

参赛队员姓名： 雷家睿 林蕴芊

中学： 四川省成都市新都一中

省份： 四川省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 赵博涵

论文题目： 耦合“循环摆”的物理机制及其动力学研究

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：雷家睿 林蕴芊 指导老师：赵博涵

2020年 8 月 17 日

耦合“循环摆”的物理机制及其动力学研究

雷家睿 林蕴芊

四川省成都市新都一中 铭章学院

论文摘要

本文研究了一种名为“循环摆”的耦合摆系统的动力学特征，并解释了该现象的成因，为该类研究提供了一个新的思路作为参考。循环摆系统由一重一轻两个负载组成，释放后轻物会呈现出类似于螺旋线的运动轨迹，而重物会快速减速至停止。我分别对两个物体的运动进行了定量研究。本研究发现绳与杆之间的摩擦力是导致重物减速运动的原因；轻物的轨迹则需分为重物停止前、重物停止后两个阶段进行讨论，整体上为摆开线；而轻物的角速度在波动中整体呈现快速上升的趋势。本研究发现，初始质量比、摩擦系数、初始绳长、释放角度等相关参量共同影响着“循环摆”系统的运动特征，我给出了定量的函数关系加以描述，并对其进行了验证，且理论、实验、数值模拟符合较好。最后，我使用数值模拟进一步预测了摩擦系数对系统的运动特征造成的影响。

关键词：

耦合摆；循环摆；动力学研究

目录

一、引言	5
二、耦合循环摆的运动方程	6
(a) 牛顿力学方法求解	6
(1) 运动过程分析	6
(2) 特殊情况讨论	7
(b) 分析力学方法求解	7
(c) 数值模拟运动轨迹	8
三、实验结果与结果分析	9
(a) 实验装置设计	9
(b) 摩擦系数的测量	10
(c) 实验步骤	11
(d) 实验结果	11
(e) 理论验证	14
四、模拟预测	16
五、研究结论及讨论	16
六、参考文献	17
七、附录	19
(a) 理论修正：考虑“循环摆”的三维运动	19
(b) 理论的另一推导方法	20

一、 引言

本课题源于 IYPT2019（国际青年物理学家锦标赛）的第 14 题“循环摆”，研究了如下的力学现象：将一重一轻两个负载用位于水平杆上的一根绳子相连，并拉动轻负荷来吊起重负荷。释放轻负荷，它将围绕着杆扫动，形成类似于“摆开线”的轨迹线，同时使重负荷不会坠落到地面。我们注意到在该情境中，重负载和轻负载通过绳子耦合，约束了对方的运动自由度，并互为摆锤。本文的研究将在解释这一现象的物理机制的基础上，着重研究两个摆锤运动过程中的动力学规律。我们将从牛顿力学和分析力学的角度求解该耦合摆系统的运动方程，进而设计实验对理论进行检验。

本研究发现，摩擦力随绳缠绕圈数增大的 e 指数增长是导致重物快速减速至停止的原因，而同时轻物旋转半径不断减小，使其呈现出类似于摆开线的螺旋轨迹。我们将整个运动过程分为两段进行研究：重物下落时与重物停止运动时。我们在非惯性系下建立了定量的理论模型，从 θ 、 \dot{h} 两个自由度分别描述了轻、重两物体的运动。通过使用 MATLAB 绘制理论图像，并将其与相应的实验图像进行比对：理论中的轻物轨迹、 $\omega - t$ 、重物的 $v - t$ 图像等均与实验结果高度吻合，验证了理论的正确性。我们进一步使用已验证的理论预测了摩擦系数 μ 对“循环摆”现象的影响。我们还针对主要的误差来源进行了理论修正，考虑绳子在杆上的缠绕方式，将二维平面内的理论修正为三维空间里的理论模型，以提高理论的准确性。

在我们的控制变量实验中，我们还得出了一些定性的实验结论。同时，我们还发现，取决于轻重物体质量比的不同，实验中出现了“循环摆”的一些特殊

现象：多级加速、回弹、二次下落。我们定性地解释了这些特殊现象的产生条件及其相关性质。

最后，我附上了相关理论的修正以及其他推导方法，以供参考。

二、 耦合循环摆的运动方程

a. 牛顿力学方法分析

(1) 运动过程分析

如图 1 所示，在循环摆现象中，若假设小球质量为 m ，大球质量为 M ，小球侧绳与杆接触的切点到小球端的距离为 l ，与水平方向的夹角为 θ 。大球侧绳与杆接触的切点到大球端的距离为 h ，杆半径为 r ，绳原长为 l_0 。根据几何关系有：

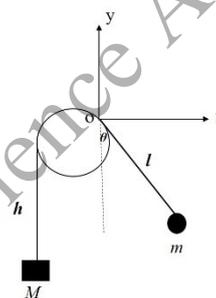


图 1 循环摆示意图

$$l = l_0 - h - r(\pi + \theta) \quad (1)$$

设大球与小球受到的绳拉力分别为 T_1 和 T_2 ， T_1 与 T_2 的关系已由 Capstan Equation 给出^[1]

$$T_1 = T_2 e^{\mu(\pi + \theta)} \quad (2)$$

释放小球后，对于大球与小球的受力及运动情况，观察现象可知，小球绕杆做摆长不断减小的运动。若在以摆与杆的切点为原点建立的坐标系为参考系中分析此问题，根据非惯性系下的牛顿第二定律有

$$M\ddot{h} = Mg - T_1 \quad (3)$$

$$ml\dot{\theta}^2 - m\ddot{l} = T_2 - mg \cos \theta + mr\ddot{\theta} \quad (4)$$

