

参赛队员姓名：毛钰涛、徐敏瑞、刘松源

中学：重庆市育才中学校

省份：重庆市

国家/地区：中国

指导教师姓名：张程鑫

论文题目：“歌唱”的声管——气流在波纹腔中的激发与共振

2020 S.-T. Yau High School Science Award

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：毛钰涛、徐敏瑞、刘松源 指导老师：张程鑫

# “歌唱”的声管——气流在波纹腔中的激发与共振

毛钰涛 徐敏瑞 刘松源

**摘要：**声管是一种表面带有波纹的管状玩具，在一定条件下，气流在其内部流动后会发出声音。本文利用共振原理与伯努利原理解释了声管发声的条件和气流流动的原因，并结合玩具木青蛙的发声对声管的发声机制进行了解释。定量上，本文发现声管的自然频率与声管长度成反比，与波纹体积与总体积比值成正比；声管的激发频率与流速成正比；给出了离散自然频率与对应的离散化的激发频率的关系。本文也从实验上有效地定量验证了理论结果。本文的研究还观察到了声管的部分低阶自然频率无法激发的现象，我们结合流体湍流流动状态分析了导致这一现象的原因：存在一个最小激发频率使得小于此频率的自然频率永远无法发声。实验结果支持我们的理论分析。

**关键词：**自然频率；激发频率；共振；气流流动状态；起始频率；离心作用；多普勒效应

2020 S.-T. Yau High School Academic Award

# 目录

摘要	3
引言	5
1. 理论分析	5
1.1 声管的纵切面：几何模型	5
1.2 声管的自然频率	6
1.3 声管的激发频率	8
1.4 声管中气流的激发与共振	9
1.5 “藏起来”的基频 - 声管的起始频率	10
1.6 波纹管中的流场	12
1.7 声管的发声条件	13
1.8 旋转的声管	13
1.9 多普勒效应	14
1.10 理论研究小结	16
2. 实验验证	17
2.1 探究风速与声管发声频率的关系	17
2.1.1 实验装置以及音频分析	17
2.1.2 气体流速与声管发声频率的关系	18
2.2 声管长度与“隐藏”频率的关系	18
2.3 探究多普勒效应对声管旋转发声的影响	19
2.3.1 实验装置	20
2.3.2 声管发声与多普勒效应	20
3. 结论	20
参考文献	21
致谢	22

# 引言

振动与声音是物理学中的重要部分,在前沿领域研究以及教学中都有着举足轻重的地位。声管发声则是在这一领域中一个有趣的现象。声管是一种简单且常见的玩具,通常由两端开口的塑料波纹管构成。当使用者握住声管的一端,并且旋转声管时,声管会发出奇特的声音。当转速增加,声管发出的声音频率也会同时增加。已有研究表明,声管发声是由于气体流过管道并与声管碰撞产生振动发出声音,并且发现声管激发出的频率与其转速正相关<sup>[4]</sup>。其他研究给出了波纹状声管的自然频率的表达式<sup>[1][3]</sup>,表明其自然频率为离散分布,以及风速与激发声管振动的激发频率的关系。还有研究表明,在一定条件下,气流流过声管,会在波纹管凹槽产生涡旋<sup>[3]</sup>。

通过这些理论与实验可以定量计算得到声管在静止条件下对于某一风速下的频率的值,但是在这个问题中仍然有很多细节留待研究与解释:1) 虽然已经知道了声管的自然频率与外力产生的激发频率,但他们之间的关联与它们和能够接收到的频率的关联尚未有明确解答,比如声管的自然频率为离散变化,而激发频率则是连续变化,但是接收到的频率信号却是离散变化;2) 即使理论上能够预言某一风速下一根声管激发出的频率的值,但目前并没有清晰的理论能够解释方程背后的物理意义;3) 当声管旋转发声时,无论声源为何处,多普勒效应是一个不可忽略的变量,然而已有的研究中对其效应对拾音器所收集的信号频率仍未有准确的定量实验验证;4) 当风速较小时,无法听到明显的声音,但当风速达到某一阈值时,声管激发出频率。现有的理论暂时还无法解释此处会有一个临界风速出现的原因,也无法定量探究其大小。

本文认为这个现象可能成为解释声管发声现象的根本原因,对这一临界风速以及临界频率的研究具有相当的意义。综上所述,本文由对声管的自然频率与风速引起的激发频率始,到对声管发出的频率的离散性的研究,基于伯努利效应引起的气体流动的探究,由气体流动状态引发对声管发声原因的解释和对声管起始频率与起始风速的探讨,以及多普勒效应对接收到的音频信号影响的探究,并且通过物理场模拟的方式对声管发声机制理论的模拟与定量实验对上述研究进行了验证。

## 1. 理论分析

### 1.1 声管的纵切面: 几何模型

本节通过建立声管的理论模型,对其发声机制和声音的特征进行定量的研究。如图一所示为未压缩未弯曲状态下声管的二维模型(纵切面)。其可被视为以边缘为波纹状形成的周期性结构。设待研究声管总长度为 $L$ ,波纹状凹陷侧视图可视为高度为 $h$ 的等腰三角形,且波纹的间距为 $d$ 。这里,定义波纹凹陷最深处对应的管宽为内径,凸起最大处对应的管宽为外

径, 声管的内径记为 $2r$ , 外径记为 $2R$ 。将流速为 $U$ 的空气通入声管来探究其发声机制和特性。

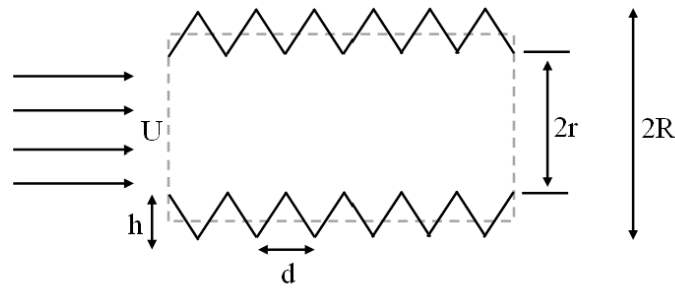


图1 声管二维模型（纵切面）示意图

对于特定结构的物体, 其发声频率与其自然频率息息相关。而自然频率, 是直接由其几何结构决定的。因此, 本文首先研究图1中所示声管结构对应的自然频率, 即其固有频率。

