

参赛队员姓名： 郭凯诚 孙昊天 孙雨辰

中学： 南京外国语学校

省份： 江苏省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 王思慧 潘志民

论文题目： 线绳自发打结的物理机制

2020 S.-T. Yau High School Science Award

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：郭凯成 孙昊天 孙雨辰 指导老师：王悦悦 潘艺民

2020年 9月 12日

# 线绳自发打结的物理机制

郭凯诚 孙昊天 孙雨辰

2020 S.-T. Yau High School Science Award

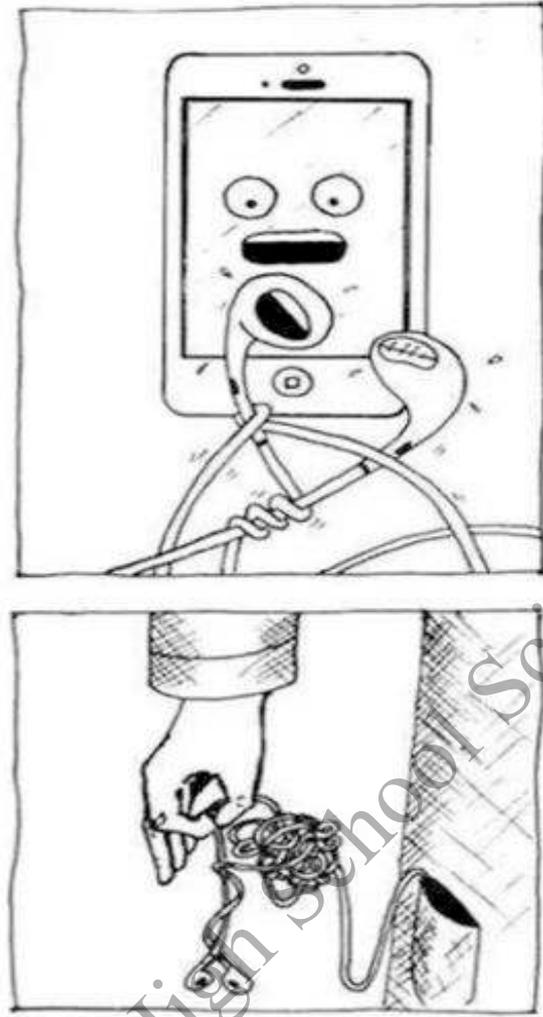
## 摘要

本论文研究线绳自发打结的物理机制与过程，以及相关参数的影响。论文包括理论分析、转动实验以及振动实验。大多数理论推导都是在实验观察中得到启发而建立的。

首先通过理论分析打结过程，研究驱动（振动或转动）以及绳子这两类因素对打结的影响。在绳子驱动因素方面，推导了打结时转速、摩擦系数范围、振幅、最优驱动频率、时间等公式；在绳子的影响方面，导出了打结概率与绳长的公式，并对绳子盘绕方式、绳子材料的影响进行了定性分析。

通过反复尝试，自制了两种实验装置，分别进行振动和转动实验。在实验中，验证了振幅、频率（转速）、时间、盘绕方式、绳长、材质的影响，还对绳结的打结与解结进行了实验探究。还对打结的可逆性、容器尺寸等影响进行了讨论。大多数实验结果都和理论分析相符。最后，我们对问题进行了总结和展望。

**关键词：** 自发打结，转动，振动，解结，打结的可逆性



令人烦恼的耳机线缠绕打结



飞船太空舱内景象：太空绳会打结吗？

# 目 录

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 摘要.....                    | 4  |
| 目录.....                    | 6  |
| 一、引言.....                  | 8  |
| 二、预实验.....                 | 9  |
| 2.1 振动时间与绳子长度对打结个数的影响..... | 9  |
| 2.2 振动方式与绳子材质对打结个数的影响..... | 10 |
| 三、理论分析.....                | 11 |
| 3.1 驱动的影响.....             | 11 |
| 3.1.1 转动与转速.....           | 11 |
| 3.1.2 驱动参数.....            | 14 |
| 3.1.3 时间的影响.....           | 16 |
| 3.2 绳子的影响.....             | 18 |
| 3.2.1 盘绕方式的影响.....         | 18 |
| 3.2.2 绳长的影响.....           | 18 |
| 3.2.3 绳子材料的影响.....         | 19 |
| 四、振动实验.....                | 21 |
| 4.1 振动参数的影响.....           | 21 |
| 4.1.1 绳结个数与振动方向的关系.....    | 21 |
| 4.1.2 绳结个数与振幅的关系.....      | 21 |
| 4.1.3 绳结个数与振动频率的关系.....    | 22 |
| 4.1.4 绳结个数与振动时间的关系.....    | 23 |
| 4.2 绳子的影响.....             | 23 |
| 4.2.1 绳结个数与盘绕方式的关系.....    | 23 |
| 4.2.2 打结概率与绳子长度的关系.....    | 24 |
| 4.2.3 绳结个数与绳子材质的关系.....    | 24 |
| 4.2.4 绳结的打结与解结.....        | 26 |
| 五、转动实验.....                | 27 |
| 5.1 转动参数的影响.....           | 28 |
| 5.1.1 转动时间对绳结个数的影响.....    | 28 |
| 5.1.2 转动频率对绳结个数的影响.....    | 29 |
| 5.2 绳子参数的影响.....           | 29 |
| 5.2.1 绳子盘绕方式对绳结个数的影响.....  | 29 |
| 5.2.2 摩擦系数的测量.....         | 30 |
| 5.2.3 绳子材质对绳结个数的影响.....    | 31 |
| 5.2.4 绳长对绳结个数的影响.....      | 32 |
| 5.2.5 配重对绳结个数的影响.....      | 33 |
| 5.3 讨论.....                | 34 |
| 5.3.1 打结的可逆性.....          | 34 |
| 5.3.2 转动容器尺寸与形状的影响.....    | 35 |
| 六、总结与展望.....               | 37 |
| 参考文献.....                  | 39 |
| 致谢.....                    | 40 |

|                   |    |
|-------------------|----|
| 实验时间和地点.....      | 41 |
| 附录 1 部分实验数据.....  | 42 |
| 附录 2 失败的实验装置..... | 46 |
| 附录 3 上传的实验视频..... | 49 |
| 参赛队员简历.....       | 50 |

