 米左右）。

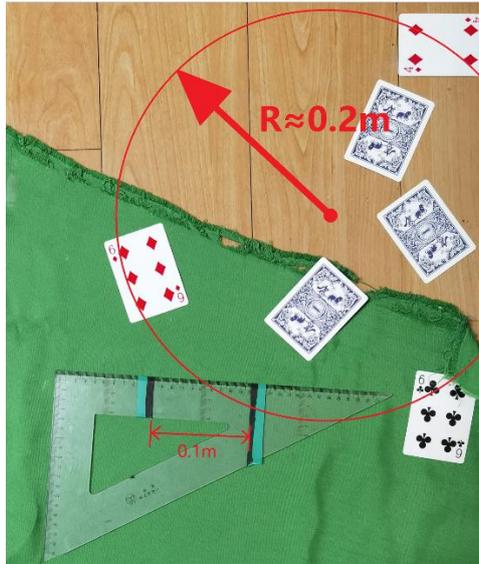


图 4 相同初始条件下扑克牌落地点位置比对

2.4 现象分析

通过大量实验以及对照实验，发现一个典型的扑克飞行轨迹具有以下特征：

(1) 由于升力的作用，扑克牌会保持平稳飞行一段距离，此时升力(F_L)约等于重力。之后呈现抛体运动的特征，此时升力(F_L)远远小于重力(图 5)。

(2) 飞行过程中，扑克牌会沿着飞行方向为轴会产生新的转动现象，记此转动的角速率为 ω_p (图 6)。

(3) 飞行轨迹如同回旋镖一样，以一定半径产生回旋的现象(图 7)。

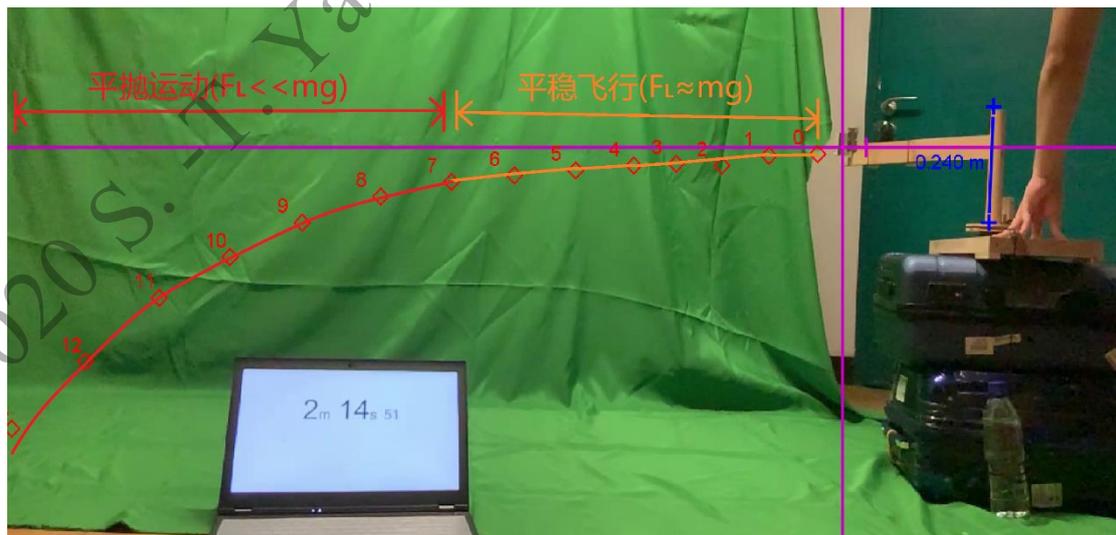


图 5 扑克牌竖直方向上飞行轨迹特征

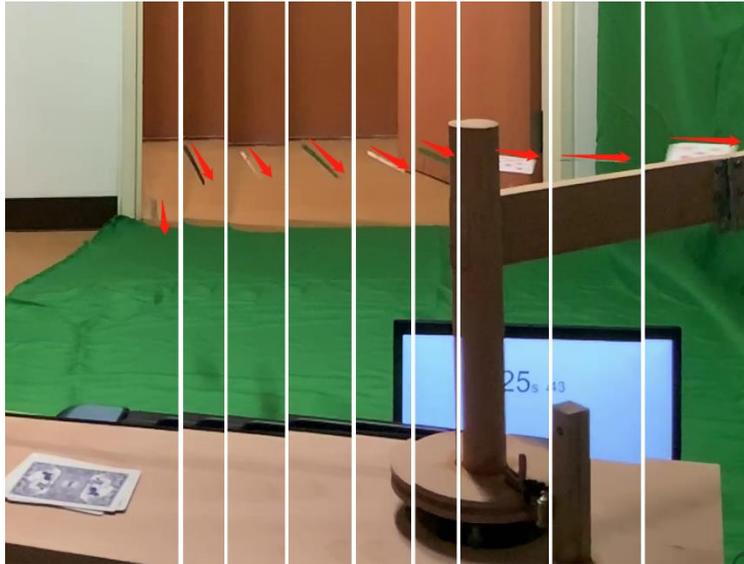


图 6 扑克牌飞行过程中沿其运动方向轴产生旋转

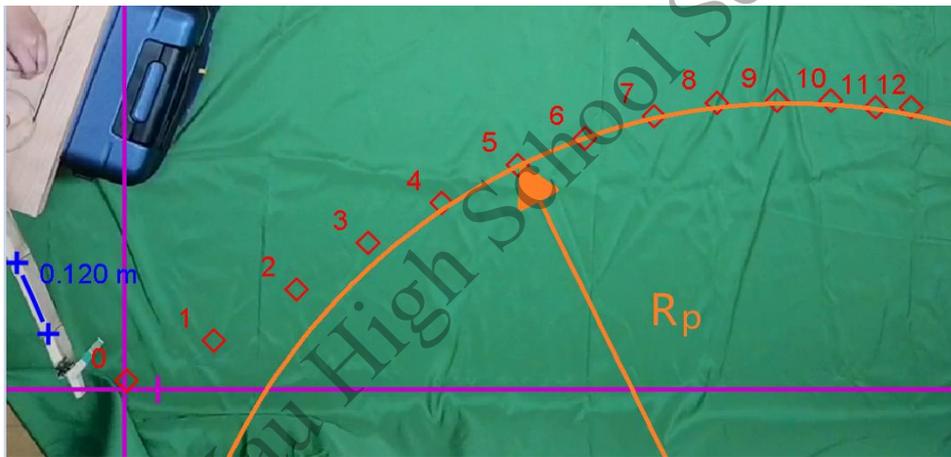


图 7 水平面上扑克牌飞行轨迹的回旋现象

本论文将就以上三种现象进行研究，定量分析以及定性解释。

注：对于 2.4 (1) 的定性解释位于总结部分 6.2 (3)。

3. 理论模型

3.0 前提假设

- (1) 将扑克牌考虑成理想刚体；
- (2) 由于扑克牌表面十分光滑，摩擦较小，因此扑克牌的转速在飞行过程中保持不变；
- (3) 标准扑克牌尺寸为 $57*88$ mm，厚度为 0.278 mm，质量为 1.6 g，四角有 3.5 mm 倒角。同时环境的空气密度为 $1.23\text{kg}/\text{m}^3$ 。

3.1 欧拉角(Euler Angles)

首先以飞行的扑克牌为参考系，风迎面而来，风速等于扑克牌的飞行速度。以迎风反向为 x_1 轴的正方向，依次建立 y_1 和 z_1 ，记作大地坐标系 $(xyz)_1$ 。再通过如下变换，得到刚体运动坐标系 $(xyz)_2$ （图 8）。

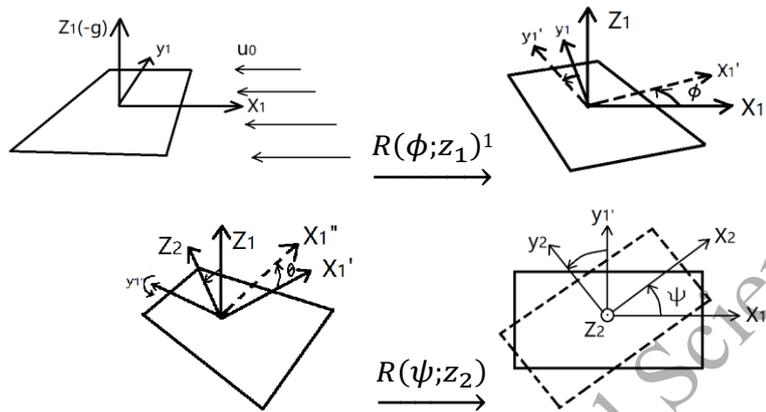


图 8 大地坐标系 $(xyz)_1$ 到刚体运动坐标系的转换 $(xyz)_2$

其中扑克牌上扬的角度 θ ，即 $x_2 - y_2$ 平面与运动方向的夹角，定义为攻角，记作 α 。同时扑克牌自转的角速度即为其沿 z_2 轴旋转的速度，记作 ψ 。