## 1.2 声管的自然频率

在没有外力的情况下, 物体做自由振荡所产生的频率为物体的自然频率。这种频率仅与该物体本身属性有关, 与外部环境无关。

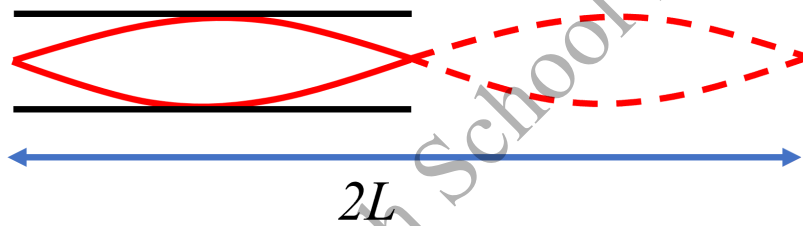


图2 两端开口圆柱管道中能稳定存在的最大波波长

如图2所示, 对于一段两端开口的光滑圆柱管道, 其中能稳定存在的声波的最大波波长为<sup>[1]</sup>:

$$\lambda = 2L \quad (1)$$

此时, 波的频率即为管子的基频, 即:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} \quad (2)$$

这里,  $v$ 是声音在管内环境中传播的声速。可以看出, 随着管长的增加, 管子基频越低, 这一点也会在后续更复杂结构的声管的发生特征中出现。另外, 管中还可以稳定存在一些以整数倍减小的波长的波, 如图3所示的二倍基频对应的声波。不难发现, 二倍频对应的波长为:

$$\lambda = L \quad (3)$$

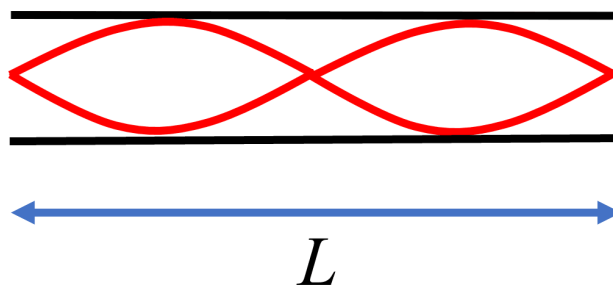


图 3 两端开口圆柱管道中能稳定存在的二倍频

可以发现，光滑管中稳定存在的声波波长是离散变化的：

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (4)$$

另外，后续讨论中，本文的研究均将声管置于空气中，因此，本文记这种情况下的声速为：

$$v = c \quad (5)$$

因此，对于两端开口的光滑管道来说，其自然频率的表达式为：

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{nc}{2L} \quad (6)$$

这里， $f_n$ 就是这一管道的 $n$ 阶特征频率。事实上，由于管子两端开口口径的影响，上式中声音的频率会因为口径由于声辐射效应对管长的修正而产生变化。因此，需要利用有效长度 $L_e$ 来修正由于声辐射带来的影响<sup>[2]</sup>。

$$f_n = \frac{nc}{2L_e} \quad (7)$$

管子的有效长度等于声管本身长度加上两端末端修正长度 $\Delta L$ 。

$$L_e = L + 2\Delta L \quad (8)$$

其中，一般情况下，修正长度 $\Delta L = 0.61r$ <sup>[3]</sup>。因此，在用有效长度修正后，管子的自然频率表达式为：

$$f_n = \frac{nc}{2(L + 1.22r)} \quad (9)$$

现在本文进一步来考察图 1 引入的特殊结构的声管，相比于光滑直管，其外壁出现了“褶皱”，称之为波纹，这可以视为一根直管被因为某种特殊的方式“压缩”了。因此，当有空气流入时，管内气流不会再像在直管中的气流一般平凡，这样一来，声音在声管中可能会传播更长的距离，由于波纹状的“褶皱”的影响，声音沿着管壁处传播的声速相比于沿着光滑管道会降低。这些波纹状的“褶皱”，会使得流场出现复杂的行为，例如本文后面会讨论的湍流，这都会使得声音在水平方向的有效传播速度发生改变。因此，为了调和光滑管道和波纹状声管几何结构的区别带来的对频率的影响，本文引入有效声速 $c_e$ 进行修正<sup>[3]</sup>：

$$f_n = \frac{nc_e}{2L_e} \quad (10)$$

$$c_e = c_0 \frac{(1-M^2)}{\left[1 + \frac{h}{r} \left(\frac{d}{2}\right) \left(1 + \frac{h}{2r}\right)\right]} \quad (11)$$

其中 $M$ 是马赫数：

$$M = \frac{U}{c} \quad (12)$$

其中， $U$ 为管内气流流速。

可以看出，(11)所给出的有效声速与波纹高度，间距密切相关，但和波纹的形状无明显关系。

由于声管内部空气流速远小于声速，在实验条件下风速最大为 $U = 20\text{m/s}$ ，因此 $M = \frac{U}{c} < 0.2$ ，

即可以将内部空气当作不可压缩流，并忽略马赫数的影响（ $M^2$ 项的量级为 1%，可忽略），

则(11)式简化为:

$$c_e = c_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_c}{SL}}} \quad (13)$$

其中 $V_c$ 为声管波纹部分的总体积,  $S$ 为声管的内横截面积,  $L$ 为声管的长度。

由于所考察的波纹管波纹部分体积远小于总体积(波纹管波纹部分体积约为总体积的十分之一), 即 $V_c \ll SL$ , 上式进一步简化为

$$c_e \approx c_0 \left(1 - \frac{V_c}{2SL}\right) \quad (14)$$

(14)式表明, 在 $V_c \ll SL$ 范围内, 波纹的存在会使得有效声速关于波纹体积线性的减小, 从而根据(10)式, 可以看出波纹管的共振频率也会随着波纹体积的增大而减小。这是一个有意思的结论, 即波纹的存在通过改变了管子的结构, 从而改变其中声音传播的有效速度, 而使得波纹管作为一个共振腔的共振频率发生偏移。