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 一、引言

人们经常把耳机线放进书包等狭小空间，经过一段时间的步行、行车等过程后，耳机线会缠绕、打结。人类认识结已经很久了，图 1 是一些常见的结[1]。然而直到近一个世纪，人们才开始研究纽结理论。纽结理论主要限于打结的方式，即研究结的拓扑分类，也就是两个结是否能够通过拉伸、扭转等方式达到全等，如果能够全等，那么就说明两种结拓扑等价[2]。最开始的时候，人们提出了亚历山大多项式和琼斯多项式[2]，然而这两种多项式相等的结中，有一部分并不是拓扑等价的，也就是这两种方式归纳的并不完全。1987 年，日本科学家给出了纽结的能量定义：长度、线密度相等的线首尾相连，将他们打成各种各样的结，待到达稳定状态后的电势能就是这个结的能量，这样的定义能量相等的结必定是拓扑等价的[3]。



图 1.a 单结（一根绳子）。



图 1.b 八字结（一根绳子）。



图 1.c 营绳结（一根绳子）。



图 1.d 平结（两根绳子）。

图 1 常见的绳结

近年来，人们对绳子打结问题进行了实验研究。Dorian M. Raymer 等人研究了一个转动的长方形容容器中绳子自发打结的问题[4]，作者将绳子的运动简化成随机运动，得出了绳长和转动时间对打结的影响，并讨论了绳子材质的影响。

本文通过实验和理论分析，研究打结的物理机制与过程，研究相关参数对打结过程的影响。我们通过反复尝试，制作了转动和振动仪器进行控制变量实验，模拟真实运动，研究时间、频率、振幅、转速等参数以及绳子的材料、绳长、盘绕方式等因素对打结的影响。通过理论分析，也得出了每个因素相应的物理结论。大多数实验结果都和理论分析相符。论文的理论分析写在实验验证前面，实际上大多数理论推导都是在实验观察中得到启发而建立的。最后，我们对问题进行了总结与展望。

## 二、预实验

### 2.1 振动时间与绳子长度对打结个数的影响

**实验器材:**一长为 120cm 的耳机,一长为 125cm 的耳机,7cm × 7cm × 13.5cm 的透明塑料盒



图 2.1a 120 厘米耳机线



图 2.1b 125 厘米耳机线



图 2.1c 放置耳机线的盒子与盘绕后的耳机线



图 2.1d 打结的耳机线 (5 个结)

图 2.1 预实验

#### 实验步骤:

1. 将一个耳机盘绕 6 圈后放入盒中 (图 2.1c)
2. 用手摇使盒子水平振动 10s, 并记录下振动后绳结的个数
3. 改变振动时间 (20s, 30s, 40s), 记录下每次振动后绳结的个数
4. 改变耳机线, 重复步骤 1, 2, 3

#### 打结情况:

表 2.1 耳机线的打结情况

|       | 长度    | 振动时间 | 绳结个数 |
|-------|-------|------|------|
| 耳机线 1 | 120cm | 10s  | 1    |
|       |       | 10s  | 1    |
|       |       | 20s  | 5    |
|       |       | 20s  | 6    |
|       |       | 30s  | 11*  |
|       |       | 40s  | 6    |
|       |       | 40s  | 5    |
| 耳机线 2 | 125cm | 30s  | 3    |

\*其中一个是两个耳机线头打得结

### 结论:

1. 振动是打结的原因之一，且耳机线打结主要在长绳（单绳）部分。
2. 振动时间对绳结个数有影响。对于长 120cm 的耳机 1 来说，振动时间对绳结的个数有着显著的影响，且绳结的个数在振动 30s 时达到最大值。在 10s-30s 之间振动时间越大，绳结个数越多；在 30s-40s 之间振动时间越长，绳结个数越少。
3. 耳机 1 和耳机 2 长度接近，由于两种耳机线材质不同，说明材质对打结个数有影响。正式实验将分别研究绳子材质和长度对打结个数的影响。

## 2.2 振动方式与绳子材质对打结个数的影响

**实验器材:** 长 1.25m 的棉线、导线和耳机



图 2.2 棉线、导线和耳机

### 实验步骤:

1. 将绳子盘绕 6 圈后放入盒中
2. 将盒子水平振动 30s，记录下振动后绳结的个数
3. 将盒子竖直振动 30s，记录下振动后绳结的个数
4. 改变绳子，重复步骤 1，2，3

### 打结情况:

表 2.2 不同材质绳子的打结情况

|    | 棉线  | 导线  | 耳机  | 振动时间 |
|----|-----|-----|-----|------|
| 水平 | 6 个 | 4 个 | 4 个 | 30s  |
| 竖直 | 4 个 | 0 个 | 4 个 | 30s  |

### 结论:

1. 比较棉线、导线与耳机的打结情况，可以得出绳子材质对打结有影响。
  2. 对比水平振动和竖直振动，发现振动方式与打结个数可能有关。
- 以下先进行理论分析，然后制作实验装置分别对机械振动和转动进行探究。

### 三、理论分析

根据实验，我们发现驱动（包括方式、时间、频率、振幅、转速）、材料（包括密度、摩擦系数等）、绳长、盘绕方式等因素会对打结概率和数量产生影响。后面考虑每个因素时，保持其他参数不变。

如图 3.1，一端为绳子自由端，其余部分绳子平放，可以形成一些交叉，以一个交叉为例。自由端按照一定方式运动，当位于下方的自由端从上方穿过圆环，则打一个结。反之，其逆过程就是一个解结的过程。这就是打结和解结最基本的过程。下文中所指的结的数量为打开一个结时绳子自由端向外穿出的次数。在理论推导时，我们把绳子理想化成柔软、没有体积的绳子。