其中， \ddot{h} 为重物下落的加速度， \ddot{l} 为轻物沿绳子方向的加速度， $ml\dot{\theta}^2$ 为轻物受到的向心力。由 (2)、(3)、(4) 式可以得到：

$$\ddot{h} = g - \frac{m}{M} e^{\mu(\pi + \theta)} (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2 - r\ddot{\theta} - \ddot{l}) \quad (5)$$

由 (5) 式可以看出，右侧项 $\frac{m}{M} e^{\mu(\pi + \theta)} (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2 - r\ddot{\theta} - \ddot{l})$ 随着 θ 的增大呈指数型上升，导致重物的加速度 \ddot{h} 迅速反向并达到极大值，故大球可以迅速减速至

停止。大球停止运动后，绳与杆的摩擦力反向，阻碍重物的再一次下落，且满足关系 $Mge^{\mu(\pi+\theta)} > T_2$ 。因此在重物停止下落后，绳与杆不发生滑动。

同时利用非惯性系下的角动量定理，即：

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{L}_o + \vec{r}_c \times (-m\vec{a}_o) \quad (6)$$

式中，小球对 o 点的角动量 $\vec{J} = m(l)^2\dot{\theta}\hat{k}$ ，小球在非惯性系中关于 o 点的力矩 $\vec{L} = -mgl \sin \theta - mr\dot{\theta}^2 l \hat{k}$ 。

则应用 (5) 式可得

$$\ddot{\theta} = \frac{-g \sin \theta + r\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta}}{l} \quad (7)$$

利用 (1) 式、(7) 式将 (5) 式进一步化为

$$\dot{h} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}e^{\mu(\pi+\theta)}} \left[g - \frac{m}{M}e^{\mu(\pi+\theta)}(g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \right] \quad (8)$$

(7)、(8) 两式即为循环摆现象中大小两球的动力学方程，对其求解可得到大小两球的运动。

(2) 特殊情况讨论

我们观察到，当重物停止运动时，轻物仍然在绕杆旋转。在此运动阶段中，当大球静止时，有 $\dot{h} = 0$ 。

则此阶段中小球的运动可表示为：

$$\ddot{\theta} = \frac{-g \sin \theta + r\dot{\theta}^2}{l} \quad (9)$$

b. 分析力学求解

对于重物下落运动的阶段，绳子与杆之间的摩擦力做功，故不能使用拉格朗日方程求解此阶段的运动。而当重物停止运动时，摩擦力不再做功，满足拉格朗日方程的使用条件。

对于重物停止运动阶段轻物的运动，若采用分析力学求解，取 θ 为广义坐标，则该系统的拉格朗日函数为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mg(l \cos \theta + r \sin \theta) \quad (10)$$

对此广义坐标运用拉格朗日方程得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

其中：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 2ml\dot{\theta} + m\ddot{\theta}l^2 = -2mrl\dot{\theta}^2 + m\ddot{\theta}l^2 \quad (12) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2[2l \cdot (-r)] + mg\left(\frac{\partial t}{\partial \theta} \cos\theta - l\sin\theta + r\cos\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2[2l \cdot (-r)] + mg(-r\cos\theta - l\sin\theta + r\cos\theta) \quad (13) \\ &= -mrl\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta \end{aligned}$$

求解以上方程，可得：

$$-2mrl\dot{\theta}^2 + m\ddot{\theta}l^2 + mrl\dot{\theta}^2 + mgl\sin\theta = 0 \quad (14)$$

因此：

$$\ddot{\theta} = \frac{-g\sin\theta + r\dot{\theta}^2}{l} = \frac{-g\sin\theta + r\dot{\theta}^2}{l_0 - r\theta} \quad (15)$$

上式为重物停止运动阶段轻物运动的表达式，其结果与用经典力学方法求解所获得的结果一致。

c. 数值模拟运动轨迹

为了直观地展示通过理论分析所获得的结果，我们使用 MATLAB 绘制了以下图像，将解可视化。如下所示：

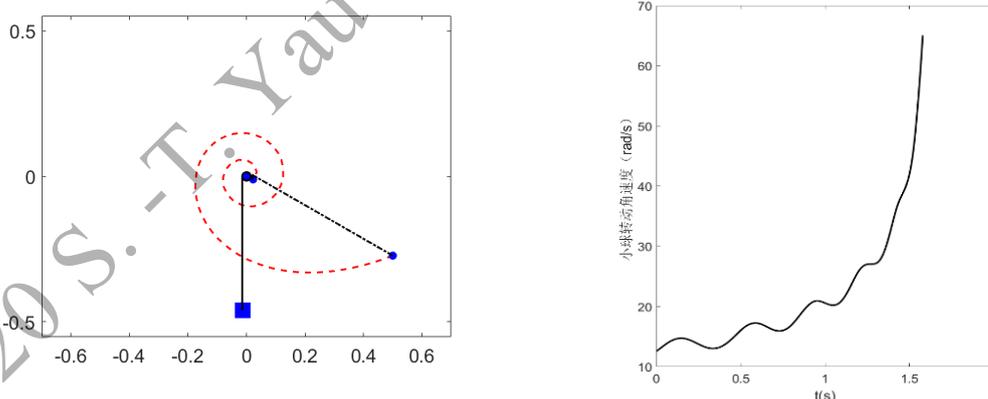


图 2 轻物运动轨迹、轻物运动加速度（理论）

上图展示了轻物的运动轨迹，轻物绕杆不断“循环”摆动，最终与杆发生接触而停止运动，而重物在竖直方向下落并最终停止。右图则展示了轻物旋转角速度随时间的变化关系，可以看出，轻物角速度总体上呈现加速的趋势，同时也存在一些明显的波动。