另一方面, 为了后面讨论的简洁, 本文引入 $V_{in} = SL$ 代表声管不含波纹的体积,  $V_{tot} = V_{in} + V_c$ 为声管的总体积<sup>[4]</sup>, 因而(13)式可以重写为:

$$c_e = c_0 \sqrt{\frac{V_{in}}{V_{tot}}} \quad (15)$$

从上式可以看出, 声管的有效声速是与其波纹体积以及整体体积的比值有关。声管波纹相当于额外的体积, 会降低声速。当声管波纹部分所占整体体积的比值越小, 也即声管内部体积不变的情况下越来越趋近于一个光滑管道的时候, 其有效声速会越接近于正常声速。这说明, 声管波纹会降低声速, 并且当一个声管的波纹越“明显”, 其有效声速会越低。

最终根据(9)和(15)式可得声管的自然频率:

$$f_n = \frac{nc_0}{2(L + 1.22r)} \sqrt{\frac{V_{in}}{V_{tot}}} \quad (16)$$

不难发现, 影响声管的自然频率参数有波纹体积, 声管长度, 声管内径。声管的长度越长, 波纹体积以及整体体积的比值越小, 声管的自然频率越低。然而, 虽然自然频率是声管的固有属性, 但是依然需要外界激发才可以发声, 这是因为声管的自然频率需要被激发, 才可以发出声音。在一般情况下, 根据机械振动理论, 一个受迫振动的系统在介质中能够发出明显声音的条件是受外力驱动的频率与其固有频率接近, 此时该系统发生共振, 从而出现剧烈振动, 并引周围介质振动, 而发出明显的声音。因此, 要了解声管的发声, 还需要理解驱动其发生的“外力”的频率, 这一频率我们称之为声管的激发频率。在下面的讨论中, 本文继续分析气流流动所引起的声管激发频率。

### 1.3 声管的激发频率

通过实验观察可知, 声管的发声与空气流动和波纹凹陷密不可分。在声管这个系统中, 空气流动和波纹凹陷主要起到了激发声音的作用。由于空气与声管波纹的碰撞, 声音会被激发, 原理如同下图 4 所示的玩具木青蛙一样。通过用木槌快速摩擦木青蛙背部凸槽, 可以发出撞击声。这是因为木槌和两个凸槽撞击产生振动, 从而产生了声音, 显然这一声音的频率



与木槌在青蛙背部的滑动速度以及青蛙背部凹槽的间距有关。声管发声机制就与这一机械结构的发声类似。对于声管来说，气流相当于木槌，波纹凹陷相当于背部凸槽，通过撞击，激发振动。



图 4 木青蛙（通过木槌与青蛙背部波纹摩擦产生声音）

如图 5 所示，当波纹间距为  $d$ ，风速为  $U$  时，气流冲击两个凹槽凸起部分的时间间隔为：

$$T = \frac{d}{U} \quad (17)$$

因此，激发频率为<sup>[5]</sup>：

$$f = \frac{1}{T} = \frac{U}{d} \quad (18)$$

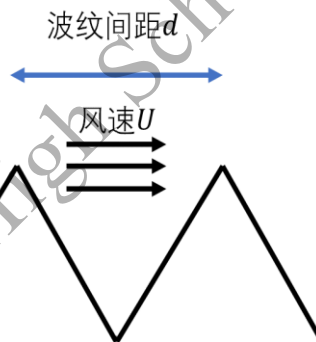


图 5 声管激发频率示意图

从上式中可以看到波纹状凹陷以及空气流动对声管发生的影响。对于光滑的管子而言，声管的波纹间距  $d$  趋近于无穷大，光滑管子激发频率  $f$  趋近于 0，因此气流流过光滑的管道是无法产生激发频率从而产生声音的。在受迫振动中，仅仅有一般的外力产生振动是不足以产生声音的，外力驱使的振动必须与系统的固有频率接近，才能够产生共振。下面的部分，我们将要讨论声管发声时的共振现象。需要强调的是，气流要充当“木槌”的作用，击打波纹而产生振动，前提条件是气流能流进波纹的凹槽并在其中与波纹产生相互作用。这需要气流在波纹管中出现湍流的流动模式。关于这一湍流产生的条件，将在后文中仔细讨论。

#### 1.4 声管中气流的激发与共振

声管的发声可以用共振来解释。如前文所述，当由气流产生的激发频率接近声管系统的自然频率时，会产生共振，导致声管的强烈振动，产生了人耳所听见的声音。

此时声管发声的频率满足：

$$f_n = \frac{nc_e}{2L_e} \approx \frac{U}{d} \quad (19)$$

因为激发频率必须与声管的自然频率接近，虽然声管的激发频率是连续的，但是由于声管的自然频率是离散的，因此，声管产生的声音频率也是离散的，和自然频率一样。当激发频率大于等于 $n$ 倍频，小于 $(n+1)$ 倍频时，声管发出声音频率为 $n$ 倍频：

$$f_n \leq \frac{U}{d} < f_{n+1} \quad (20)$$

换句话说，当声管中气流的速度满足

$$f_n d \leq U < f_{n+1} d \quad (21)$$

时，声管发出频率为 $f = f_n$ 的声音。在下图中，本文基于(21)式，给出了声管被气流所激发出的频率关于流速的变化曲线。

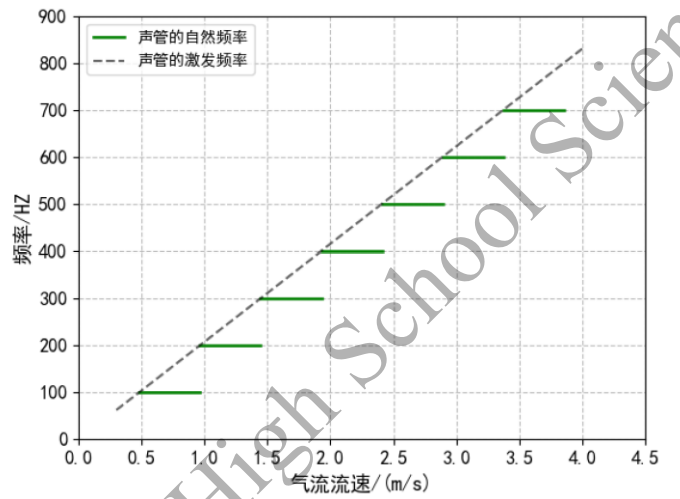


图6 声管的发声频率随管中流速的变化

### 1.5 “藏起来”的基频 - 声管的起始频率

在实验过程中，本文发现一般情况下，声管的基频并不会被激发，首次发声的频率常常为声管的二阶频，而基频就好像被“藏”起来了一样。如果选用更长的声管进行同样的实验，从而减小声管的基频，会发现，二倍频甚至三倍频频率也不会发声。本文认为该现象是由于声管内部气流流动状态的不同导致的。