在三维坐标系中，从大地坐标系到刚体运动坐标系的转换可以用矩阵[2]变换来表示

$$\mathbf{T}^{12} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

举例

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}^{12} \cdot \mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}^{21} \cdot \mathbf{X}_2 = [\mathbf{T}^{12}]^T \cdot \mathbf{X}_2$$

其中

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

¹ 沿 z_1 轴转动刚体 ϕ rad

值得注意的是, 由于合外力以及扑克牌会沿着飞行方向轴转动 (现象 2.4.2), 使得扑克牌运动方向不会始终平行与水平方向, 从而大地坐标系 $(xyz)_1$ 也会不断变化。因此我引入大地静止坐标系, 即使得该系 x_0 始终保持与水平方向平行, 并且不随刚体运动改变而改变。从 $(xyz)_1$ 到 $(xyz)_0$ 的主要变换如图 9 和图 10 所示。

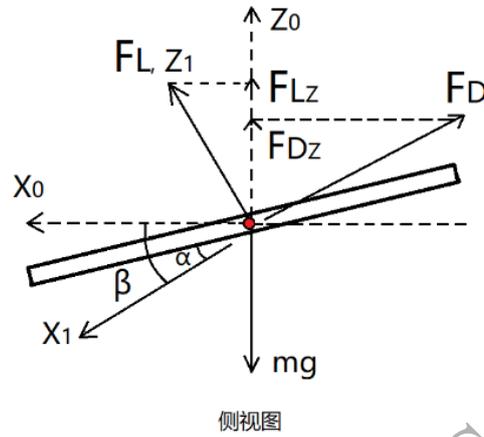


图 9 扑克牌运动过程中速度方向改变, 与水平面的夹角为 β

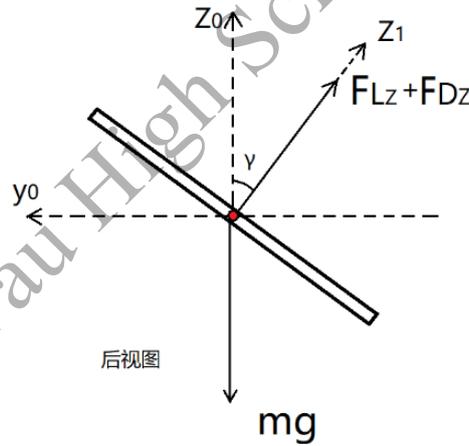


图 10 扑克牌飞行过程中沿运动方向轴旋转, 与竖直面间形成的夹角为 γ

因此, 可以通过将 $(xyz)_1$ 上的力的矢量分解到 $(xyz)_0$, 可以得到

$$\mathbf{F}_{(xyz)_0} = \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \sin \beta - F_D \cos \beta \\ -F_L \cos \beta \sin \gamma - F_D \sin \beta \sin \gamma \\ F_L \cos \beta \cos \gamma + F_D \sin \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1)$$

而 γ 角和 β 角由以下决定

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} \quad (2)$$

$$\gamma = \omega_p t \quad (3)$$

其中 ω_p 表示飞牌沿运动方向轴旋转的角速率， β_0 表示初发射角度。

3.2 叶素理论(Blade Elementary Theory)

为了解释和分析 2.4.3 现象分析中关于扑克牌飞行中形成 R_p 回旋半径的现象，在此运用叶素理论对其升力及升力产生的力矩进行分析。

3.2.1 升力推导

首先定性分析产生回旋现象的原因。由于在飞行过程中扑克牌自身会有旋转，这导致当气体流过飞牌表面时，气体相对于扑克牌表面的相对速度会根据位置的不同而不同。由于升力与相对速度的平方成正比。在飞牌其中一侧，当空气流速顺着刚体旋转方向时，相对速度较低，产生升力较小。而另一侧则产生升力较大。因此飞牌两侧不对等的升力产生一个力矩（图 11）。同时由于飞牌自身也在旋转，产生一个垂直表面向上且作用与质心的角动量。就如同陀螺仪效应(gyroscope effect)一样，不对等的升力所产生的力矩导致角动量方向持续改变，从而产生一个进动(cession)，而进动半径我将用理论模型推导出来。

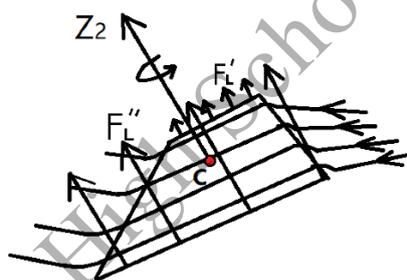


图 11 旋转的扑克牌两侧产生不对等的升力示意图

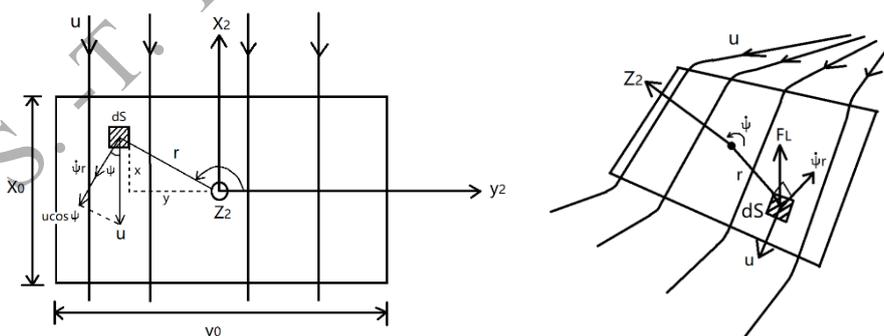


图 12 表面微元的相对速度及受力示意图

对其中某个面积为 ds 的微元量进行定量分析。已知扑克牌旋转速度为 $\dot{\psi}$ ，那么此微元面积相对于流动空气的相对速度记作 w （图 12）

$$w = u \cos \psi + \dot{\psi} r \quad (\text{只考虑大小}) \quad (4)$$

所以此微元所受升力可表示为

$$dF_L = \frac{C_L}{2} \rho w^2 ds \quad (5)$$

其中 C_L : 升力系数; ρ : 空气密度。升力系数是由实验数据或计算机流体仿真模拟(CFD)得到。根据 Hummel (2003)^[1]的研究结果表明, 升力系数与飞行刚体自身的攻角(α)存在线性关系

$$C_L = C_{L_0} + \alpha C_{L_\alpha} \quad (6)$$

其中, C_{L_0} 为 $\alpha=0$ 时的升力系数, C_{L_α} 表示 $C_L-\alpha$ 函数图像的斜率。由此可见, 当 $\alpha=0$ 的时候, 速度场与压强场分布都相对均匀对称。随着攻角(α)不断增大, 空气气流在扑克牌上下尖端处开始分离。