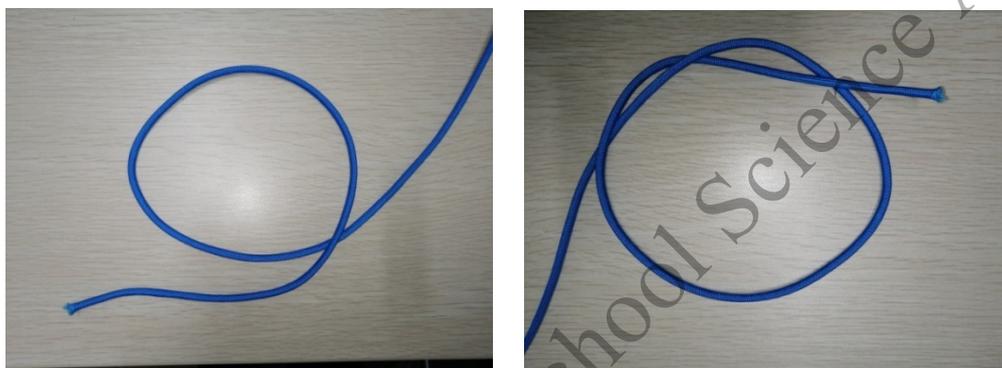


图 3.1 绳子打结示意图

#### 3.1 驱动的影响

##### 3.1.1 转动与转速

先考虑水平平面内的转动。如图 3.2，把绳子放在转筒中，绳头受到离心力  $\vec{F}_r = m\omega^2\vec{r}$ 。此力仅存在于水平方向，无法让自由端进入圈内，所以不利于打结。如果绳子有一定的刚度，此时绳子就会形成三维形状，从而打结。



图 3.2 水平放置的绳子

再考虑竖直平面内的转动。图 3.3 中的色块表示绳头的位置，一定条件下绳头可能跟随转筒上升。如图 3.3，设转筒顺时针转动，从左上角某处掉落后，有可能会钻进绳圈成功打结。

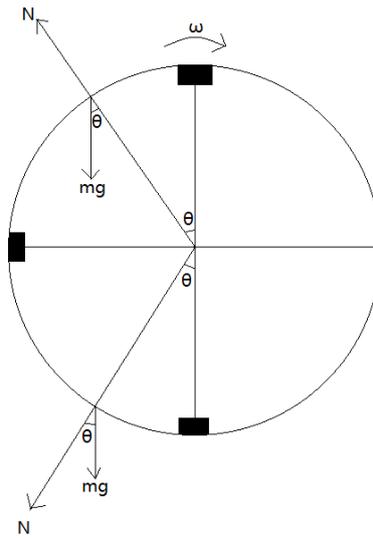


图 3.3 绳子转动时的受力分析

由以上分析推测：竖直转动打结概率>水平转动打结概率。

具体分析竖直转动的条件，可知绳子打结的条件是从左上角某处落下。原因是：①若不超过水平线（桶的圆心高度），则绳子只会贴着桶壁滑动，而不会掉落打结；②如果在上方不掉落，而是一直跟随圆筒转到顶端，会一直贴壁旋转，不能打结。

研究绳端一段绳头，设质量为  $m$ ，圆筒半径为  $R$ ，转动角速度为  $\omega$ ，图中与竖直方向所成的角度为  $\theta$ （如图）， $\mu$  表示绳子与桶的摩擦系数， $N$  表示绳子对桶的压力， $f$  表示绳子与桶的摩擦力。

先考虑在水平线以下的情况。

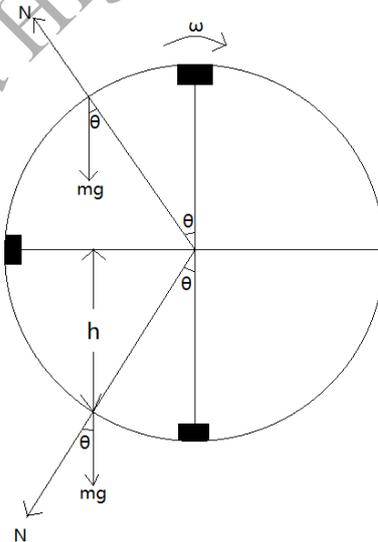


图 3.4 绳子发生滑动的位置

我们考虑绳子刚刚能到达圆心高度所在水平线的条件，此时速度为零。则可以估计绳子与桶壁开始产生相对滑动的位置，设其位于水平线下方  $h$ 。滑动之前绳子的速度为桶的转速。根据机械能守恒  $mgh = \frac{1}{2}m(\omega R)^2$ 。又因为  $\cos \theta = \frac{h}{R}$ ，可

以得到相对滑动的位置

$$\cos \theta = \frac{\omega^2 R}{2g} \quad (1)$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2} \quad (2)$$

在此处写出摩擦力和压力:

$$N = m\omega^2 R + mg \cos \theta \quad (3)$$

$$f = mg \sin \theta \quad (4)$$

若绳子可以冲上水平线, 则需保证在此极限位置之前不发生相对滑动, 即  $f < \mu N$ , 所以

$$\sin \theta < \frac{\mu \omega^2 R}{g} + \mu \cos \theta \quad (5)$$

代入  $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2}$  和  $\cos \theta = \frac{\omega^2 R}{2g}$ , 得

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2} < \frac{\mu \omega^2 R}{g} + \mu \frac{\omega^2 R}{2g}$$

所以

$$\mu > \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2}}{\frac{3\omega^2 R}{2g}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4g^2}{\omega^4 R^2} - 1} \quad (6)$$