如图7(a)所示，气流在声管中直直流入，没有流进凹槽，那么，凹槽内部气体流速小，凹槽外部流速大，因此，根据伯努利效应，气流会受到由凹槽外部指向凹槽内部的力，导致气流会流入声管的波纹，甚至会因为流速增大以及与管壁碰撞而产生涡旋。在前文的分析中曾提到，气流相当于木槌，敲击声管的波纹，因而产生声音。这意味着当波纹管能发声时，

气流在波纹中撞击而激发了振动，因此，气流会流入凹槽，导致湍流的形成。

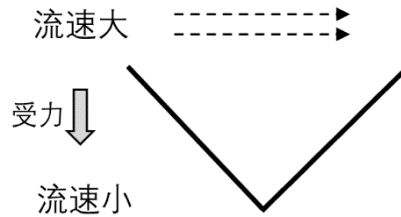


图 7(a) 声管波纹凹槽内伯努利效应示意图

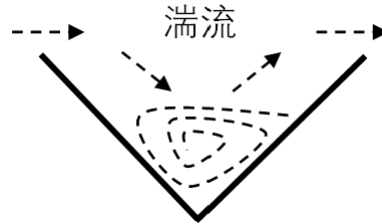


图 7(b) 声管波纹凹槽内湍流示意图

通过引入雷诺数来判断声管内部的气流状态，即：

$$Re = \frac{\rho_{air} U L_c}{\mu} \quad (22)$$

其中， $Re$ 为雷诺数， $U$ 为空气流速， $L_c$ 为特征长度， $\mu$ 黏性系数。

对于光滑的管道，其特征长度为管口直径。由于可以将光滑管子看作波纹高度趋近于 0 的声管，因此，声管的特征长度可以近似视为  $L_c = r + R$ ，即声管管口最大直径和最小直径总和的一半<sup>[5]</sup>。

将(18)和特征长度带入可得：

$$Re = \frac{\rho_{air} f d (r + R)}{\mu} \quad (23)$$

从(23)式可以看出，雷诺数正比于气流激发频率。由于根据前文分析，声管内部气流会流入凹槽，导致湍流的产生，此时的雷诺数  $Re > 2300$ 。

即：

$$Re = \frac{\rho_{air} f d (r + R)}{\mu} > 2300 \quad (24)$$

因此，对于一个几何性质确定的声管来说，必须存在一个起始频率  $f_{min}$ ，使得声管内部气流流动状态为湍流：

$$f_{min} = \frac{Re_{min} \mu}{\rho_{air} d (r + R)} \quad (25)$$

其中， $Re_{min} = 2300$ 。如图 8 所示，当  $f < f_{min}$ ，其余条件不变时， $Re < Re_{min} = 2300$ ，声管内部气流为层流，气流不会进入到波纹的凹槽空间形成涡流与声管波纹碰撞，因此不能产生激发频率，从而不能引起声管的共振。所以当声管的基频  $f_1$  小于声管的起始频率  $f_{min}$  时，即使其理论激发频率的值大于基频并且小于二阶频，声管依旧无法发出声音。这也是在实验中常常听不见基频的原因。

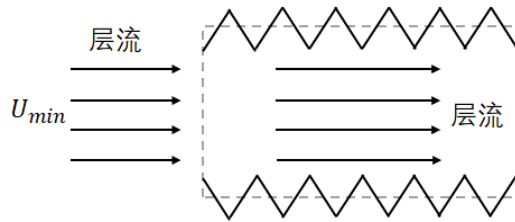


图8 当声管内部气流为层流时，气流不会与声管波纹碰撞

在本文的实验中，基于仪器的局限性和声管实际的几何尺寸，能够通过仪器直接测得的物理量只有空气流速与声管发声频率的大小，而其他关键的物理量，如声管内部的流场，实际上并不能直接通过测量来获得，因此需要通过物理场模拟的方法来得到。在下一节中，我们给出对波纹管中流场的模拟，并基于此来讨论波纹管中由于湍流所激发的发声机制。

### 1.6 波纹管中的流场

本文使用 COMSOL Multiphysics 软件对波纹管中的流场进行模拟。在本文所涉及的物理情景中，对应使用 COMSOL 中的 CFD(Computational Fluid Dynamics) 模块进行计算。由于声管发生的特殊机制（波纹凹槽空间中的涡与管壁进行碰撞），选用的是单向流：湍流模块中的大涡模拟（LES）。大涡模拟是对紊流的一种空间平均，也就是通过某种滤波函数将不同尺度的涡分离开，对大尺度的涡进行直接模拟，用模型来封闭小尺度的涡。通过精确求解某个尺度以上所有的湍流运动，大涡模拟能够捕捉到 RANS 方法所无能为力的许多非稳态。当然，选用的惯性子尺度一定是小于波纹尺度的，因为波纹内部较大的涡才是我们关注的重点对象。因此，构建了图一所示几何结构作为声管的二维纵切面。

在模拟中选取的参数有：入口风速 $v$ ，三角形高 $h$ ，与三角形的底 $l$ 。令 $\lambda = \frac{h}{l}$ ， $\lambda$ 越大，意味着波纹越深。在实验中所用的波纹管参数  $h \approx 0.5cm$ ， $l \approx 0.5cm$ ， $v < 20m$

如图9所示，初始风速为10m/s，声管的波纹几何尺寸与实验中的、使用的声管一致。从图中可以清晰地看见，当所有条件与实验条件相同时，气流的确会进入波纹的凹槽空间中，并且形成涡流，验证了前文的理论。

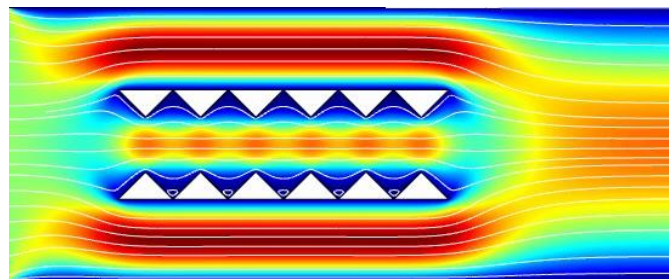


图9 声管内部气流流场模拟图

图10为声管“褶皱”中气流流场的局部放大图。可以看到，其中的气流流线出现了复杂的行为，如涡旋，从而形成湍流，这与我们前面在1.5节的分析预测一致。因此，通过模拟，本文演示了理论分析中所说的湍流，说明了气体在一定条件下的确会进入“褶皱”并形成湍流。