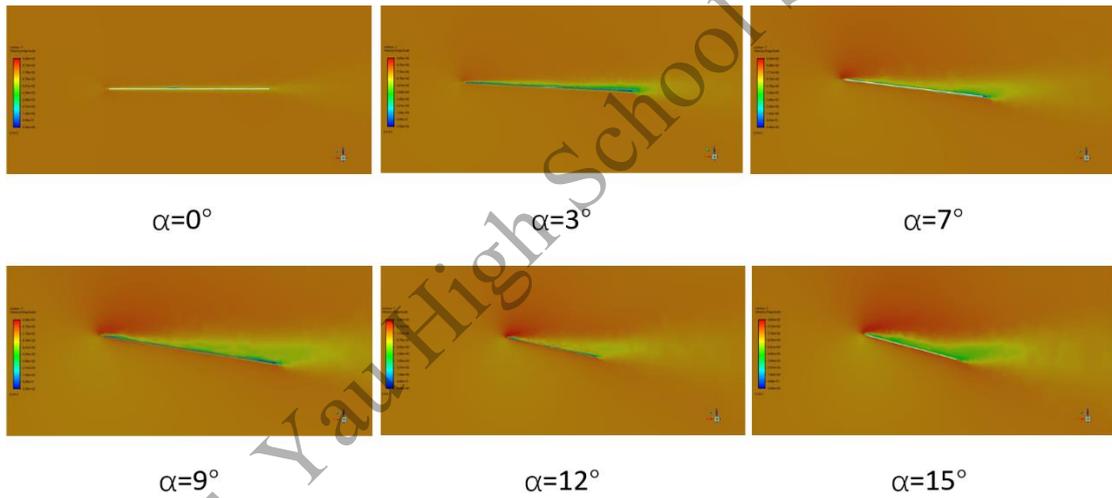


图 13 飞行的扑克牌周围速度场的分布情况

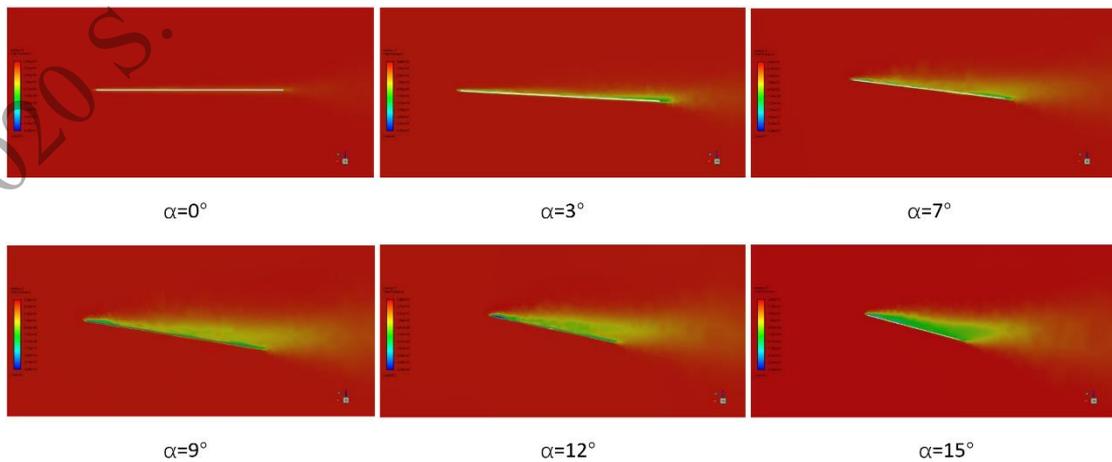


图 14 飞行的扑克牌周围压强场的分布情况

图 13 和图 14 是通过 Ansys Fluent 软件进行 CFD 仿真模拟得到的飞行的扑克牌周围速度场的分布和压力分布。从图中不难看出，虽然这种分离使得扑克牌上下压强差增大，从而让产生的升力增加，但随之也增加了不稳定气流，极大增加了飞行过程中的不稳定性。根据仿真模拟结果，得到了不同风速度下 C_L 关于 α 的函数图线（图 15）， C_L 与 α 之间依旧保持一次线性关系。同时不难发现随着风速的增加，升力系数 C_L 也随之增加。

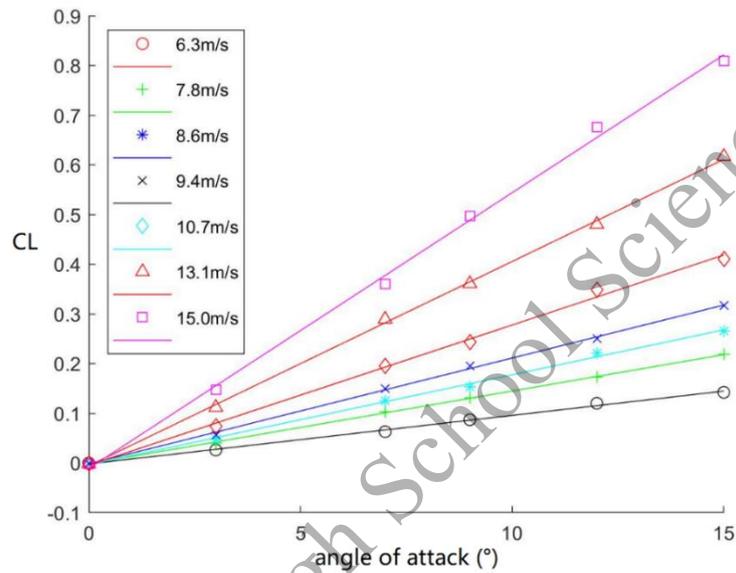


图 15 不同风速下 C_L 关于 α 的函数图像

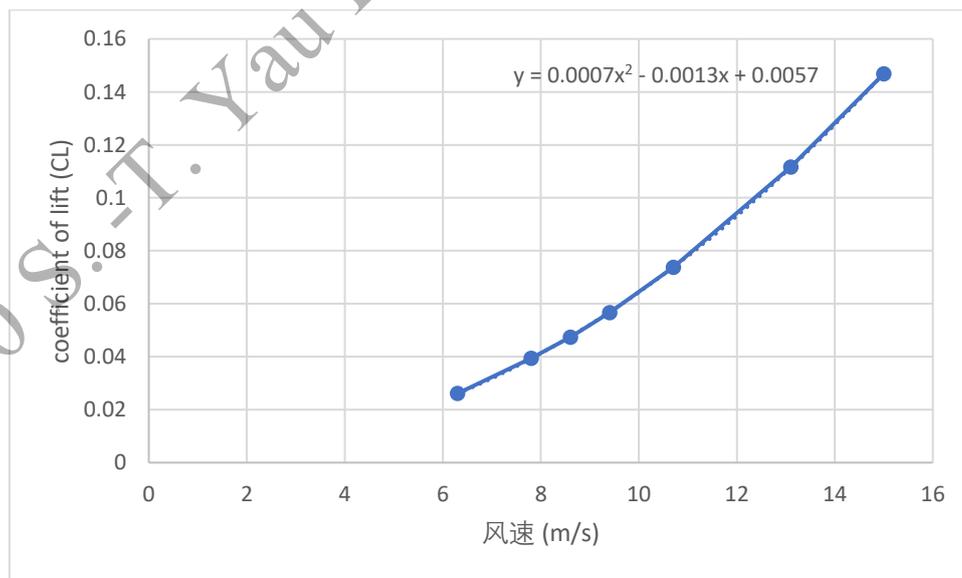


图 16 升力系数随风速变化图

在式(6)中, 当 $\alpha = 3^\circ$ 时, C_{L_0} 与 C_{L_α} 的仿真模拟结果如表1所示, 升力系数随风速变化关系如图16所示。

表1 当 $\alpha = 3^\circ$ 时, C_{L_0} 与 C_{L_α} 的仿真模拟结果

风速 (m/s)	C_{L_α}	C_{L_0}
6.3	0.0097625	-0.0018269
7.8	0.01465009	-0.0017285
8.6	0.0180859	-0.0033514
9.4	0.02132141	-0.0020284
10.7	0.02820563	-0.0045101
13.1	0.04112179	-0.0057227
15	0.05550596	-0.011134

为了方便后面的计算。将 C_L 关于 α 函数转换为 C_L 关于 α_n 函数, 其中定义

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{v_z}{|w|}\right) \approx \frac{v_z}{|w|} \quad \text{when } |v_z| \ll |w| \quad (7)$$

v_z 为风速的一个分量: $v_z = u \sin \alpha \approx u\alpha$, $|\alpha| \ll 1$

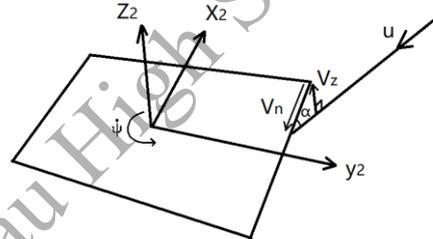


图17 v_z 分解示意图

值得注意的是, 因为 w 和 v_z 都有可能为正值或负值, 在 w 前加上绝对值符号是因为需要将 α_n 的正负性仅有 v_z 来决定。

因此

$$\begin{aligned} dF_L &= \frac{c_L}{2} \rho w^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \rho w^2 [C_{L_0} + \alpha_n C_{L_{\alpha n}}] ds \\ &= \frac{1}{2} \rho w^2 \left[C_{L_0} + \frac{v_z}{|w|} C_{L_{\alpha n}} \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \rho [w^2 C_{L_0} + v_z |w| C_{L_{\alpha n}}] ds \end{aligned}$$

因此，总的升力为

$$F_L = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{1}{2}y_0}^{\frac{1}{2}y_0} \int_{-\frac{1}{2}x_0}^{\frac{1}{2}x_0} [w^2 C_{L_0} + v_z |w| C_{L_{an}}] dx dy \quad (8)$$