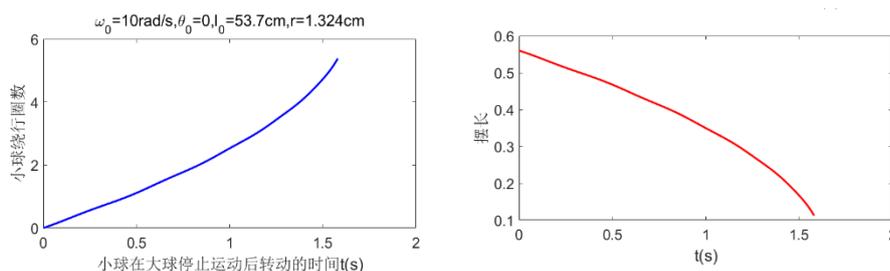


图 3 轻物旋转圈数、轻物摆长随时间的变化关系

在实验中，我们将对以上理论结果进行验证。

三、 实验设计与结果分析

a. 实验装置设计

我们设计并构造了以下装置进行实验：



图 4 实验装置、释放装置

我在两个铁架台上搭建了一根完全固定的金属水平杆，其材质均匀、无明显缺陷。然后我使用一根非弹性绳连接一重一轻两个负载（砝码）。砝码经过简单处理，使其能在我们的视频中被清晰地分辨出来，方便我们的视频处理。

我们使用摄像机从侧视方向拍摄实验视频，摄像机的帧速为 240fps。

为了轻物在不受扰动的情況下被平稳释放，我也设计了如图 4 所示的释放装置：我将绳子的一端连接在轻物上，另一端固定在一个铁架上；通过使用激光或火焰烧断这一段绳子，轻物便可以被平稳释放。相比于其他释放方式，此方法可以一定程度上减小释放时产生的误差。

b. 摩擦系数 μ 的测量

注意到理论中涉及到了绳子与杆时间的摩擦力（Capstan Equation），因此在实验中我们很有必要测量出杆与绳之间的摩擦系数，以进行实验与理论的验证。

由于杆与绳的接触面上的压力处处不同，采用普通方法（ $F = \mu N$ ）测量出的摩擦系数存在极大误差。故我们采用一下方法测量摩擦系数：

由 Capstan Equation 可以得到：

$$T_1 = T_2 e^{\mu(\pi + \theta)} \quad (16)$$

其中 T_1 、 T_2 分别为杆两侧绳中的拉力， $\mu(\pi + \theta)$ 为绳在杆上的包角，

拉力 T_2 即为砝码重力：

$$T_2 = mg \quad (17)$$

对等号两侧取对数：

$$\ln\left(\frac{T_1}{mg}\right) = \mu(\pi + \theta) \quad (18)$$

令 $\varphi = \ln\left(\frac{T_1}{mg}\right)$ ，则(18)可以化简为：

$$\varphi = \mu(\pi + \theta) \quad (19)$$

上式说明，将实验中得到的 φ 与 $(\pi + \theta)$ 线性拟合，得到的直线斜率即为绳与杆的摩擦系数。

我们将实验装置做出一下小改动：

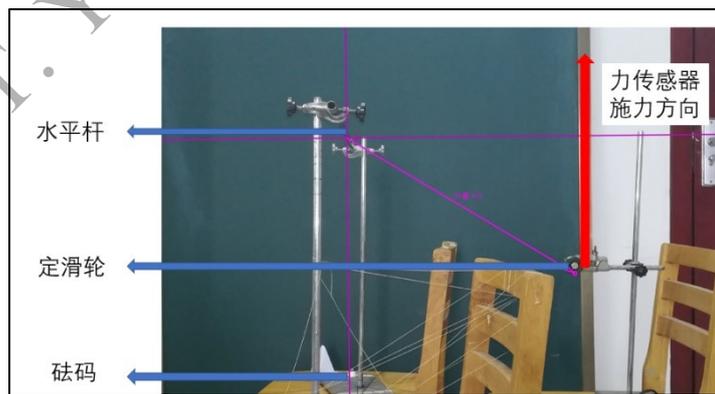


图 5 摩擦系数的测量

我们将绳子的一端连接到轻物上，绳子绕过杆和一个定滑轮，另一端连接到一个力传感器上。测量时，匀速拉动力传感器，使得砝码匀速上升，记录下力传感器的读数。通过改变定滑轮的空间位置，我们可以改变绳子与杆形成的包角。进行多组实验，将所得到的 φ 与 $\mu(\pi + \theta)$ 绘制为散点图，进行线性拟合，结果如下：

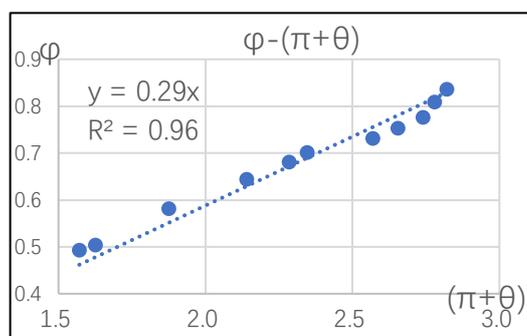


图 6 摩擦系数实验数据图

一次函数拟合直线的斜率大小即为杆与绳的摩擦系数，因此 $\mu = 0.29$ 。此结果将运用到之后的实验与理论的验证中。

c. 实验步骤

- (1) 搭建好装置，调整相关变量（绳长、释放角度、质量比等）至指定值，并使用释放装置将整个系统固定；
- (2) 烧断释放装置连接到系统的线，使系统开始运动。用摄像机从侧视角度进行慢动作录像；
- (3) 重复上述过程进行多组控制变量实验；
- (4) 将视频导入 Tracker，分别对轻物和重物的运动进行追踪。将得到的数据导出，进行数据分析，并最终与理论进行对比验证。