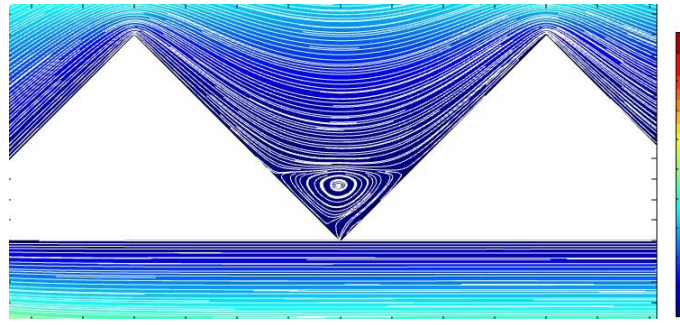


图 10 声管“褶皱”处气流流场局部放大图

### 1.7 声管的发声条件

总的来说, 根据上述 1.4 节和 1.5 节的分析, 声管的发声需要同时满足湍流和共振两个条件。为了使得声管发声, 不仅声管内部气流需要为湍流, 还要使得声管激发频率大于等于声管基频。其中, 声管内部产生湍流的最小风速  $U_{min}^a$ :

$$U_{min}^a = \frac{Re_{min}\mu}{\rho_{air}L_c} \quad (26)$$

产生共振 (即至少激发声管基频) 的最小风速  $U_{min}^b$ :

$$U_{min}^b = \frac{c_e d}{2L_e} \quad (27)$$

联立(26)和(27)可得风速产生声音的条件:

$$U \geq \frac{U_{min}^a + U_{min}^b}{2} + \frac{\theta(U_{min}^a - U_{min}^b)}{2}(U_{min}^a - U_{min}^b) \quad (28)$$

其中

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (29)$$

为阶跃函数。

对于一根声管, 如果其一阶自然频率永远小于最小激发频率, 声管的一阶频将永不发声; 如果激发频率永远小于一阶自然频率, 那么这根声管将永不发声。

即:

$$\frac{Re_{min}\mu}{\rho_{air}dL_c} > \frac{nc_0}{2(L + 1.22r)} \sqrt{\frac{V_{in}}{V_{tot}}} \quad (29)$$

简化可得:

$$\frac{2Re_{min}\mu}{\rho_{air}nc_0L_c} > \frac{d}{L_e} \sqrt{\frac{V_{in}}{V_{tot}}} \quad (30)$$

如果忽略有效长度  $L_e$  和有效声速  $c_e$  修正:

$$\frac{2Re_{min}\mu}{\rho_{air}nc_0Lc} > \frac{d}{L} \quad (31)$$

从(31)式中可以看出,当声管的波纹间距 $d \rightarrow \infty$ 时,所需要达到最小激发频率的风速为无穷大,因此这根声管将不会发声。这也是光滑管子不会发声的原因。

## 1.8 旋转的声管

声管作为一种玩具,可以通过用手旋转的简单方式发声。当手握住声管的一段进行旋转时,声管内部有气流流动,因而声管可以发声。随着转速的增大,声管发声频率会增大。此时,声管可以被看成一个离心泵,通过离心作用产生气流。

在与声管随动的非惯性参考系中,考虑 $dx$ 的微元,其中压强梯度力 $F_p = -\pi D^2 dp$ 与离心力 $F_c = \rho_{air}(\pi D^2 dx)\omega^2 x$ 相平衡使得管内空气匀速流动。

通过力的平衡可以得到关于压强的微元:

$$\rho_{air}\omega^2 x dx = dp \quad (32)$$

对上式进行积分可得:

$$P(L) - P(0) = \frac{1}{2}\rho_{air}(\omega L)^2 \quad (33)$$

根据伯努利原理:

$$P(L) - P(0) = \frac{1}{2}\rho_{air}U^2 \quad (34)$$

联立(30)和(29)可得:

$$U = \omega L \quad (35)$$

因此,(35)得到了声管中流体流速与旋转角速度和声管长度的关系,在不考虑管壁摩擦的情况下,声管内部气流流速等于声管末端的切向速度。转速越大,内部气流流速越大,越能激发高阶频,这也是为什么随着转速增大,声管发声频率越高的原因。

事实上,声管壁并不是完全光滑,因此需要考虑声管壁的摩擦<sup>[3]</sup> $c_f$ :

由于摩擦的影响,声管两端压强差会减小,其压强减小量为:

$$\Delta P = 4c_f \left( \frac{1}{2}\rho_{air}U^2 \right) \frac{L}{2r} \quad (36)$$

其中, $c_f$ 即为管壁的摩擦系数。

因此(30)应该考虑进入因为摩擦产生的损失:

$$P(L) - P(0) = \frac{1}{2}\rho_{air}U^2 \left( 1 + 2c_f \frac{L}{r} \right) \quad (37)$$

联立(29)和(33)可得:

$$U = \frac{\omega L}{\sqrt{1 + 2c_f \frac{L}{r}}} \quad (38)$$

根据方程，我们可以通过声管旋转的角速度推导出声管内部空气流速。从公式中可以看出，当管壁无摩擦时，流速的表达式回归到(32)式，当摩擦越大，流速越小。从式中我们还可以看到，摩擦的大小仅仅与声管最小内径与声管总长度有关，意味着同样长度与内部体积的声管，其空气流速都相同，而不论其波纹特征。

### 1.9 多普勒效应

由于声管在旋转过程中，声源的位置相对于接收者在不断变化，因此，转动的声管会产生多普勒效应，导致接收到频率的高低起伏。

多普勒效应：

$$f' = f \frac{c_0 \pm v_l}{c_0 \mp v_s} \quad (39)$$

其中 $v_l$ 为接受者的相对运动速度， $v_s$ 为声源的相对运动速度， $c_0$ 为声速。

对于转动的声管来说，声源位置可表示为：

$$\underline{x}_s(t) = \begin{bmatrix} r_s \cos(\omega t) \\ r_s \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