此时 (8) 中的 F_L 表示瞬时升力的大小。

由于飞牌自身在不停旋转，所以根据扑克牌的几何对称性，飞牌旋转一周所产生升力的平均值等效于其旋转半周所产生的平均值。因此，每一刻的平均升力 (\bar{F}_L) 可由瞬时升力公式 (8) 在 0 到 π 的区间上关于 ψ 进行积分，得到的值再除以 π 。

$$\begin{aligned} \bar{F}_L &= \frac{1}{2\pi} \rho \int_0^\pi \int_{-\frac{1}{2}y_0}^{\frac{1}{2}y_0} \int_{-\frac{1}{2}x_0}^{\frac{1}{2}x_0} [w^2 C_{L_0} + v_z |w| C_{L_{an}}] dx dy d\psi \\ \bar{F}_L &= \frac{C_{L_0}}{2\pi} \rho \int_0^\pi \int_{-\frac{1}{2}y_0}^{\frac{1}{2}y_0} \int_{-\frac{1}{2}x_0}^{\frac{1}{2}x_0} (u \cos \psi + \dot{\psi} \sqrt{x^2 + y^2})^2 dx dy d\psi + \frac{C_{L_{an}}}{2\pi} \rho \int_0^\pi \int_{-\frac{1}{2}y_0}^{\frac{1}{2}y_0} \int_{-\frac{1}{2}x_0}^{\frac{1}{2}x_0} u \alpha |u \cos \psi + \dot{\psi} \sqrt{x^2 + y^2}| dx dy d\psi \end{aligned} \quad (9)$$

3.2.2 升力力矩推导

值得注意的是，3.2.1 中推导出来的升力是平行于 z_1 轴的（即位于 $(xyz)_1$ 坐标系中）（图 18），要将此升力变换到 $(xyz)_2$ 坐标系中。

$$\begin{aligned} \bar{F}_{L(xyz)_2} &= \mathbf{T}^{12} \cdot \bar{F}_{L(xyz)_1} \\ \bar{F}_{L(xyz)_2} &= \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi \bar{F}_L \\ \sin \theta \cos \psi \bar{F}_L \\ \cos \theta \bar{F}_L \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

因此，对某一微元量，不对等升力产生的力矩等于 $d\bar{F}_{L(xyz)_2}$ 的 z 轴上的分量（即垂直与扑克牌表面的量）乘以此微元量到质心的距离 (r)。

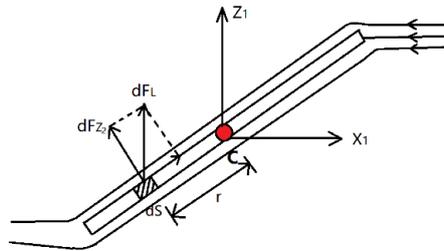


图 18 扑克牌表面微元量受力示意图

$$\begin{aligned}
 d\vec{\tau} &= d\vec{F}_{z_2} \times \vec{r} \\
 d\tau &= \cos \theta dF_L \cdot r \\
 &= \frac{1}{2} \rho [w^2 C_{L_0} + v_z |w| C_{L_{\alpha n}}] ds \cdot r \cos \theta \\
 &= \frac{1}{2} \rho [w^2 C_{L_0} + v_z |w| C_{L_{\alpha n}}] \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha dx dy
 \end{aligned}$$

类似于求每一刻的平均升力的思路，每一时刻总的平均力矩为：

$$\bar{\tau} = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\frac{1}{2}c_0}^{\frac{1}{2}c_0} \int_{-\frac{1}{2}c_0}^{\frac{1}{2}c_0} [(u \cos \psi + \psi \sqrt{x^2 + y^2})^2 C_{L_0} + u \alpha |u \cos \psi + \psi \sqrt{x^2 + y^2}| C_{L_{\alpha n}}] \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha dx dy d\psi \quad (11)$$

3.2.3 进动角速度($\dot{\phi}$)与回旋半径推导(R_p)

当扑克牌在高速旋转时，它的图像变得模糊，像一个圆盘。从而为了计算的方便，可以将高速旋转的扑克牌近似考虑成一个圆盘（图 19）

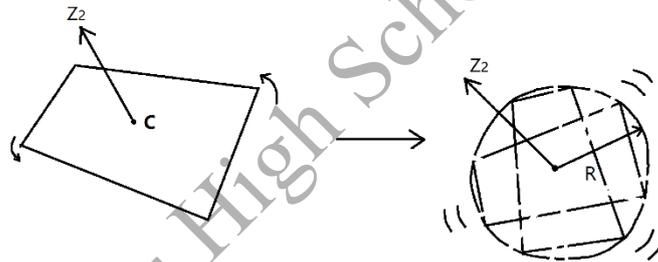


图 19 将高速旋转的扑克牌近似考虑成一个圆盘

为了决定圆盘的半径，使得以此为半径旋转的圆盘所具有的物理性质更加接近与旋转的扑克牌，同时由于在此主要考虑与转动相关物理性质，所以让这两者的角动量相等。假设他们以相同的角速率旋转，则有：

$$\frac{M}{12} (x_0^2 + y_0^2) = \frac{1}{2} MR^2$$

从而求得 R 为

$$R = \sqrt{\frac{1}{6} (x_0^2 + y_0^2)} \quad (12)$$

在欧拉角 (Eular Angle) 系统中, 对于一个类似于这种轴对称圆盘 (Axis-Symmetric Disk), 力矩, 自转速率和进动速率之间的关系式已由 “Boomerange Flight Dynamics” (John C. Vassberg)^[2] 给出

$$\bar{\tau} = \frac{1}{4} MR^2 [\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta]$$

其中： $\dot{\phi}$ 为进动角速率

$\dot{\psi}$ 自转的角速率

从而，解此关于 $\dot{\phi}$ 的二元一次方程得到：

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\cos \theta} \left[-\dot{\psi} + \sqrt{\dot{\psi}^2 + \frac{4 \cos \theta \bar{\tau}}{\sin \theta MR^2}} \right]$$

值得注意的是，因为 $\dot{\phi} \ll \dot{\psi}$ ，所以 $\dot{\phi}^2 \rightarrow 0$

所以 $\bar{\tau} = \frac{1}{4}MR^2[\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \sin \theta]$ 可化简为

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\dot{\phi} \sin \theta$$

$$\dot{\phi} = \frac{2\bar{\tau}}{MR^2\dot{\psi} \sin \theta}$$

又因为

$$\dot{\phi} = \frac{u}{R_p}$$

最终可以得到回旋半径 R_p 为：

$$\begin{aligned} \frac{u}{R_p} &= \frac{2\bar{\tau}}{MR^2\dot{\psi} \sin \theta} \\ R_p &= \frac{\frac{u}{2}M\sqrt{\frac{1}{6}(x_0^2+y_0^2)}\dot{\psi} \sin \theta}{\bar{\tau}} \end{aligned} \quad (13)$$

3.3 空气阻力推导

空气阻力的公式为：

$$F_D = \frac{C_D}{2} \rho u^2 S \quad (14)$$

其中： S 为迎风方向上的投影面积

C_D 为阻力系数（仅由 Reynolds Number (R_e) 决定）

给出

$$R_e = \frac{\rho v d}{\mu}$$

其中： d 为特征长度(characteristic length)

μ 为流体的黏度系数

由于飞牌与空气气流间成 α 的攻角（图 20），所以此时

$$S = S_0 \sin \alpha \quad (15)$$

其中 S_0 为扑克牌的表面积

$$C_D = a\alpha^2 + b\alpha + c \quad (16)$$

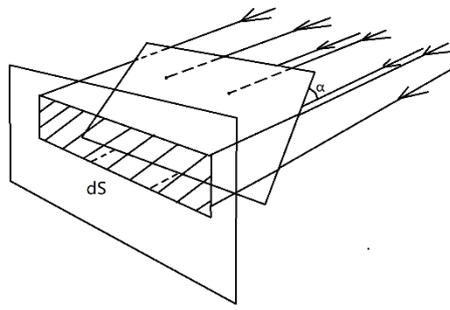


图 20 扑克牌与空气气流间成 α 的攻角

通过流体仿真模拟(CFD)得到扑克牌阻力系数 C_D 与攻角 α 之间存在二次函数关系。同时随着风速的增加,导致 Reynolds Number 增加,从而使得阻力系数(C_D)的大小也随之增加(图 21)。根据(16)式,通过仿真模拟给出当 $\alpha = 3^\circ$ 时, a, b 和 c 的数值结果如表 2 所示,阻力系数随风速变化关系如图 22 所示。