再考虑在水平线以上的情况。满足以上条件, 绳子到达水平线以后, 写出压力和摩擦力:

$$N = m\omega^2 R - mg \cos \theta \quad (7)$$

$$f = mg \sin \theta \quad (8)$$

发生滑动的条件为  $f > \mu N$ , 所以

$$\sin \theta > \frac{\mu \omega^2 R}{g} - \mu \cos \theta$$

$$\sin \theta + \mu \cos \theta > \frac{\mu \omega^2 R}{g}$$

利用辅助角公式可得

$$\sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta + \arctan \mu) > \frac{\mu \omega^2 R}{g} \quad (9)$$

极限条件  $\theta = \arctan \frac{1}{\mu}$ , 此时是最有可能滑落的点, 所以

$$\mu^2 + 1 > \frac{\mu^2 \omega^4 R^2}{g^2} \quad (10)$$

$$\mu < \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4 R^2 - g^2}} \quad (11)$$

综上，得到

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{4g^2}{\omega^4 R^2} - 1} < \mu < \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4 R^2 - g^2}} \quad (12)$$

此式给出了发生打结的摩擦系数和转速的必要条件，但摩擦系数下界的根号内部可能出现负数，需讨论：

①当  $\frac{4g^2}{\omega^4 R^2} - 1 < 0$ ，即  $\frac{\omega^2 R}{g} > 2$  时，摩擦系数的条件为  $0 < \mu < \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4 R^2 - g^2}}$ ，此时绳头具有从桶最低端冲上水平线的速度并在上方滑落；

②当  $1 < \frac{\omega^2 R}{g} < 2$ ，摩擦系数的条件为  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{4g^2}{\omega^4 R^2} - 1} < \mu < \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4 R^2 - g^2}}$ ，需同时满足上下界才能冲上水平线并在上方滑落。

③若  $\frac{\omega^2 R}{g} < 1$ ，转到某处时，绳子对桶的压力变为零，会直接掉落，即

$$\begin{aligned} N &= m\omega^2 R - mg \cos \theta = 0 \\ \cos \theta &= \frac{\omega^2 R}{g} \end{aligned} \quad (13)$$

也可以类似地导出打结的条件。

### 3.1.2 驱动参数

先考虑水平振动。绳子放在水平面内，纯粹的水平振动下绳头依然在水平面内运动，所以无法打结，但是由于台面运动并不是绝对水平的，还可能与桶壁碰撞而产生竖直方向的运动，所以也可能打结。

再考虑竖直振动，纯粹的竖直振动是一维运动，如果绳子整体运动也不会打结。当竖直振动加速度足够大时，可能造成完全失重而脱离容器底部，这时绳子不可能保持在一个水平面内，绳头(自由端)可能相对绳子其他部分运动而打结。因此相比水平振动，竖直振动更容易打结。

#### 1. 振动振幅的影响——失重条件

初始状态振动平台位于顶端，且准备向下运动，以向上为正方向，设竖直振动的运动方程为

$$x = A \cos(\omega t) \quad (14)$$

$\omega$ 是角频率， $A$ 是振幅，对位移求导，得速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t)$$

对速度求导，得加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

跳起的条件为完全失重，即

$$|a| > g$$

所以

$$\omega^2 A \cos(\omega t) > g$$

$$t \in \left( \frac{2k\pi - \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 A}\right)}{\omega}, \frac{2k\pi + \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 A}\right)}{\omega} \right) (k \in \mathbb{Z})$$

在每个周期内，完全失重的时间占总时间的比例为

$$P = \frac{\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 A}\right)}{\pi} \quad (15)$$

将以上  $P$  和  $\omega^2 A$  关系作图，取  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

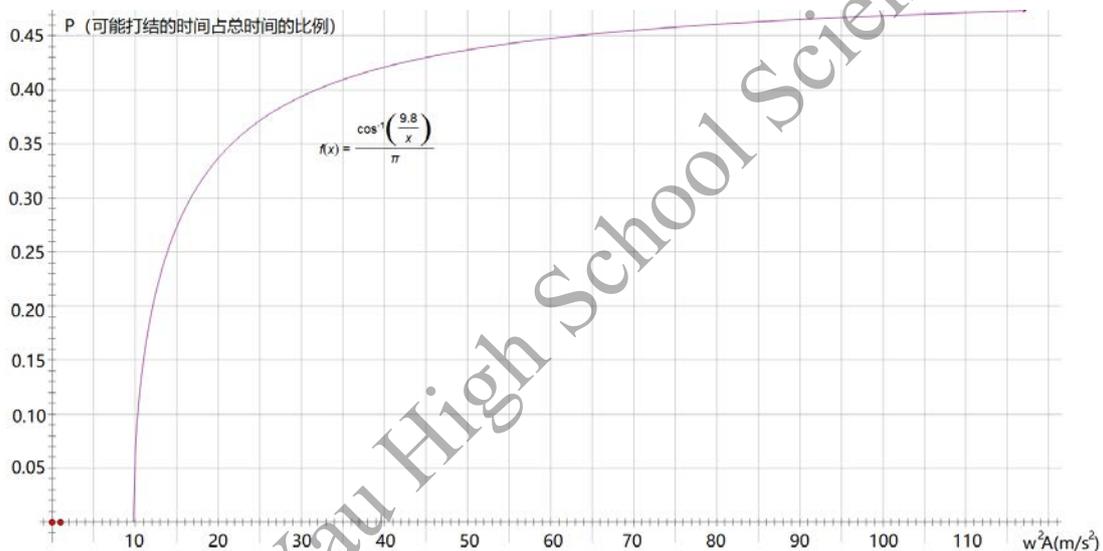


图 3.5  $P$  和  $\omega^2 A$  关系图

可以发现，一定频率下，振幅较小时，打结与振幅有关，振幅较大时，打结与振幅趋向于无关。

## 2. 振动（或转动）频率的影响——频率匹配条件

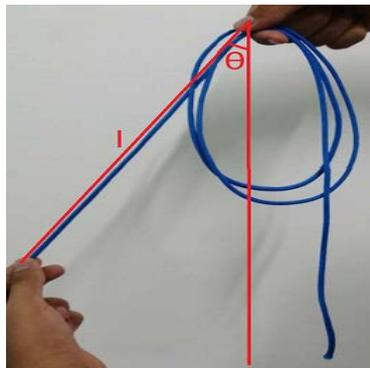


图 3.6 绳子自由端示意图

对于转动和振动，都需要自由端的摆动才可能会打结，所以以下分析对于两种运动方式都适用。如图 3.6 所示，设绳子先盘绕几圈，自由端长度为  $l$ ，线密度为  $\lambda$ ，若自由端进入绳圈内，则可以打结。