假设接收者位置不变，保持静止：

$$\underline{x}_l(r_l, 0, h) \quad (41)$$

因此，声管声源的速度为：

$$\underline{v}_s = \frac{d}{dt} \underline{x}_s(t) = \begin{bmatrix} -r_s \omega \sin(\omega t) \\ r_s \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (42)$$

由于多普勒效应是由声源和接收者相对速度（即声源指向接收者的速度）产生的，如图 11 所示。

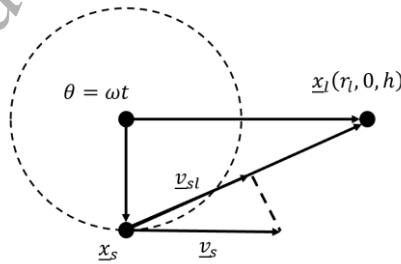


图 11 旋转声管俯视图

通过计算，相对速度 $\underline{v}_{sl}$ ：

$$\underline{v}_{sl} = \frac{r_l r_s \omega \sin(\omega t)}{\sqrt{r_l^2 + h^2 + r_s^2 + 2r_s r_l \cos(\omega t)}} \quad (43)$$

因此多普勒效应产生的频移：

$$f' = f \left( \frac{c_0}{c_0 + \underline{v}_{sl}} \right) \quad (44)$$

通过用 Python 绘制图像，可以发现，多普勒频移具有周期性，且存在极值。

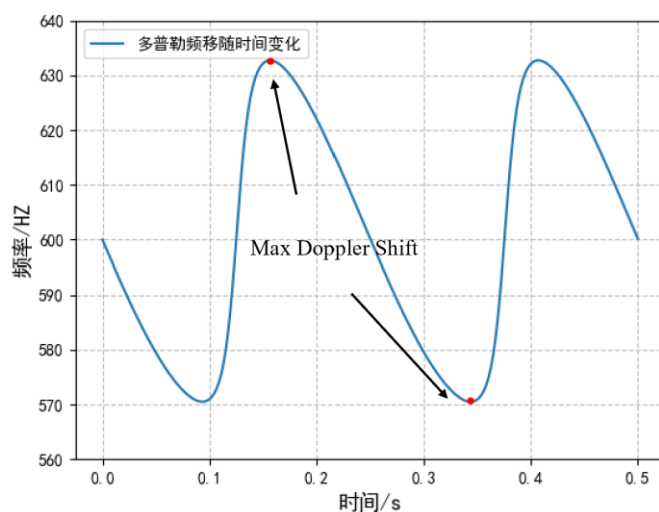


图 12 多普勒频移的图像

声源切向速度的延长线经过接收者的投影时，相对速度最大，产生的多普勒效应也就越大。此时，声源的切向速度等于其相对速度。

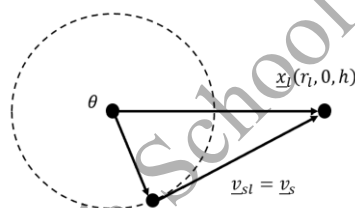


图 13 最大多普勒频移的示意图

$$v_{max} = \frac{\omega r \sqrt{r_l^2 - r_s^2}}{\sqrt{r_l^2 + h^2 - r_s^2}} \quad (45)$$

此时，声管的多普勒效应最为明显。

### 1.10 理论研究小结

- 由于管中稳定存在的声波波长的限制，声管的自然频率为离散变化的，与声管有效长度成反比，与波纹体积占整体体积的比值成正比的声管固有属性，如(16)所示；
- 声管一端固定，另一端旋转时，基于伯努利原理，压强差会使得空气从静止端泵入声管，并且空气流速在声管内一致，与距离旋转中心的距离无关；
- 随着流速的增加，气流转变为湍流，在波纹管的凹槽中形成涡旋并且与凹槽壁碰撞，给予了声管系统以外力。当这个外力的频率达到声管的自然频率时产生共振，引起周围介质振动，发出明显的声音；
- 基于气流的湍流流动状态，存在一个最小的发声频率  $f_{min}$ ，使得当声管的自然频率小于  $f_{min}$  时，被“藏起来”，无法发声；
- 当拾音器位置固定，声管旋转发声时会产生多普勒效应，对拾音器所接收到的音频信号产生周期性波动。



- 综上，由于压强差，空气进入声管，在一定条件下产生湍流与涡旋来回撞击声管凹槽，当撞击频率达到声管自然频率时产生共振，发出明显的声音。

## 2. 实验验证

### 2.1 探究风速与声管发声频率的关系

由理论部分得到的式(18)可知，随着波纹管内气体流动速度的增加，会使得引起声管系统受迫振动外力对声管的激发频率随之增加。结合式(19)，(20)与(21)，可以得到图6的所示风速-频率的理论图像。

#### 2.1.1 实验装置以及音频分析



图 14 实验装置

本文设计了如图 14 所示的装置来研究声管发声频率与气流流速的关系。

如图 14 所示，实验中，首先在声管一端使用鼓风机鼓入空气，待气流稳定后，在声管的出风口用风速仪测量气体流速。本文使用的声管管长  $L = 0.7m$ ， $d = 0.5cm$ 。待听到声管发声后，使用拾音器在管口接收音频。将一段时间内收集到的声音信号导入 Python，并对音频信号进行快速傅里叶变换(FFT)，得到音频信号对应的频谱图。在图 15 中，我们展示了图 1 所示的声管在流速  $v = 2.3m/s$ ，通过录音进行 FFT 分析采集到声音的频谱图：

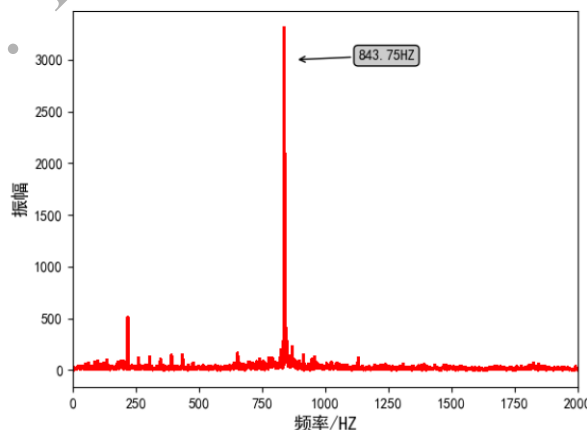


图 15 通过 FFT 分析 843.75Hz 音频对应的频谱图

从图 15 中可以看出，频谱存在一个极大峰值，即当频率为 843.75Hz 时，对应振幅最高。在频率为 240Hz 左右时，也出现一个振幅较高的峰值。通过分析与比较，这是由于鼓风机产生的所造成的。其余的部分主要来源于环境噪声。利用这种办法在不同的流速下得到了