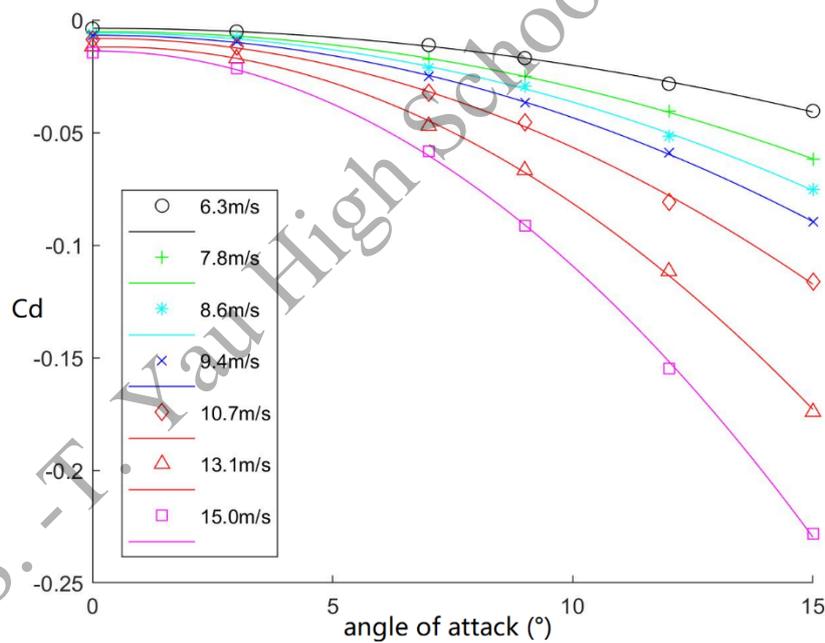


图 21 不同风速下 C_D 关于 α 的函数图像

表 2 当 $\alpha = 3^\circ$ 时, a, b 和 c 的计算机仿真模拟的数值结果

风速 (m/s)	a	b	c
6.3	-0.0001672	2.99E-05	-0.0036871
7.8	-0.0002602	0.00014216	-0.0052621
8.6	-0.000319	0.00013292	-0.0059187
9.4	-0.000371	4.75E-05	-0.0067808
10.7	-0.0004868	1.85E-05	-0.0081011

13.1	-0.0007576	0.0006397	-0.0121295
15.0	-0.0009697	0.00014738	-0.0138044

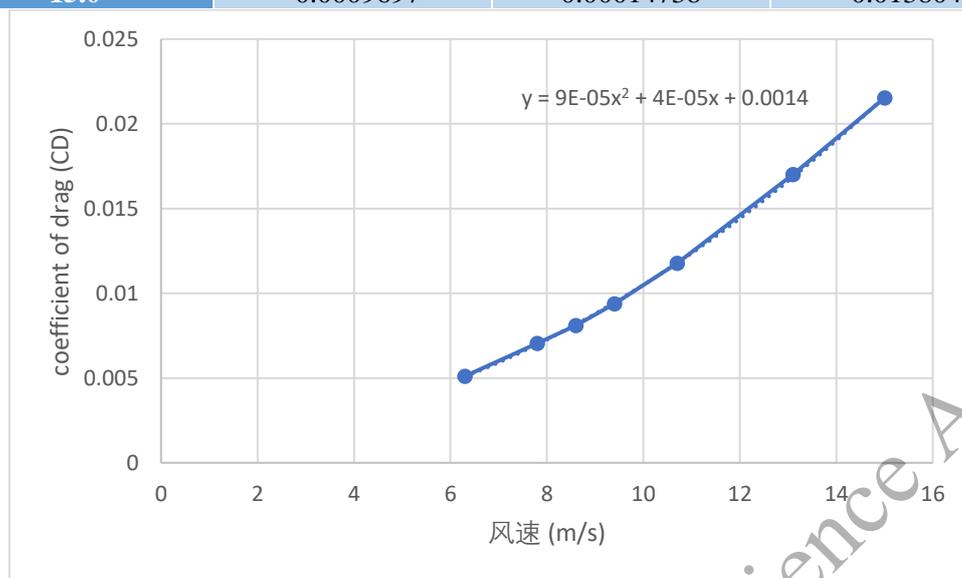


图 22 阻力系数随风速变化关系图

最终，替换所有变量，可以得到阻力的公式为

$$F_D = \frac{C_D}{2} \rho u^2 S_0 \sin \alpha \quad (17)$$

3.4 飞行中的动态稳定分析

这一部分主要解释了为什么飞行过程中，自转的扑克牌比无自转的更具有飞行稳定性。同时定性解释了 2.4.1 以及 2.4.2 中的现象，并且定量计算出飞牌沿运动方向轴翻转的角速率 (ω_p)。

首先定性地分析。纸牌飞行过程中，升力和阻力并非作用在质心（即几何中心），而是作用于压力中心 (C_p)。因此，这个偏离质心的力以质心为支点会产生一个力矩（图 23）。由于扑克牌在高速旋转，从而产生一个垂直表面向上的角动量。所以这个压力中心的力矩会持续改变角动量方向，类似于陀螺仪效应 (gyroscope effect)，最终使得扑克牌绕其运动方向轴 (x_1) 旋转（进动）（图 24）。

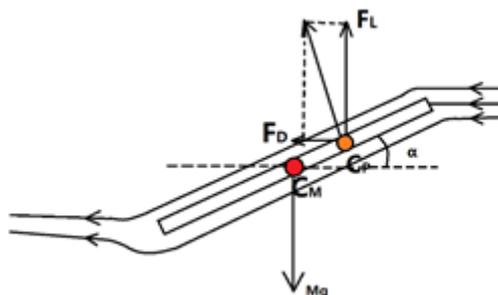


图 23 作用于压力中心的阻力和升力

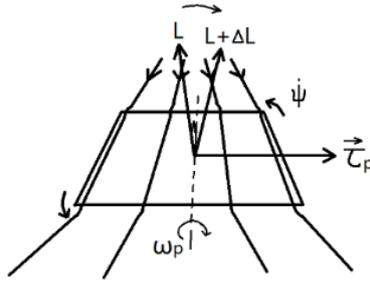


图 24 由于陀螺仪效应，扑克牌绕其运动方向轴产生一个进动

定量地分析，从而计算出此进动的角速率 (ω_p)

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= I\dot{\psi}\omega_p \\ (\bar{F}_L \cos \alpha + \bar{F}_D \sin \alpha)d &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}\omega_p \\ \Rightarrow \omega_p &= \frac{2(\bar{F}_L \cos \alpha + \bar{F}_D \sin \alpha)d}{MR^2\dot{\psi}} \\ \omega_p &= \frac{12d(\bar{F}_L \cos \alpha + \bar{F}_D \sin \alpha)}{M(x_0^2 + y_0^2)\dot{\psi}} \end{aligned} \quad (18)$$

因为如果扑克牌在飞行过程中没有旋转或者旋转角速率太小，会导致产生的角动量太小，从而压力中心产生的力矩或不稳定气流会轻易地“掀翻”扑克牌，从而破坏飞行的稳定性（图 25）。

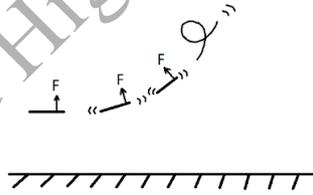


图 25 无旋转扑克牌被“掀翻”示意图

3.5 竖直平面上飞行轨迹的预测

在 (1) 式基础上，可知 $(xyz)_0$ 坐标系上扑克牌所受合外力为

$$\mathbf{F}_{(xyz)_0} = \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \sin \beta - F_D \cos \beta \\ -F_L \cos \beta \sin \gamma - F_D \sin \beta \sin \gamma \\ F_L \cos \beta \cos \gamma + F_D \sin \beta \cos \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}}$$

$$\gamma = \omega_p t$$

那么

$$\mathbf{a}_{(xyz)_0} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_L \sin \beta - F_D \cos \beta \\ -F_L \cos \beta \sin \gamma - F_D \sin \beta \sin \gamma \\ F_L \cos \beta \cos \gamma + F_D \sin \beta \cos \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (20)$$