d. 实验结果

- (1) 系统的运动特征

在实验中，我们得到了以下图像：

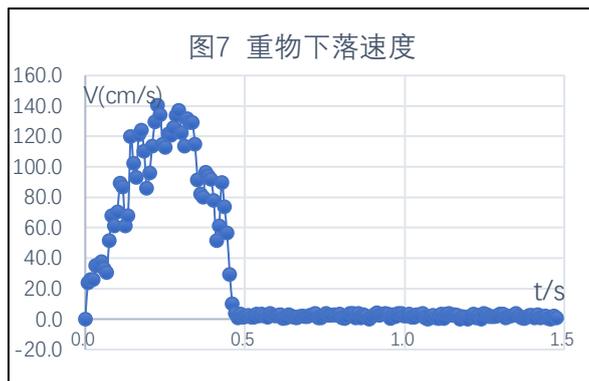


图7为重物下落速度随时间的变化关系。可以看出，重物先是做加速运动，再快速地减速，最终停止运动。重物停止时，轻物仍然在绕杆进行“循环”摆动。此运动过程与理论中所预测到的运动过程相符合。

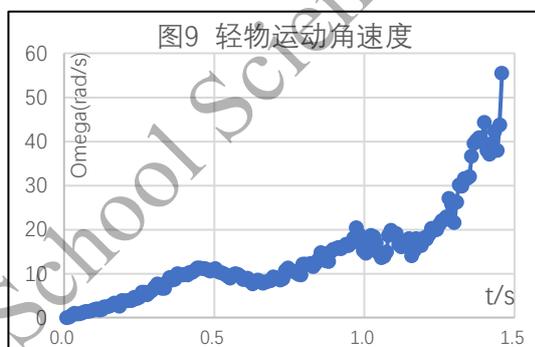
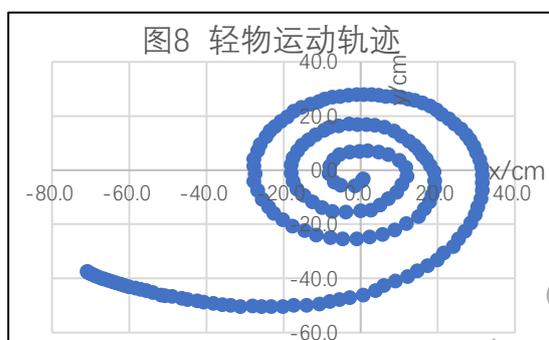
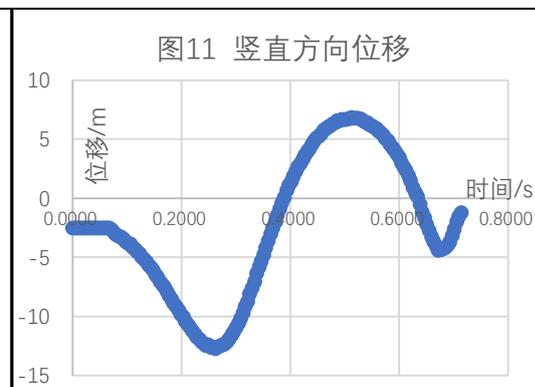
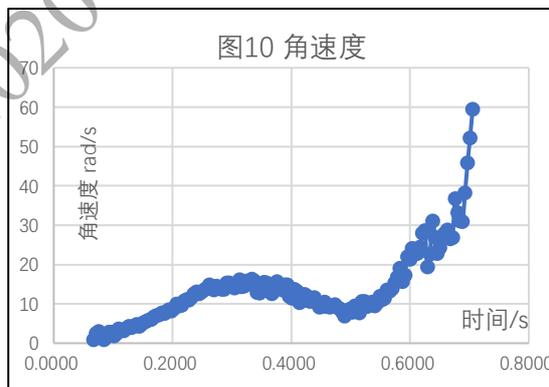


图8展示了轻物的运动轨迹，轻物做一个半径不断减小的曲线运动。在重物下落时，重物摆长的增加（即重物的下落）与绳子不断缠绕在杆上这两个因素共同导致了轻物摆动半径的减小；而当重物停止运动时，轻物旋转半径只由于绳在杆上不断缠绕而减小，呈阿基米德螺线的运动趋势。与理论计算图像一致。图9展示了轻物角速度随时间的变化关系，角速度在波动中整体呈现加速趋势，此图像与理论中所给出的图像具有一致的趋势。同时，我们也可以结合实验的其他数据定性解释角速度发生下降的原因。