首先把绳子自由端当成复摆，估算摆动周期  $T$  与频率  $f_0$ ，公式如下：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} \quad (16)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}} \quad (17)$$

下面讨论打结与频率的关系。台面振动一次（或容器转动一周）就对自由端输入一次能量，周期由实验给定。而自由端振动一次的频率约为  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ ，

所以当台面振动频率远小于  $f_0$  时，很长时间才能输入一次能量，而打结的时间为  $T$ ，说明时间没有被利用。当台面振动频率逐渐变大后，有效利用的时间变多，打结概率增加。相反，当台面振动频率大于  $f_0$  时，会出现还没有足够的时间完成打结，又输入了一次能量的情况，这样自由端运动状态频繁突变，打结次数有可能减少。因此，振动及转动频率在  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}}$  附近最容易打结。

### 3.1.3 时间的影响

如图 3.7，设绳子很长，不存在打结数量的上限。除自由端外，盘绕成很多层。设振动时间为  $t$ ，角频率为  $\omega$ ，振动一次进入圈内的概率为  $p$ 。则振动次数为

$$n = \frac{\omega t}{2\pi} \quad (18)$$

我们仔细观察一次打结的过程：有两种方式打结：①自由端从上面到圈内，再从下方穿出；②自由端从下面到圈内，再从上方穿出。

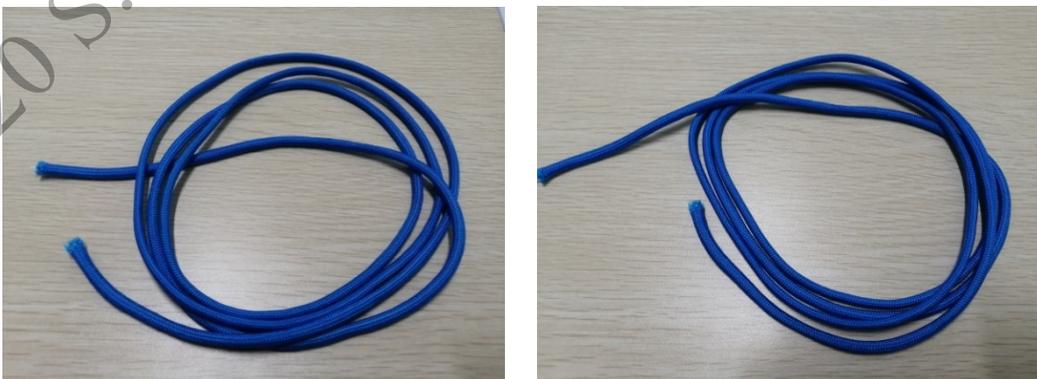


图 3.7 从上方穿过和从下方穿过的自由端

这两种方式都可以打结，但两者互为逆过程，最终数量应该是两个过程数量差的绝对值。我们可以设从上方穿过为1，下方穿过为-1，其他不打结的过程为0。

从上穿过为例，分析它的过程：自由端进入圈内，再在下方从圈外穿出，所以一次振动这种情况出现的概率为 $p(1-p)$ 。同理，得到从下方穿过的概率也为 $p(1-p)$ 。其他不打结的过程的概率为 $1-2p(1-p)=1-2p+2p^2$ 。则 $n$ 次振动每种情况的累计数量如表3.1所示。

表 3.1 各种情况的累计数量

| 情况            | 从上方穿过 (1) | 从下方穿过 (-1) | 不打结 (0)        |
|---------------|-----------|------------|----------------|
| 各个情况的累计数量 (x) | $np(1-p)$ | $np(1-p)$  | $n(1-2p+2p^2)$ |

设绳结数量（可正可负）的分布为正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

绳结数量的平均值和标准差为

$$\bar{x} = 0, \sigma = \sqrt{\frac{(np(1-p))^2 + (np(1-p))^2}{n}} = p(1-p)\sqrt{2n}。$$

不妨称实际分布为“假”三项式分布，因为还需将原来可正可负的分布取绝对值，即将左边的概率删去，将右边的概率加倍才是打结的真正概率分布。由以上分析绘制图3.8，图中下方曲线表示区分正负号的分布，上方曲线表示实际绳结数量的分布。