在竖直平面，从而只考虑 x_0 轴和 z_0 轴上的分量，所以轨迹可以离散方法求得

$$u_{x_0(i+1)} = u_{x_0(i)} + a_{x_0} \Delta t \quad (21)$$

$$u_{y_0(i+1)} = u_{y_0(i)} + a_{y_0} \Delta t \quad (22)$$

$$u_{z_0(i+1)} = u_{z_0(i)} + a_{z_0} \Delta t \quad (23)$$

最终

$$x_{0(i+1)} = x_{0(i)} + u_{x_0(i)} \Delta t \quad (24)$$

$$y_{0(i+1)} = y_{0(i)} + u_{y_0(i)} \Delta t \quad (25)$$

$$z_{0(i+1)} = z_{0(i)} + u_{z_0(i)} \Delta t \quad (26)$$

其中 Δt 表示时间的步长

4. 实验方法

组装好实验设备——扔扑克牌的机械甩臂 ThrowArm。放置一把刻度尺用来矫正视频里的长度（图 26）。



图 26 机械甩臂 ThrowArm 拆解图（左），以及实验装置搭建（右）

安置好三个摄像机（240fps），分别从三个不同角度捕捉扑克牌的运动轨迹。camera 01 从俯视的角度捕捉扑克牌水平方向的运动，camera 03 从正前方捕捉扑克牌在竖直方向上的运动，camera 02 从后方捕捉飞牌绕运动方向轴的旋转状况（图 27）。

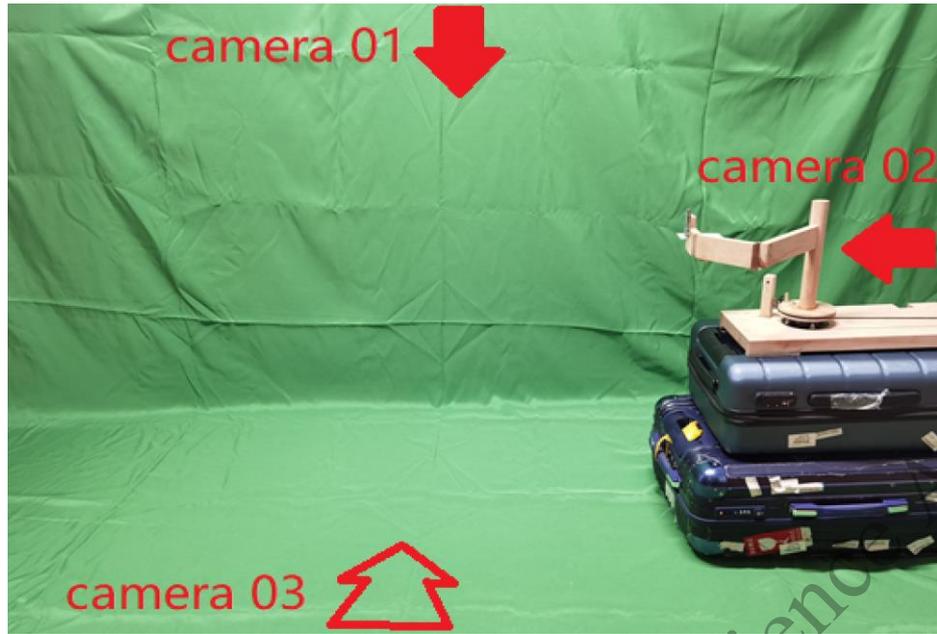


图 27 摄像机机位安装示意图

将视频上传至 tracker 软件进行分析在给定 $\Delta t (=0.033\text{s})$ 时间段内速度的变化量，从而可推出其 Δt 时间段内的竖直方向和水平方向上的加速度以及作用力的大小。之后将其与理论值进行分析比对（图 28）。

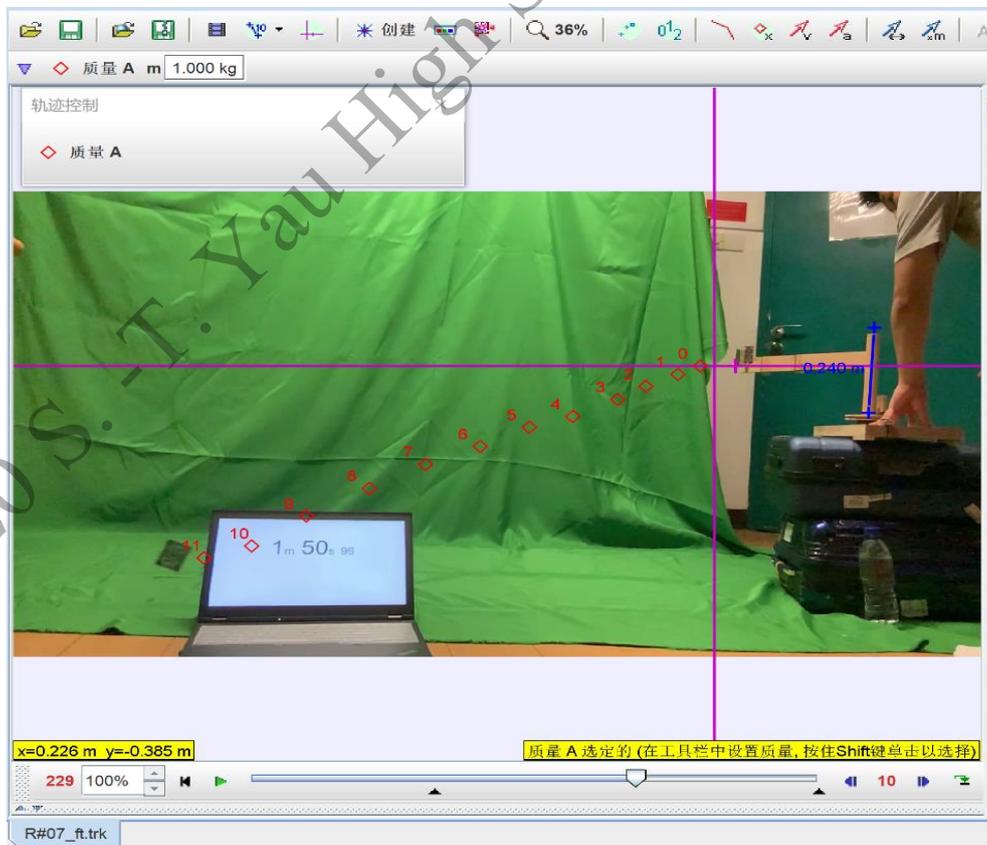


图 28 在 tracker 上对视频进行处理分析

5. 实验结果分析及结论

5.1 扑克牌绕运动方向轴旋转现象的实验结果分析

通过 (18) 式可以推导出此进动角速率(ω_p)的理论值, 我将多组数据带入 (18) 中得到的理论值再其与实际实验观察所得值进行比较, 列出下表。不难发现, 实际值与理论计算结果之间存在偏差, 平均在 19.6%左右。

表 3 进动角速率(ω_p)理论值与实际值间的比较

风速 (m/s)	自转速 率 (rad/s)	ω_p 理 论值 (rad/s)	ω_p 实 际值 (rad/s)	%误 差
2.55	35.9	1.85	2.41	23.2
2.78	32.78	2.41	3.03	20.5
3.13	37.7	2.90	4.42	34.4
3.83	44.4	3.36	3.77	10.9

5.2 水平面上回旋半径理论值与实际值的比较

实验中, 将一张质量为 1.6g 扑克牌以初速度 3.83m/s, 自转角速率 44.35rad/s, 攻角 $\alpha = 3^\circ$ 抛出。由 ANSYS 仿真模拟结果可得升力系数 $C_L = 0.01098923$, 阻力系数 $C_D = 0.002873401$, 以及 $C_{L_{an}}$ 约为 0.00458567。得到下面理论回旋半径与实际回旋半径的比较图。

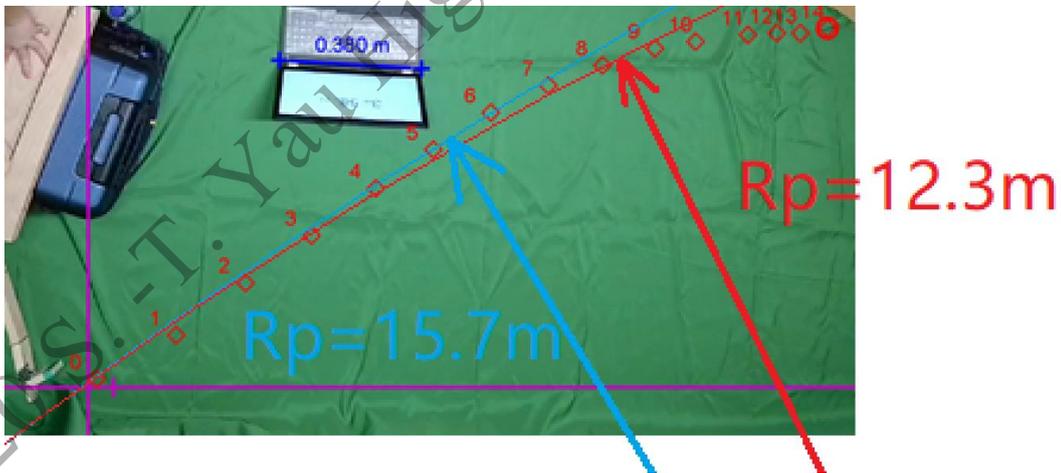


图 29 理论回旋半径与实际回旋半径的比较图

5.3 竖直平面上的理论轨迹与实际轨迹的比较

同样的初始条件, 一张质量为 1.6g 扑克牌以初速度 3.83m/s, 自转角速率 44.35rad/s, 攻角 $\alpha = 3^\circ$ 抛出。由 ANSYS 仿真模拟结果可得升力系数 $C_L = 0.01098923$, 阻力系数 $C_D = 0.002873401$, 以及 $C_{L_{an}}$ 约为 $a = 0.00458567$ 。