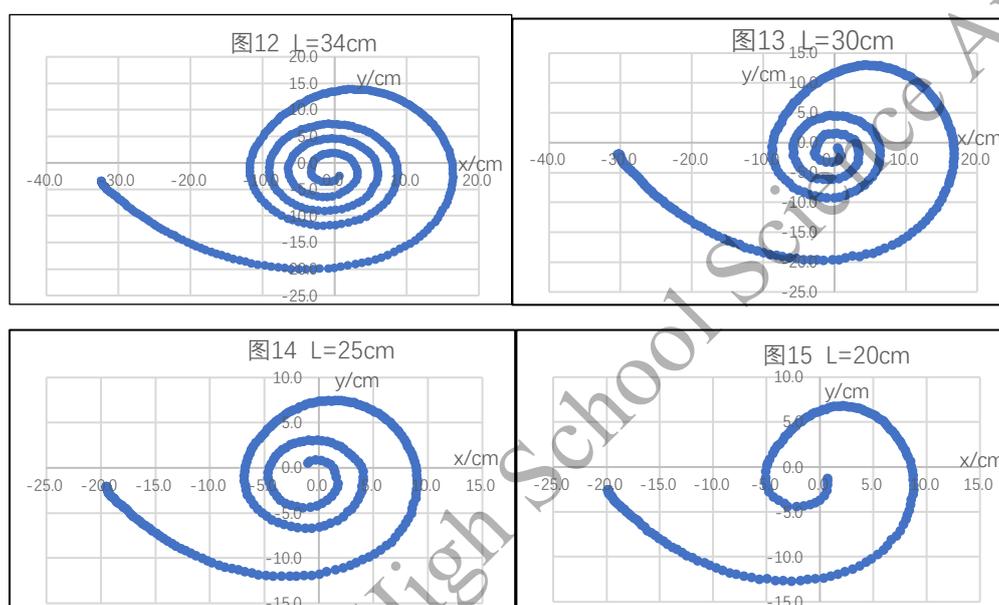


两幅图展示了同一组实验中轻物的角速度、竖直方向位移随时间的变化关系。对比两幅图可以发现，当轻物向下摆动（即位移减小）时，角速度增加；而轻物向上摆动（即竖直方向位移增大）时，角速度相应地减小。也就是说，在轻物向上摆动时，其部分动能转化为了重力势能，导致其角速度的减小。

(2) 控制变量实验

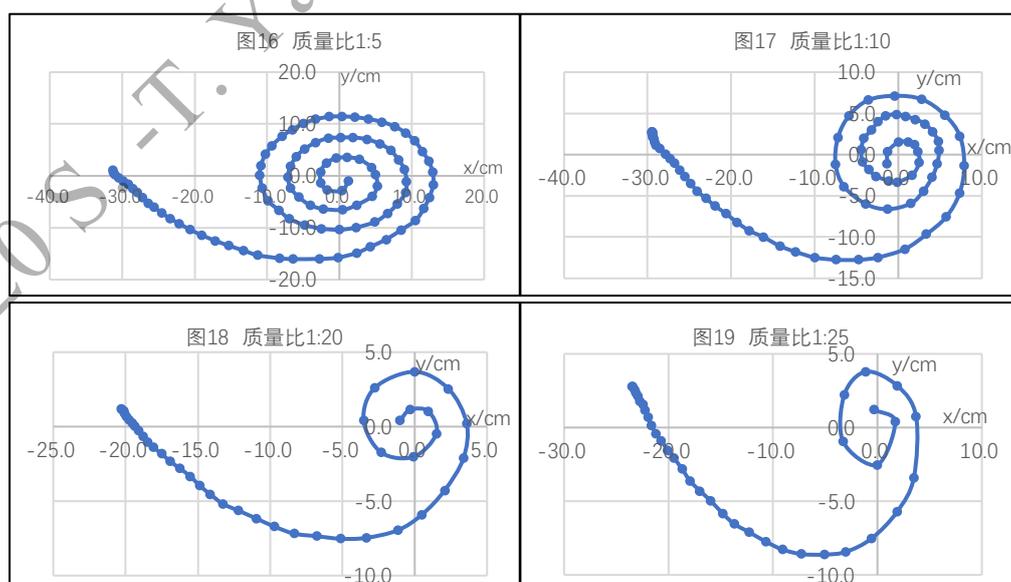
通过控制变量进行实验，我们可以获得一些定性的结论。

只改变初始时刻轻物到杆的距离（即轻物绳长），我们获得了以下图像：



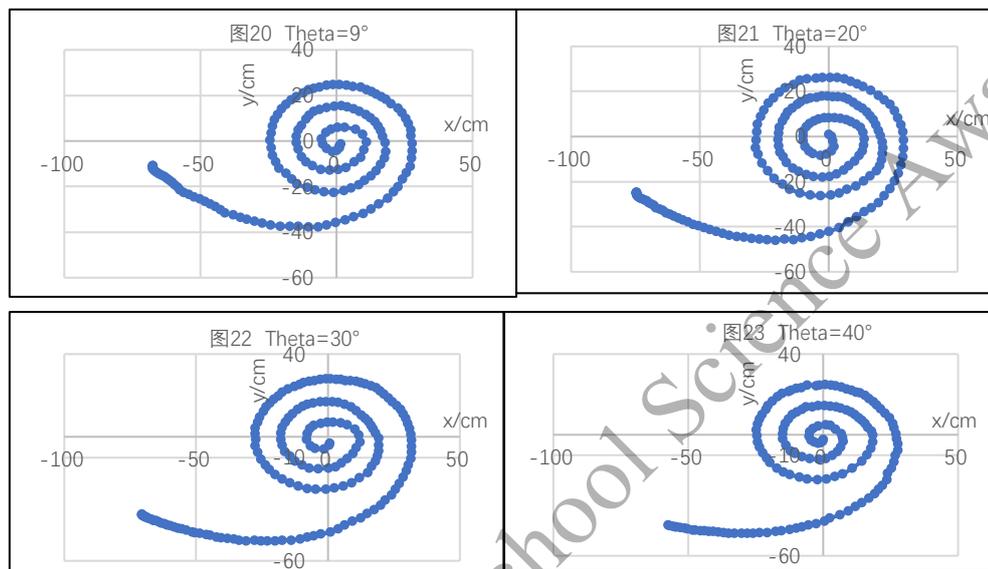
可以看出，随着绳长的增加，轻物绕杆“循环”旋转的圈数增加。

改变绳子两端轻重两个负载的质量比，可以获得以下实验图像：



可以看出，随着轻重两物体质量比的减小，轻物绕杆“循环”旋转的圈数相应地减小。我们还发现，当质量比取到一些特殊值的时候，可以观测到一些特殊的“循环摆”现象。我们将在附录中讨论这些现象的特点、形成原因。