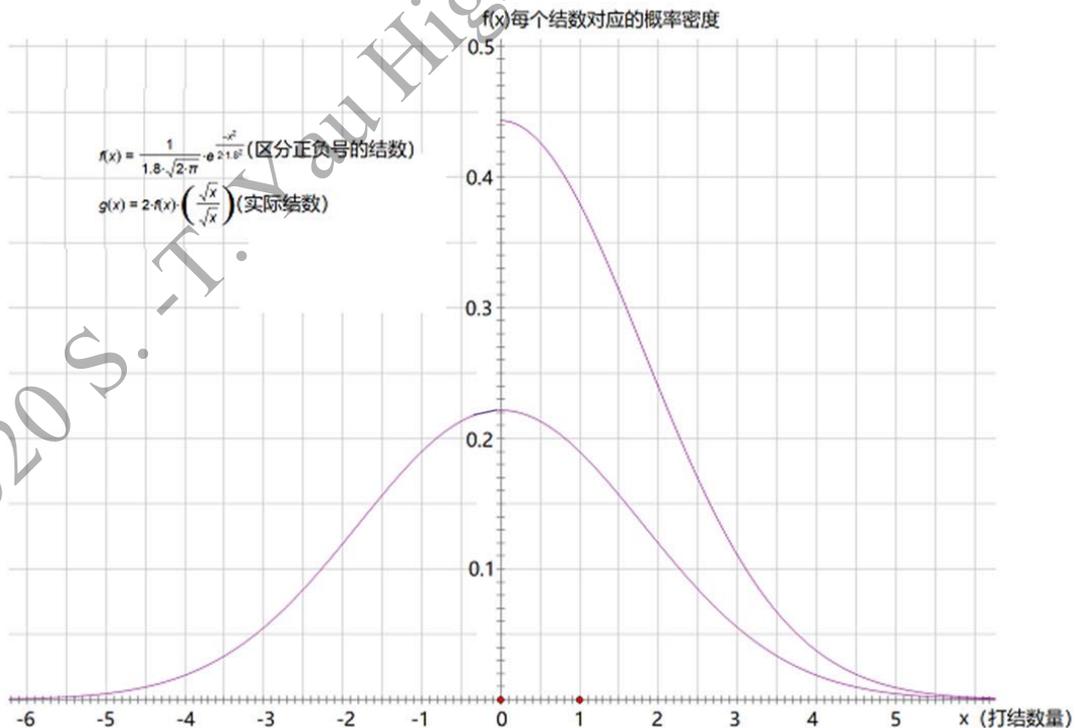


图 3.8 区分正负号的绳结数分布和实际结数分布

实际打结数量的分布函数为

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} & x = 0 \end{cases} \quad (20)$$

则绳结数量的平均值

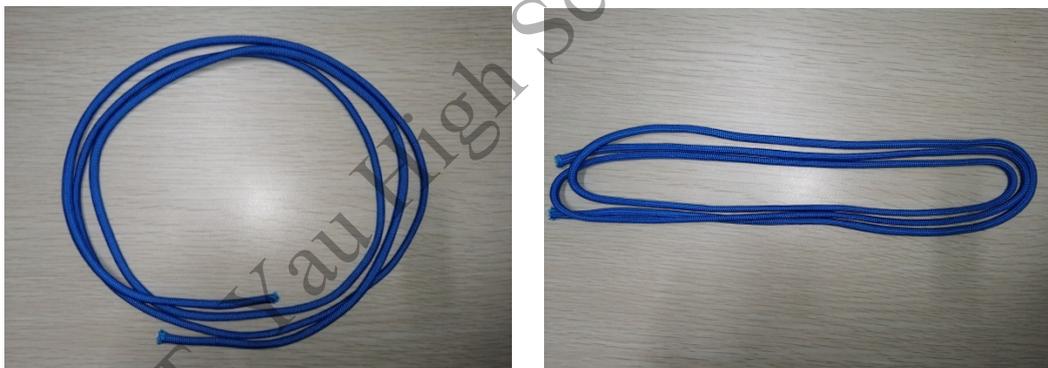
$$\bar{N} = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot x dx = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2p(1-p)}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{n} = \frac{2p(1-p)}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\omega t}{2\pi}} = \frac{\sqrt{2\omega p(1-p)}}{\pi} \cdot \sqrt{t} \quad (21)$$

可见，对于无限长的绳子，结的数量与 $\sqrt{t}$ 成正比。此式中的绳结数是考虑了解结后的净绳结数。

## 3.2 绳子的影响

### 3.2.1 盘绕方式的影响

如图 3.9 为两种不同盘绕方式的绳子。在绳长一定的情况下，圆的面积最大，所以自由端可以进入圆内部而打结的概率也最大，平行折线中间的面积小，打结的概率也减小，所以平行放置的打结概率较低。可以推测：盘绕成环形成的面积大，有利于打结。



盘绕成环

平行折线

图 3.9 两种不同盘绕方式的绳子

### 3.2.2 绳长的影响

设盘绕的半径为 $r$ ，总绳长为 $L$ ，桶的面积为 $S$ ，则进入某一个圈而打结的概率为 $p_A = \frac{\pi r^2}{S}$ 。盘绕圈数为 $n = \frac{L}{2\pi r}$ 。

设每个圈独立存在，打结的基础概率（与材料、频率、振动方式等因素相关）为 $P_0$ （常数），由实验给出，则不同绳长的打结概率为

$$P = \begin{cases} P_0(1 - (1 - p_A)^{\frac{L}{2\pi r} - 1}), & L > 2\pi r \\ 0, & L < 2\pi r \end{cases} \quad (22)$$

公式解释：钻入每个圈的概率是 $p_A$ ，所以不能钻入的概率是 $1 - p_A$ ，所以每

个圈都不钻入的概率是  $(1-p_A)^{n-1}$  (减 1 是减去自由端的长度), 从而至少钻入一个圈的概率是  $1-(1-p_A)^{n-1}$ 。如果以概率为纵轴、绳长为横轴作图像, 概率为一个有上限的指数函数, **绳子越长, 打结的概率越大。**

以  $P_0 = 0.6$ ,  $r = 4\text{cm}$ ,  $p_A = 0.4$  为例, 在  $L = 8\pi\text{cm}$  之前, 由于绳长不到一圈, 绳子无法打结。打结概率与绳长的关系曲线如图 3.10 所示。