声管发声频率  $f$  随气体流速  $v$  关系。

### 2.1.2 气体流速与声管发声频率的关系

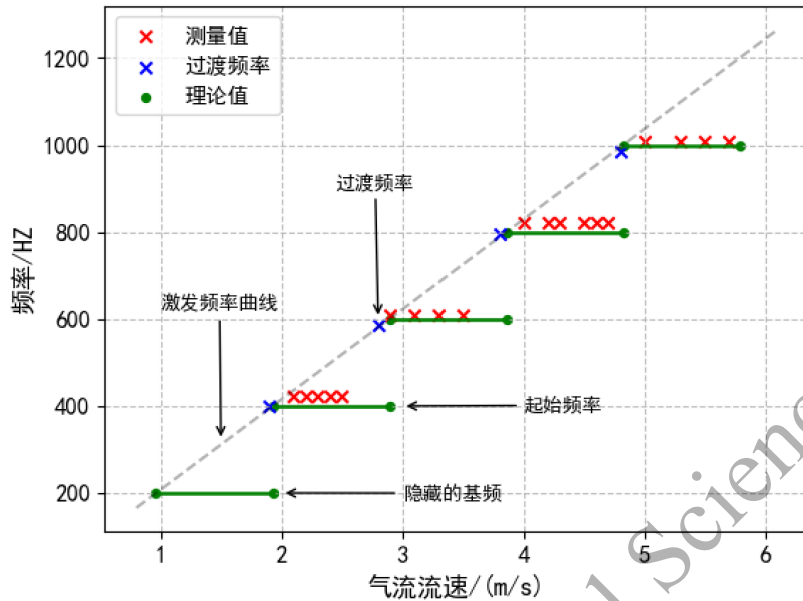


图 16 气体流速与声管发声频率的关系

图 16 展现了气体流速与声管发声频率的关系。如图 16 所示，绿色的线段表示理论预言的该声管的发声频率-风速图像。灰色直线展现了理论预言的风速和声管激发频率的图像，即声管的激发频率和流速成正比，通过这两条曲线，如前面理论讨论的那样，在一定的风速范围内，声管的发声频率出现“平台”。红色叉点代表了实验中测量出的声管发声频率；蓝色叉点代表了实验中观察到声管在不同阶的自然频率下共振出现交替对应的过渡频率，但由于过渡频率的不稳定性，我们无法记录大量数据对其进行分析。从图中可以看出，该声管的基频，也就是一阶自然频率（最低的绿色平台）未被激发出来，这就是我们在理论部分所提到的“隐藏”的基频现象。

随着风速的增加，我们首先接收到的是声管的二阶自然频率。当风速在某一范围内，声管的发声频率保持恒定，在图像上是离散的。这与前文的理论分析吻合。这也验证了我们对声管发声频率的解释：当且仅当气流流动产生的激发频率与声管的自然频率接近时，声管才能产生共振，频率才能够被放大。

### 2.2 声管长度与“隐藏”频率的关系

在理论分析部分，由式(9)可以知道，随着声管的长度的增加，其基频会下降，然而声管的起始频率却不会变化。这意味着当声管越长时，其“隐藏”的频率个数会增大，而更短的声管可以激发出更低的自然频率。

在 2.1 节的实验中使用的是长度为 70cm 的声管，而其最小可激发出来的频率为二阶频。如果使用 35cm 的声管，其自然频率会是 70cm 声管的两倍，而起始频率由式(24)给出，与声管长度无关。这样一来，对于 70cm 声管而言是被“隐藏”的基频，对于 35cm 的声管来说，可能就是可激发的频率了。为了验证这一想法，接下来，本文进一步来研究了不同声管

长度与可以激发频率的关系。根据(25)公式可以得到，我们使用声管的起始频率：

$$f_{min} = \frac{Re_{min}\mu}{\rho_{air}d(r+R)} = \frac{2300 \times 1.83 \times 10^{-4}}{1.293 \times 10^{-3} \times 0.5 \times 2.3} = 283.06\text{Hz} \quad (46)$$

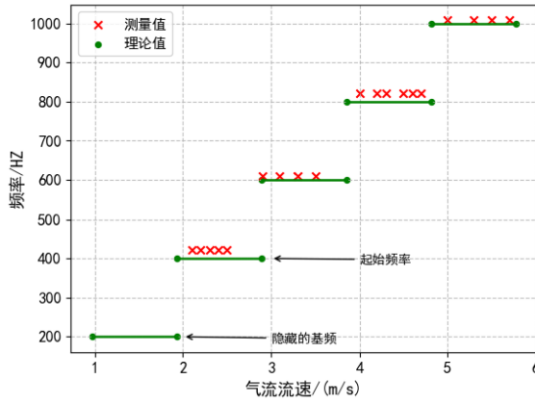


图 17(a) 长度为 70cm 时声管发声频率

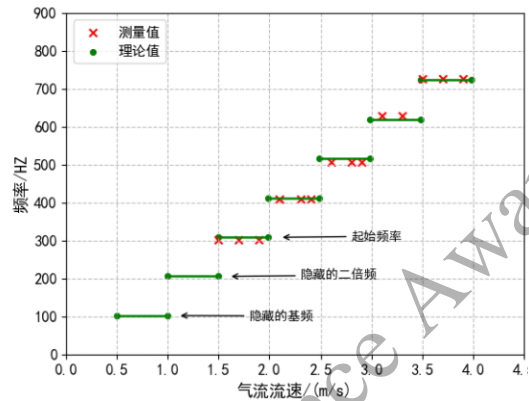


图 17(b) 长度为 135.6cm 时声管发声频率

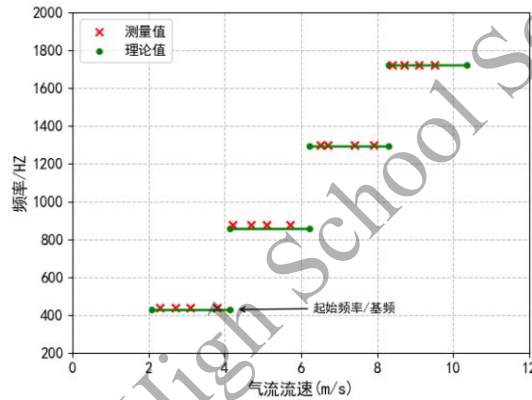


图 17(c) 长度为 32.6cm 时声管发声频率

表 1 声管隐藏频率的个数与长度和基频的关系

长度(cm)	基频(Hz)	隐藏频率个数	起始频率(Hz)	开始发声频率(Hz)
32.6	430.03	0	283.06	430.03
70.0	200.00	1	283.06	400.00
135.6	103.24	2	283.06	309.72