5.3.1 理论速度与实际速度随时间变化的比较图

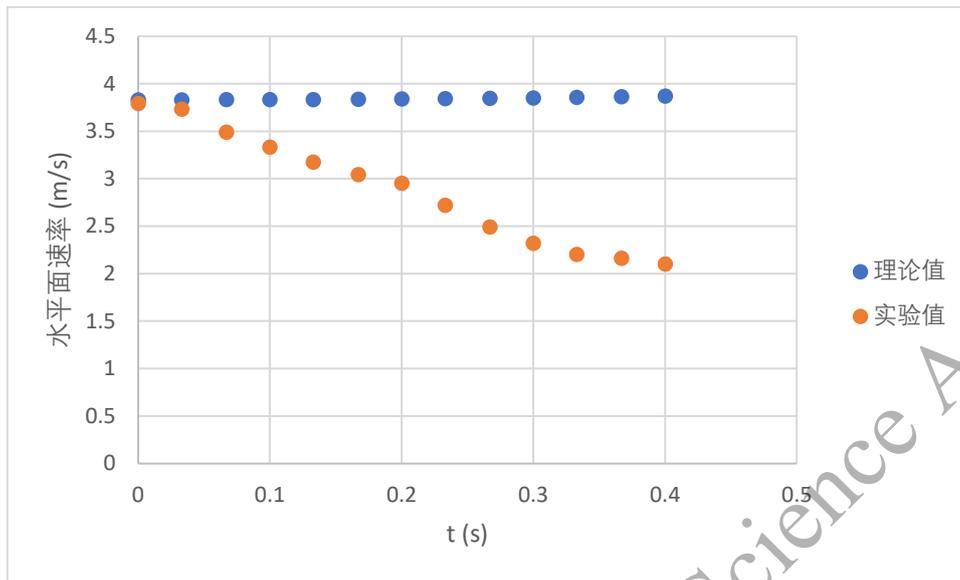


图 30 水平面上理论速度与实际速度随时间变化比较图

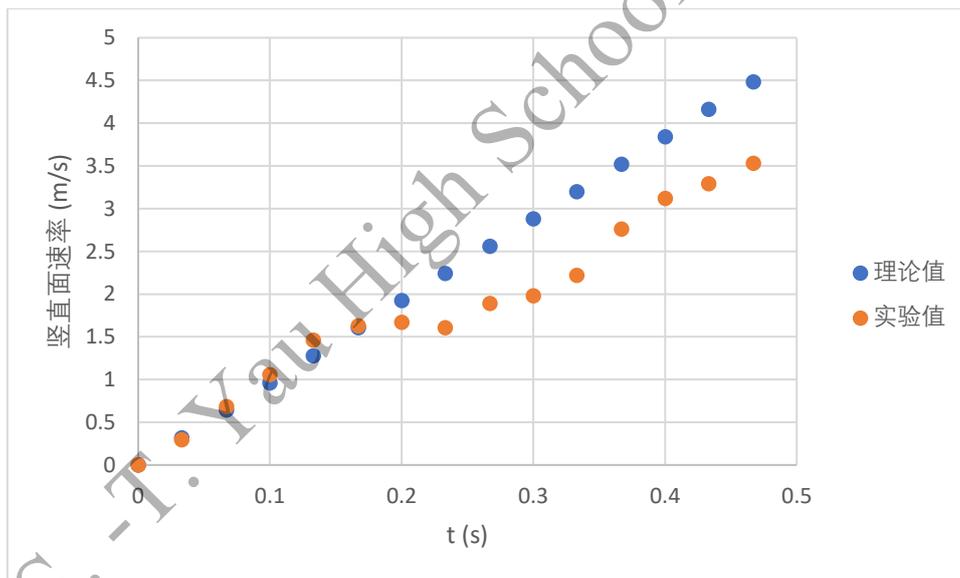


图 31 竖直面上理论速度与实际速度随时间变化比较图

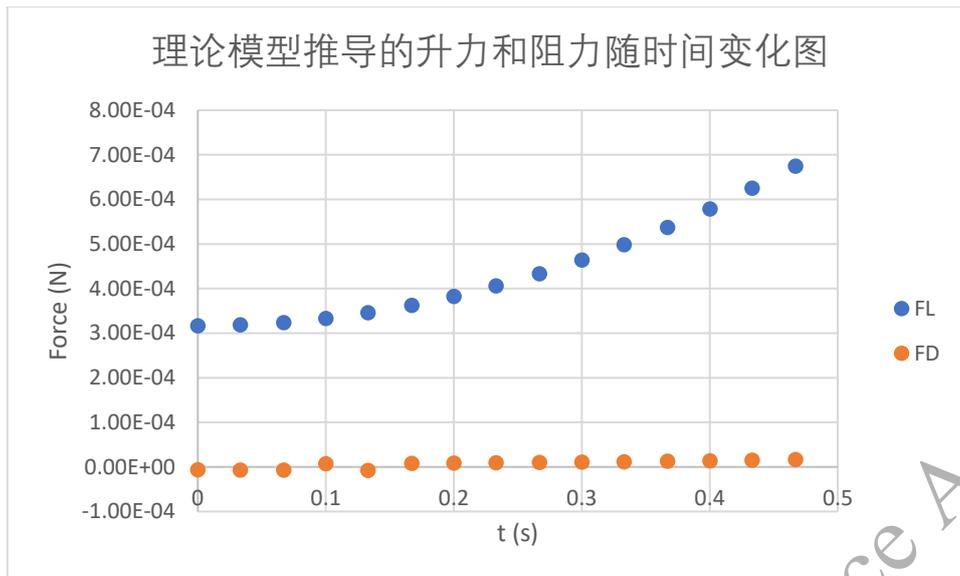


图 32 理论模型推导的升力和阻力随时间变化图

从以上两图可见，我们建立的模型理论值与实验所测得的值存在一定偏差。相比之下，水平面上的实际速度变化降低更快，而竖直面上的实际速度相较于理论值增加得略微缓慢。由于理论模型建立在理想假设下，我们仅考虑了扑克牌飞行角度以及速度的变化所引起的空气阻力和升力的变化。而在实际情况中的变化远不仅此，且更加复杂，包括不稳定气流以及扑克牌并非完全理想刚体等等，导致升力和阻力大于理论值，所以使水平面上速度降低得更快，竖直方向速度增加得更慢。