改变轻物的初始释放角度，得到以下轨迹图像：



我们没能从这些数据中得到一个较为直观的结论。这些实验将在下一个板块被用来验证理论的正确性。

e. 理论验证

我们使用 MATLAB 计算了在一定参数下的理论结果，并将之与相同参数下的实验结果进行对比。以下是轻物和重物运动状态的实验与理论对比图：

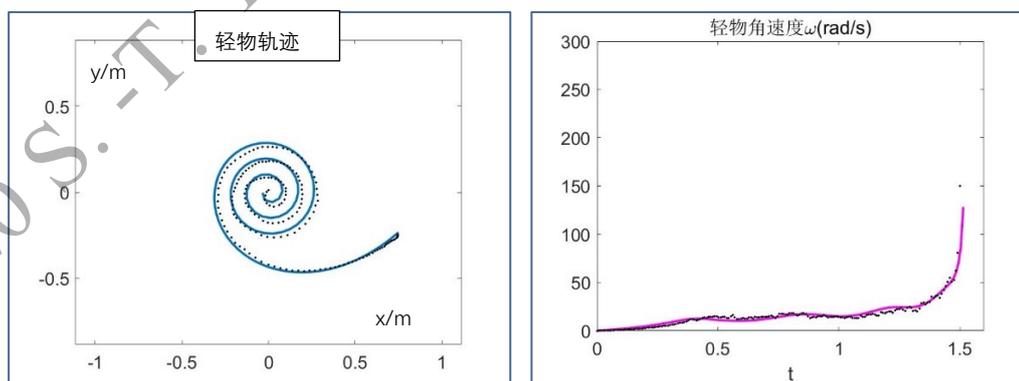


图 24 参数: $m:M = 1:5$; $\theta = 18.5$; $L = 78\text{cm}$

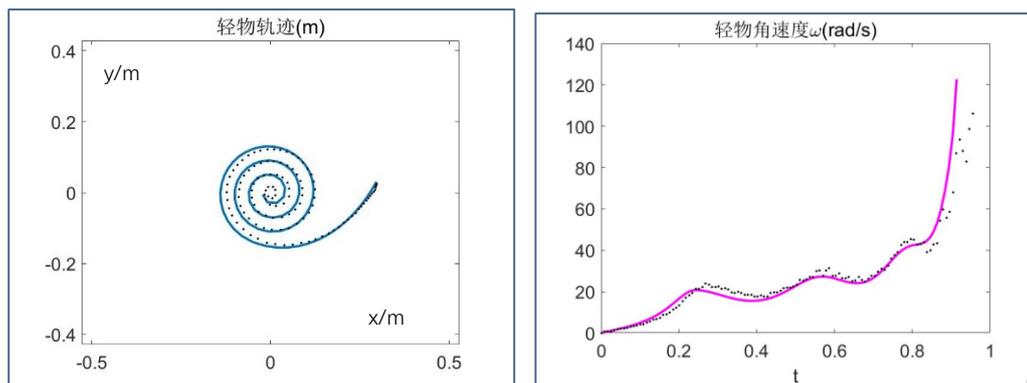


图 25 参数: $m:M = 1:5$; $\theta = 5^\circ$; $L = 30\text{cm}$

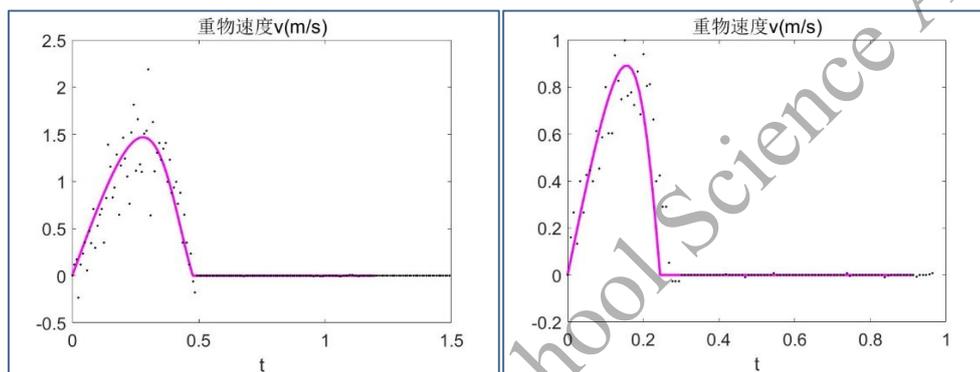


图 26 $m:M = 1:5$ $\theta = 18.5^\circ$ $L = 78\text{cm}$; $m:M = 1:5$ $\theta = 5^\circ$ $L = 30\text{cm}$

在不同参数下，我们的理论与实验吻合地很好，验证了理论的准确性。

在“轻物角速度”的理论与实验对比中，我们观察到了一个有趣的现象：在轻物运动的最后阶段（即非常接近于杆时），我们的理论值总是比实验值偏大一些，我们需要对这个误差做出解释：



如图分别为实验与理论中，轻物在运动的最后阶段的示意图。实验中，由于运动半径过小，轻物与杆发生了接触，导致轻物加速度减小，最后减速至停止。而在理论中，我们将轻物看作为质点，在与实验相同的同一时刻，质点与杆没有任何接触，故其不会受到外界阻力，可以继续进行加速。因此，忽略轻物体积是导致此误差的主要原因。在接下来的研究中，我们将对此误差进行修正。