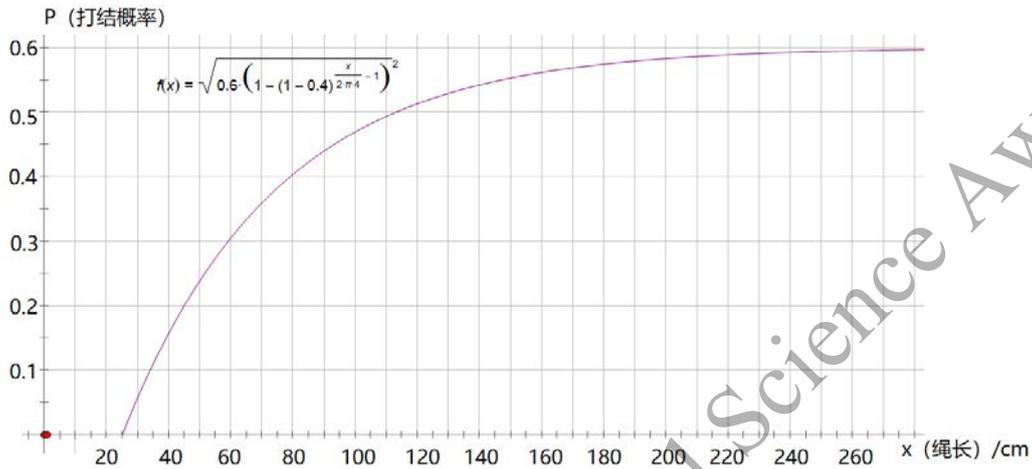


图 3.10 打结概率与绳长的关系曲线

### 3.2.3 绳子材料的影响

#### 1. 摩擦系数的影响

由于不考虑绳子的互相接触, 振动打结与摩擦关系不大, 所以摩擦系数主要影响的运动是转动。摩擦主要影响绳子能否跟随圆筒转上去, 真正绳子掉落打结的部分也与摩擦无关。摩擦系数的范围的推导也包含在 3.1.1 中。从公式中可以看出, 摩擦系数的范围与桶的转速和半径都有关。

#### 2. 恢复系数的影响

实验观察中发现, 在**竖直转动时**, 上方的绳子掉落后与下方圆筒发生碰撞, 当**恢复系数大时**, 绳子更容易弹起, 形成空间形态, **有利于打结**。否则绳子一直在桶壁附近上升、下滑, 无法打结。而在**振动时**, 打结并不依赖于碰撞, 而是跳起(失重)占主导因素, 所以**恢复系数与打结无关**。

#### 3. 刚度的影响

刚度大的东西不容易打结, 因为打结需要绳子的盘绕, 而**刚度小的物体**(如棉线) 形变能量更低, 所以**更容易打结**。这也符合生活经验上(一根棍子当然不会打结)。但实际进行实验时, 绳子的刚度、恢复系数、摩擦系数往往同时改变, 因此实验结果需要具体分析。

#### 4. 密度的影响

理想的打结过程与密度无关, 以上理论公式也都不包含密度。但实际情况中, 容器的质量并不是趋于无穷大, 所以容器会吸收一部分能量, 因此绳子的**密度越**

大相对能量输入就较小，从而跳起振幅减小，所以打结会变少。

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 四、振动实验

为了定量探究绳子在振动过程中的打结情况，我们尝试了一些实验方案，早期的几种装置都没有成功，见附录 2。最后制作了如图 4.1 的振动实验装置，探究了振动（方式、振幅、频率、振动时间）以及绳子初始状态、绳长、材质对打结的影响，最后还探究了打结和解结的过程。

实验器材如图 4.1 所示，由电机（ZX-42GA775F-6500）与塑料盒（13.5cm × 13.5cm × 21cm）组成，将装置平放可以使绳子在盒中水平振动，将装置竖起来可以使绳子在盒中竖直振动。

实验还使用了以下六种绳子，相关参数如下表：

表 4.1 振动实验使用的六种绳子

| 绳子类型         | 线密度 g/m |
|--------------|---------|
| 直径 1mm 金属软链  | 1.9     |
| 直径 2mm 金属软链  | 4.2     |
| 棉线           | 4.0     |
| 0 芯尼龙线（抽掉线芯） | 2.8     |
| 9 芯尼龙线       | 4.8     |
| 导线           | 5.9     |



图 4.1 振动实验装置

### 4.1 振动参数的影响

#### 4.1.1 绳结个数与振动方向的关系

绳子的初始状态：盘绕成环，材质：9 芯尼龙绳，长度 1m，振动频率 2.9Hz，振幅 12cm，振动时间 60s，结果如图 4.2 所示。图中数据是 5 次实验的平均值，每次振动停止后把绳子取出来数绳结数量。数据见附录 1。

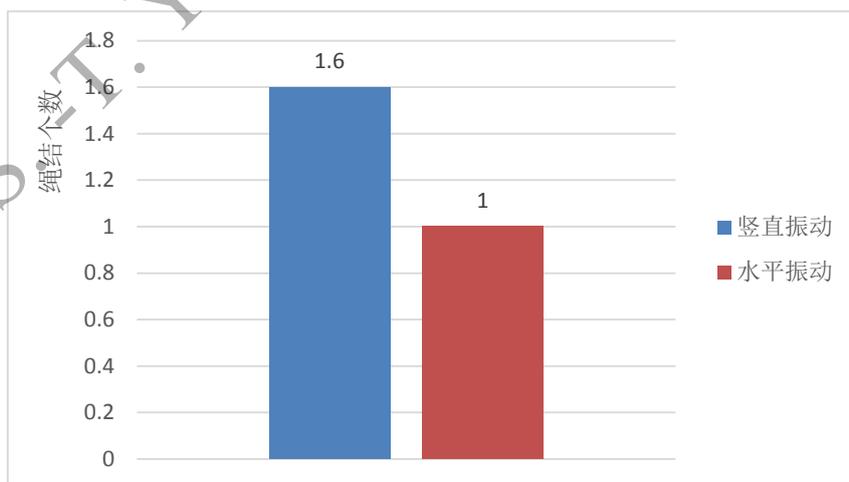


图 4.2 振动方式对绳结个数的影响

实验表明，竖直振动打结数量大于水平振动，与 3.1.2 的理论分析相符合。

### 4.1.2 绳结个数与振幅的关系

振动方式：竖直振动，绳子的初始状态：盘绕成环，材质：9 芯尼龙绳，长度 1m，振动频率 2.9Hz，振动时间 60s，结果如图 4.3 所示。图中数据是 5 次实验的平均值，数据见附录 1。