5.3.2 理论模型预测轨迹与实际轨迹比较图

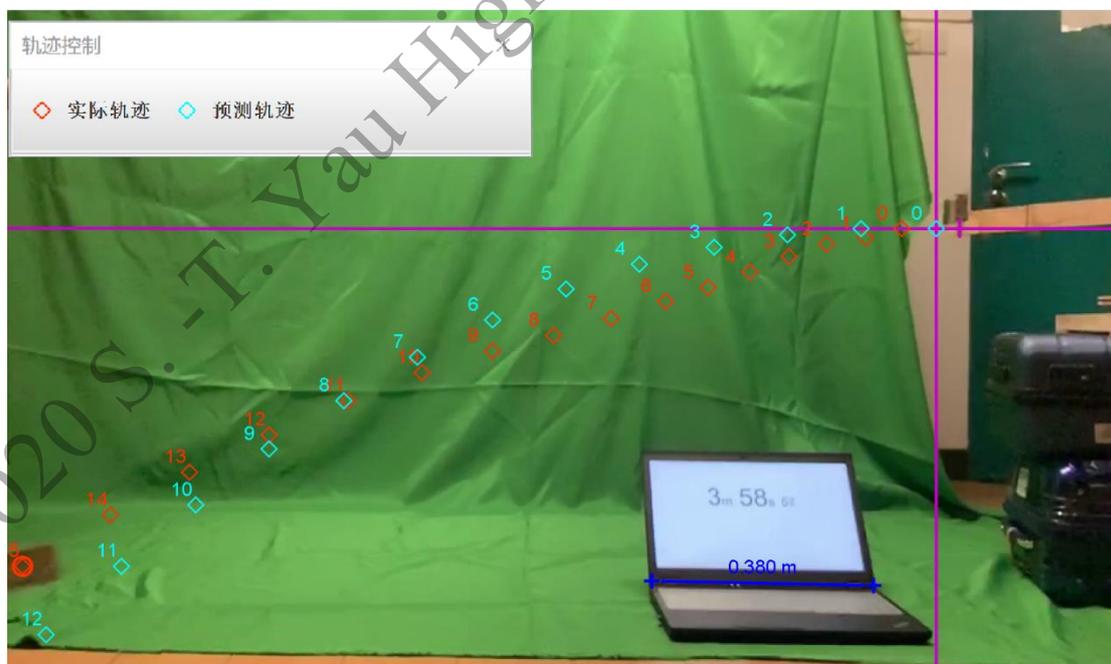


图 33 竖直面上运用理论模型预测的轨迹与实际轨迹比较图

从图中不难看出，理论轨迹与实际轨迹间相差不是特别大，尤其是在落地点的预测上相接近。但在飞行过程中的轨迹存在些偏差。由于在理论模型中我们将扑克牌看作质点，仅考虑升力，阻力，重力以及 β 和 γ 角度对垂直平面上速度的影响，而忽视了飞牌绕飞行方向轴旋转过程对垂直平面上速度的影响，因此导致了理论与实际的一些偏差。

6. 总结

6.1 本文通过观察实验现象，搭建理论模型，以及运行仿真模拟，和将基于理论模型计算值与实验结果相对比的方式，肯定了理论模型的可靠性，同时探究了影响扑克牌飞行轨迹的参数，其中包括最主要的三个初始条件：发射初速率，初转速以及攻角。

(1) 发射速率越大，使得产生的升力越大，导致扑克牌能够较稳定飞行更远距离。由仿真模拟结果可知，尤其在攻角等于 3° 时，速度为 8.6m/s 的扑克牌能产生 0.0154N 的升力，近似于 0.0157N 的重力，使其竖直方向上受力相平衡。（参考图 11 和图 12）

(2) 自转速率越大，使得回旋半径越小。理论模型给出的回旋半径公式为

$$R_p = \frac{\frac{u}{2} M \sqrt{\frac{1}{6}(x_0^2 + y_0^2)} \psi \sin \theta}{\bar{\tau}} \quad (13)$$

其中

$$\bar{\tau} = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\frac{1}{2}\alpha_0}^{\frac{1}{2}\alpha_0} \int_{-\frac{1}{2}\alpha_0}^{\frac{1}{2}\alpha_0} \left[(u \cos \psi + \psi \sqrt{x^2 + y^2})^2 C_{L_0} + u \alpha \left| u \cos \psi + \psi \sqrt{x^2 + y^2} \right| C_{L_{an}} \right] \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha \, dx \, dy \, d\psi$$

所以自转速率增大导致公式 (13) 中分母部分平均力矩的增大远快于分子部分。所以 (13) 中的回旋半径 R_p 减小。

(3) 攻角的增加会导致扑克牌迎风端边缘气流开始分离，使得乱流增加，扑克牌飞行稳定性减低（由图 13 和图 14 仿真模拟的速度场与压强场分布情况可以看出）。同时由图 15 可以看出，随着攻角的增加，升力系数也随之增加，使得扑克牌所受升力增加。

6.2 结合物理模型，定性解释了扑克牌稳定飞行，回旋轨迹，绕运动方向轴旋转的原因。

(1) 其中回旋轨迹的产生是由于扑克牌的自转，导致了牌表面各点就气流的相对流速不同，从而产生了不对等的升力。不对等的升力产生了绕质心的力矩。由于扑克牌自身也在旋转，所以具备垂直于表面的角动量。因此，产生的力矩会时刻改变角动量的方向从而导致类似于陀螺仪的进动效应。（参考图 11 和图 12）

(2) 同样地，飞行过程中绕运动方向轴旋转的原因是由于：空气动力作用在压力中心而非质心。所以也会产生一个绕质心的力矩，类似于陀螺仪的进动效应，产生一个新的绕运动方向轴的旋转。（图 24）理论模型给出此进动角速率为

$$\omega_p = \frac{12d(\bar{F}_L \cos \alpha + \bar{F}_D \sin \alpha)}{M(x_0^2 + y_0^2)\psi} \quad (18)$$

(3) 对于图 5 的定性解释。从图 5 中可以观察出一个扑克牌飞行轨迹在竖直面上的现象为：扑克牌会平稳飞行一段距离，之后转为类似于平抛运动。这是由于从图 6 中可以得知，扑克牌沿运动方向轴有旋转，当旋转角度过大时，升力在竖直方向上的分量过少，远远小于重力，因此表现平抛运动特征。

6.3 结合仿真结果和理论模型，给出就一张质量为 1.6g 扑克牌以初速度 3.83m/s，自转角速率 44.35rad/s，攻角 $\alpha=3^\circ$ 抛出的水平与垂直方向的预测轨迹以及绕运动方向轴旋转的角速率。使其与实际实验结果相比较，分析了产生这些偏差的原因(图 29 和图 32)

(1) 由于在理论模型中我们将扑克牌看作质点，仅考虑升力，阻力，重力以及 β 和 γ 角度对竖直平面上速度的影响，而忽视了飞牌绕飞行方向轴旋转过程对竖直平面上速度的影响，因此导致了理论与实际的一些偏差。

(2) 我们仅考虑了扑克牌飞行角度以及速度的变化所引起的空气阻力和升力的变化。而在实际情况中的变化远不仅如此，且更加复杂，包括不稳定气流以及扑克牌并非完全理想刚体等等，导致升力和阻力大于理论值，所以使水平面上速度降低得更快，垂直方向速度增加得更慢。

7. 创新点

(1) 用最经济的方式，自己发明并制作了扔扑克牌的机械甩臂，使得初始条件更加容易控制，减少人为手动扔牌的不可控因素。

(2) 运用矩阵变换，微元积分的方法，以及欧拉角和离散等方法，搭建理论模型，并将理论模型与实际结果相对比，从而找到理论的不足之处。

(3) 将流体仿真模拟软件，Matlab，编程和 tracker 等计算机工具来解决复杂的物理模型。

8. 改进

(1) 后期可改进扔牌装置或制作更精密的扔牌设备，以减小扔牌初始条件的控制误差；

(2) 可以采用更高清的慢镜头摄像机，以提高精度，减小实验误差。

(3) 在实际实验过程中发现，虽然扑克牌的自旋会为飞行过程带来的稳定性，自转速度的高低也决定了稳定性的高低。因此未来可以研究当自转速率低于多少边界值时，这样的动态稳定状态将不存在，并且这样的边界值与哪些因素有关。

主要参考文献

- [1] Hummel, S.A. "Frisbee Flight Simulation and Throw Biomechanics", PhD Thesis, Univ. California, Davis, USA. 2003
- [2] John C. Vassberg, "Boomerang Flight Dynamics", 30th AIAA Applied Aerodynamics Conference New Orleans, Louisiana, USA. June, 2012

其他参考文献

- [4] James Brunk, "All About Aerodynamics From A Business Card", Sept. 2015
- [5] Gabriel Barceló, "Theory of Dynamic Interactions: The Flight of the Boomerang", Advanced Dynamics S. A. Madrid, Madrid, Spain. Received 19 March 2014; revised 19 April 2014; accepted 28 April 2014
- [6] William James Crowther, Jonny Potts, "Simulation of a spinstabilised sports disc", Article in *Sports Engineering*, January, 2017
- [7] V. R. Morrison, "The Physics of Frisbees", Physics Department, Mount Allison University, Sackville, NB Canada E4L 1E6, Accepted April 6, 2005; submitted in original form March 6, 2005
- [8] Baumbach, Kathleen (2010) "The Aerodynamics of Frisbee Flight," Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two: Vol. 3; Iss. 1, Article 19.
- [9] Anthony Scodary, "The Aerodynamics and Stability of Flying Discs", Submitted as coursework for Physics 210, Stanford University, Autumn 2007
- [10] Yuji Yamakawa, Kazuki Kuno, Masatoshi Ishikawa, "Throwing and Shooting Manipulations of Playing Cards using a High-Speed Multifingered Hand and a Vision System", 2014 14th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids) November 18-20, 2014. Madrid, Spain

说明与致谢

本人在研究过程中大量参考了 Hummel、John、James Brunk、Gabriel Barceló、William James Crowther 等人的前期理论工作，特别是理论公式的推导部分因引用太多未一一列出，在此特别说明并向他们表示诚挚的感谢！