表 1 为图 17 中三张图的数据整理，可以发现，随着基频的变化，被隐藏的频率个数也随之发生变化，这与理论分析一致。从中可以看到当管长较小时（长度为 32.6cm），能够激发出该声管的一阶自然频率。而随着管长的增加，当管长为 70cm 时，无法激发出一阶频；当管长为 135.6cm 时，二阶频也无法被激发出来。这与理论分析相吻合。总的来说，声管长度越长，其基频越低，而由于最小可激发频率与长度无关，因此越长的声管会被隐藏更多的频率。

### 2.3 探究多普勒效应对声管旋转发声的影响

在前文理论部分的最后，本文探讨了多普勒效应对声管旋转发声时发声频率的影响，结

果如式(44)所示。在前面的实验研究中，皆采用了鼓风机引起气体流动使得静止声管发声的方法进行实验，这样就避免了多普勒效应对发声的影响。在本实验中，我们将探讨当声管相对于接收器旋转发声时的多普勒效应引起的声管频率的变化。

### 2.3.1 实验装置

本文使用了如图 18 所示的装置来研究旋转声管的多普勒效应。其中，麦克风固定接收音频信号，而声管则两端开口，随着电动机带动木棍一起以恒定角速度旋转。通过改变施加在电动机两端的电压，我们可以连续地改变声管的旋转速度，从而改变气流流速。实验中将麦克风和声管置于同一平面，分析多普勒效应带来的影响。



图 18 实验装置主视图（左）与俯视图（右）

### 2.3.2 声管发声与多普勒效应

通过改变声管的转速可以得到对于同一声管不同的频率信号。如图 19 所示，红色的实验数据点与蓝色的理论曲线较好的吻合。随着转速的增加，可以发现，声管的发声频率在自然频率周围波动的程度越来越大，并且当转速增加导致风速增加到一定值时，频率同样会“跳跃”到下一个自然频率。这意味着，多普勒效应只引起拾音器接收到的频率的波动，而不会改变其激发频率与自然频率这一事实，这也与理论所给出的分析符合。

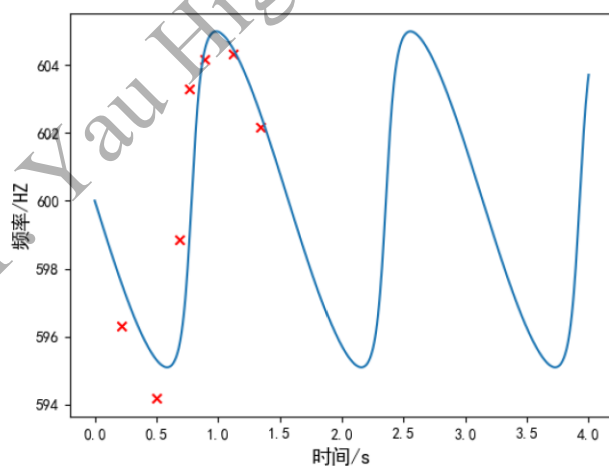


图 19 多普勒效应对接收频率的影响

## 3. 结论

针对声管旋转发声的现象，本文研究了声管的自然频率与气体流过声管的原因。当声管旋转时，基于伯努利原理，气体会被泵入声管，并且空气流速在管内保持恒定，风速大小与

声管转速与声管长度成正比。气流对声管的激发频率与流速成正比，与声管波纹间距成反比，证明了光滑管道无法发声。对于声管，其自然频率与声管长度成反比，与波纹体积与整体体积的比值成正比。结合共振理论，本文得到了声管的发声频率与风速成正相关，数值大小对应声管自然频率以及其离散性，而定量的实验也有效地验证了理论。

联系气体流动的状态，本文解释了声管的发声机制：当且仅当气流在声管内湍流流动并在凹槽中产生涡旋后，气流才能够对声管进行撞击产生振动，类比玩具木青蛙；同时，基于气流产生湍流的条件和雷诺数，解释了声管部分自然频率被“隐藏”的原因：必须先产生湍流然后才能够产生激发频率，而这要求风速达到某一阈值，并得到了声管发声的起始频率，实验也很好地验证了理论。

最后，本文提出了关于多普勒效应对声音信号频率的影响：当拾音器固定并与声管旋转平面一致时，接收到的频率会在一定的频率值附近周期震荡，并在实验部分进行了充分的验证。基于本文的研究，猜想未来能够以声管为主体制作一种乐器，分别由不同长度、不同风速的声管在单片机控制下轮流或者同时发声，产生不同的频率，利用“歌唱”的声管创作一首“物理之歌”。

#### 参考文献

- [1] J. Wolfe, The acoustics of woodwind musical instruments. *Acoustics Today*, 2018, 14(1): 50-56.
- [2] M. Amielh, F. Anselmet, Y. Jiang, et al, Aeroacoustic source analysis in a corrugated flow pipe using low-frequency mitigation. *Journal of Turbulence*, 2014, 15(10): 650-676.
- [3] B. Rajavel, M.G. Prasad, Acoustics of corrugated pipes: a review. *Applied Mechanics Reviews*, 2013, 65(5).
- [4] G. Prasad, O. Rudenko, A. Hirschberg, Aeroacoustics of the swinging corrugated tube: voice of the dragon. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2012, 131(1): 749-765.
- [5] F.S. Crawford, Singing corrugated pipes. *American Journal of Physics*, 1974, 42(4): 278-288.

## 致谢

感谢张程鑫老师对论文思路指导，写作修改的建议，对实验器材购买以及实验设计的帮助；

感谢重庆市育才中学校物理实验室对我们实验的支持；

感谢重庆市育才中学校对我们的支持和帮助。

2020 S.-T. Yau High School Science Award