我们也可以对理论中重物的运动状态进行验证。将实验中的数据与理论结果进行对比，我们可以绘制出以下图像：

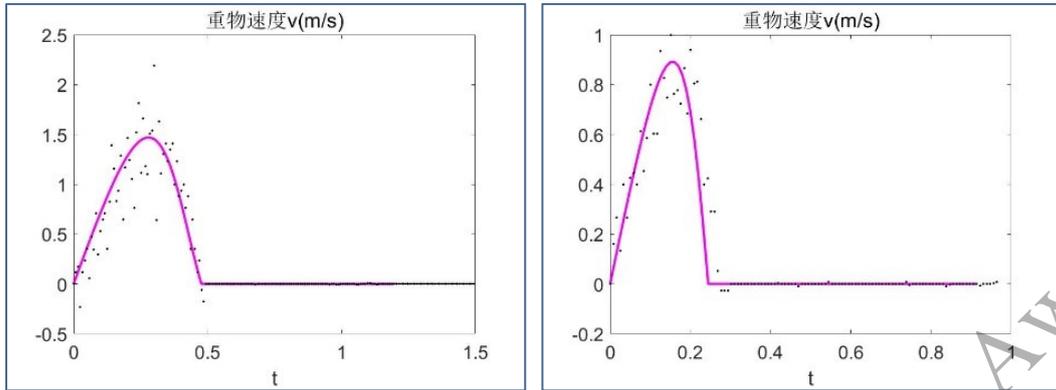


图 27 重物下落速度

如图是在不同参数下重物速度的理论与实验值。理论与实验结果符合较好。因此，理论中重物的运动状态得到了验证。重物因摩擦力的e指数增长而逐渐减速并停止运动。绳与杆间摩擦系数对系统运动的影响

四、 模拟预测

我们已经证明了理论的正确性，因此我们可以利用我们的理论进一步预测其他变量对“循环摆”现象的影响。在实验中，几乎不可能针对杆与绳子间的摩擦系数 μ 进行控制变量实验，因为我们很难找到其他参数（半径、材料属性）等完全相同而只有摩擦系数不同的杆进行实验。鉴于此种原因，我们选取杆与绳的摩擦系数 μ 作为参量，使用理论对其产生的影响进行了理论预测。下图为 MATLAB 程序所给出的结果：

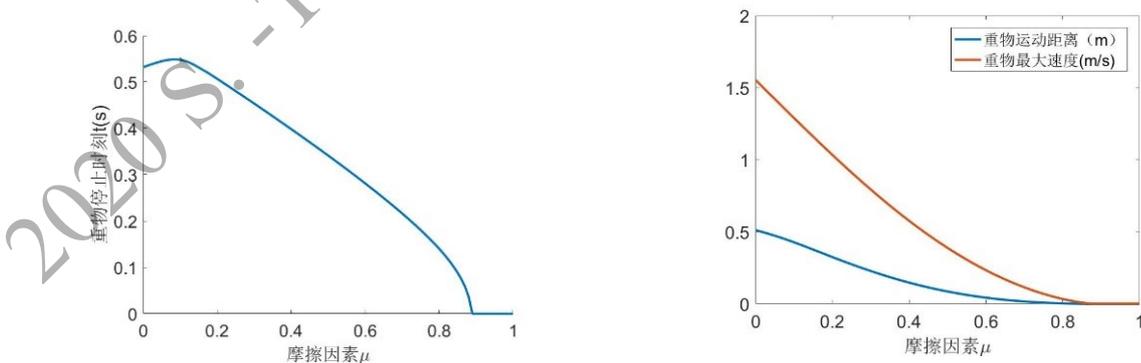


图 28 理论预测 相关参数: $m:M = 0.3$

左图给出了重物停止时刻随摩擦系数 μ 的变化关系。随着摩擦系数增大，同样情况下的摩擦力也相应地增大，故重物更容易、更快地停止了运动。而当

摩擦系数足够大时，初始时刻绳与杆的摩擦力已经大于了重物的重力，故重物不会下落，其下落时间为零；而右图则展示了重物运动距离以及重物最大速度随摩擦系数 μ 的变化关系。随着摩擦系数增大，摩擦力作用都增强，故重物最大运动距离、最大速度均与摩擦系数呈反相关关系。同样，当摩擦系数足够大时，重物根本不会下落，故运动距离、最大速度均为零。

五、 研究结论与讨论

- “循环摆”现象的基本特征：重物下落时，重物下落、绳绕杆缠绕共同作用，使重物运动的旋转半径不断减小；重物受摩擦力作用停止后，重物绕杆做类似于渐开线的循环摆动，直至其与杆发生接触而停止。
- 在运动过程中，重物经历了加速、迅速减速、停止三个阶段的运动过程。此运动特征的产生原因是摩擦力的e指数增大；
- 重物绕杆循环摆动，重物的下落、绳子绕杆缠绕两个因素导致其旋转半径不断减小；重物加速度在波动中呈现上升趋势，导致其减速的原因是部分动能转化为重力势能；
- 我们可以用一下两个方程来简单定量地描述“循环摆”的运动特征：

$$\ddot{\theta} = \frac{-g \sin \theta + r\dot{\theta}^2 + 2\dot{h}\dot{\theta}}{l} \quad (7)$$

$$\ddot{h} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M} e^{\mu(\pi+\theta)}} \left[g - \frac{m}{M} e^{\mu(\pi+\theta)} (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \right] \quad (8)$$

- 未来展望：

- 搭建更加精确的装置、设备进行实验
- 修正理论，考虑空气阻力等其他因素对“循环摆”现象的影响
- 利用理论进一步预测其他因素对“循环摆”现象的影响
- 研究是否会出现其他特殊现象

六、 参考文献

- [1] 《理论力学》范钦珊，高等教育出版社
- [2] 《新概念物理教程：力学》，高等教育出版社
- [3] Pavel Drábek, Invernizzi S . Periodic solutions for systems of forced coupled pendulum-like equations[J]. Journal of Differential Equations, 1987, 70(3):390-402.

[4] Gonzalez-Buelga A , Wagg D J , Neild S A . Parametric variation of a coupled pendulum-oscillator system using real-time dynamic substructuring[J]. Structural Control & Health Monitoring, 2010, 14(7):991-1012.

[5] Jung J H , Pan N , Kang T J . Capstan equation including bending rigidity and non-linear frictional behavior[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(6):661-675.

2020 S.-T. Yau High School Science Award

附录

一、理论修正：考虑“循环摆”的三维运动

在实验中，我们观察到绳子有规律地缠绕在杆上。绳的缠绕使摆在三维空间中运动，而不是之前所假设的二维平面。如下图所示：



图 29 绳子在三维方向上的缠绕

设绳子缠绕于水平方向形成的角度为 θ ，我们进行以下理论修正：

用以下坐标描述轻物的位置：

$$x = -(l \cos \alpha - r\theta) \sin \theta + r \cos \theta \quad (20)$$

$$y = -(l \cos \alpha - r\theta) \cos \theta - r \sin \theta$$

$$z = -r\theta \sin \alpha$$

则轻物的动能为：

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \quad (23)$$

轻物的势能为（以坐标原点为零势面）：

$$V = mgy \quad (24)$$

拉格朗日量：

$$L = T - V \quad (25)$$

拉格朗日方程可写为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (27)$$

求解上述方程即可得到三维空间中的循环摆运动方程。但表达式过于复杂，在此直接将方程绘制成图像展示：

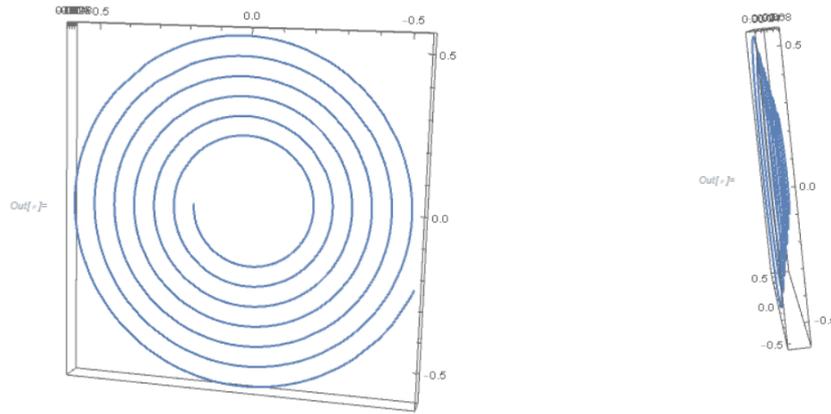


图 30 考虑三维运动的理论图像

在修正后的理论中，轻物在 x, y 轴上的运动与之前版本的理论一致。但在 z 轴上，轻物由于绳子在杆上的缠绕而存在小幅度的运动。通过分析可知，轻物的三维运动对正文的实验分析影响不大。

二、 理论的另一种推导方法：

取选点 c 为研究对象，在 t 时刻其速度大于 0。在 Δt 时刻之前的 c_1 点，显然此时 c 点以速度 v_c 垂直于绳向下绕 c_1 作圆周运动。因此有：

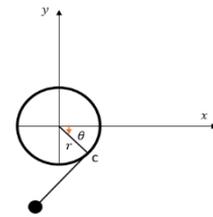


图 31 “循环摆”示意图

$$v_c(t - \Delta t) = c_1 c \times \dot{\theta}(t - \Delta t) = r[\theta(t - \Delta t) - \theta(t)]\dot{\theta}(t - \Delta t) \quad (28)$$

当 c 点与杆重合时，其不再运动，因此：

$$v_c(t) = 0 \quad (29)$$

由加速度的定义知：

$$a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t) - v_c(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (30)$$

联立上式可知：

$$a_c = r\dot{\theta}^2 \quad (31)$$

此式为 c 点关于绳子法向的加速度，而 c 点关于绳方向上没有加速度。

即：

$$a_{cr} = 0 \quad (32)$$

再以小球为研究对象，其关于杆的加速度则为：

$$a_{\theta} = -(l - r\theta)\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2 \quad (33)$$

$$a_r = -(l - r\theta)\dot{\theta}^2 - \ddot{l} \quad (34)$$

用隔离法对轻物进行受力分析，对于轻物有：

$$mg \cos \theta - F_T = m[\ddot{l} - (l + r\theta)\dot{\theta}^2] \quad (35)$$

$$mg \sin \theta = -m[(l + r\theta)\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2 + 2\dot{l}\dot{\theta}] \quad (36)$$

对于重物：

$$T = Mg + M\ddot{l} \quad (37)$$

Capstan Equation:

$$F_T e^{\mu(\pi+\theta)} = T \quad (38)$$

联立上述各式解得：

$$\ddot{\theta} = \frac{r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta - 2\dot{l}\dot{\theta}}{l - r\theta} \quad (39)$$

$$\ddot{l} = \frac{\frac{m}{M} e^{\mu(\pi+\theta)} [g \cos \theta + (l - r\theta)\dot{\theta}^2] g}{1 + \frac{m}{M} e^{\mu(\pi+\theta)}} \quad (40)$$

上式化简结果与正文中理论推导的结果相同。（参数假设稍有不同）