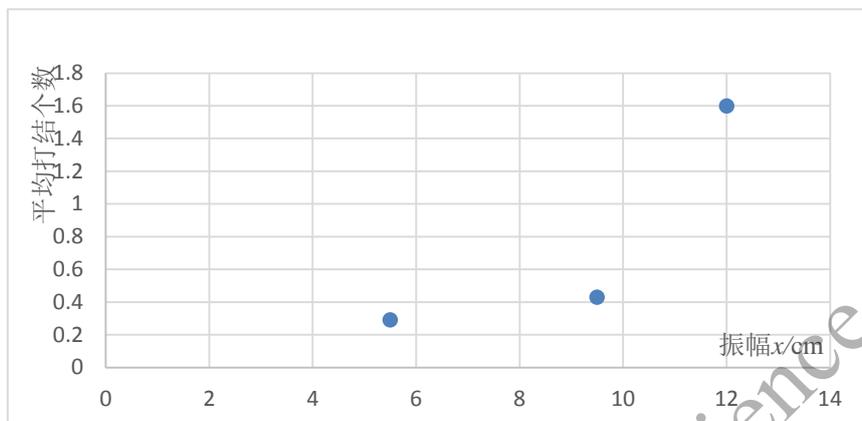


图 4.3 绳结个数与振幅关系图

可以看出随着振幅增加，平均打结个数随之增大，与理论 3.1.2 一致。由于器材限制，无法进一步验证振幅足够大时，打结个数是否达到饱和。

### 4.1.3 绳结个数与振动频率的关系

振动方式：竖直振动，绳子的初始状态：盘绕成环，材质：9 芯尼龙绳，长度 1m，振幅 12cm，振动时间 60s，结果如图 4.4 所示。图中数据是 5 次实验的平均值，数据见附录 1。

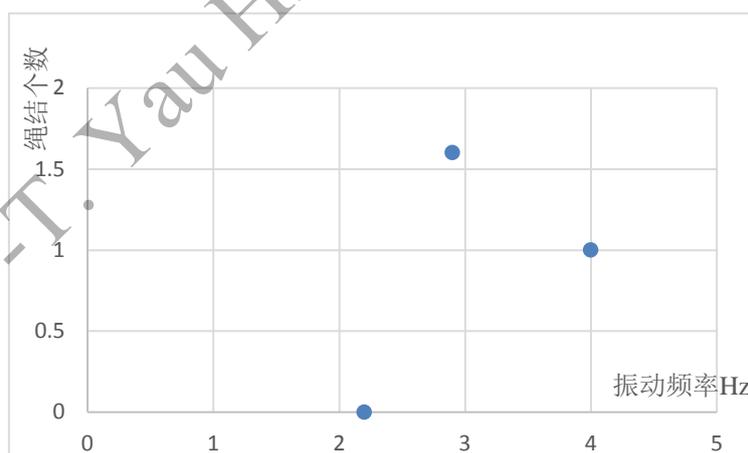


图 4.4 绳结个数与振动频率的关系

在这种情况下，估算绳子自由端摆动周期  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}} = 3.42\text{Hz}$ ，此处  $l$  取绳子盘绕成环的半径 3cm。由图可知，实验中当振动频率过小时，绳子不打结。当振动频率 3Hz 附近时，绳子打结个数最多。当振动频率继续加大时，绳结个数减少，可知打结最优的频率约为 3Hz，与理论公式相符。

#### 4.1.4 绳结个数与振动时间的关系

振动方式：竖直振动，绳子的初始状态：盘绕成环，材质：9 芯尼龙绳，长度 1m，振动频率 2.9Hz，振幅 12cm，结合公式 (21) 和实验数据得到图 4.5 所示。图中数据是 5 次实验的平均值，数据见附录 1。

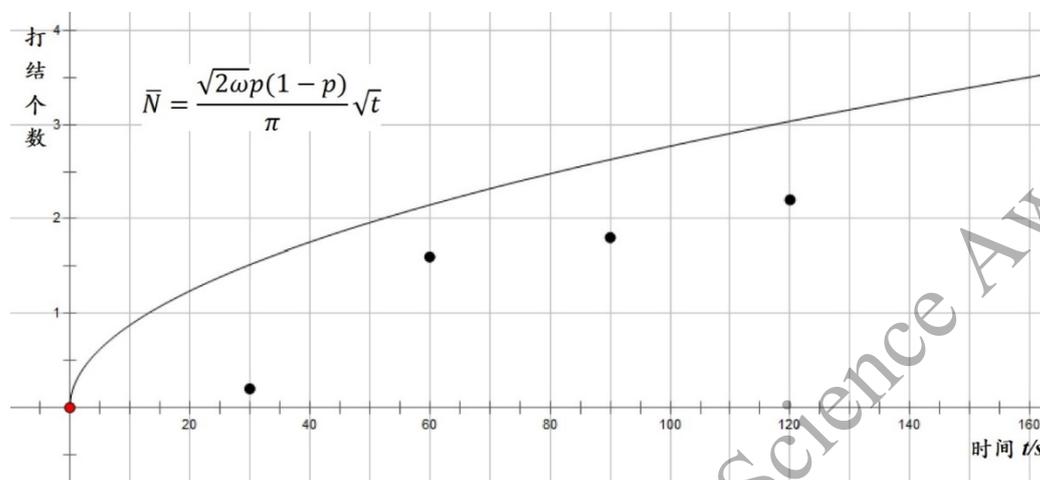


图 4.5 绳结个数与振动时间关系的理论（曲线）与实验（数据点）结果

由此看出随着时间变长，打结个数也相应增加，其增长速率趋势与理论 3.1.3 相符。实验上绳结个数较理论值较小，原因是理论考虑的是无穷长的绳子。

## 4.2 绳子的影响

### 4.2.1 绳结个数与盘绕方式的关系

振动方式：竖直振动，材质：9 芯尼龙绳，长度 1m，振动频率 2.9Hz，振幅 12cm，振动时间 60s，结果如图 4.6 所示。图中数据是 5 次实验的平均值，数据见附录 1。

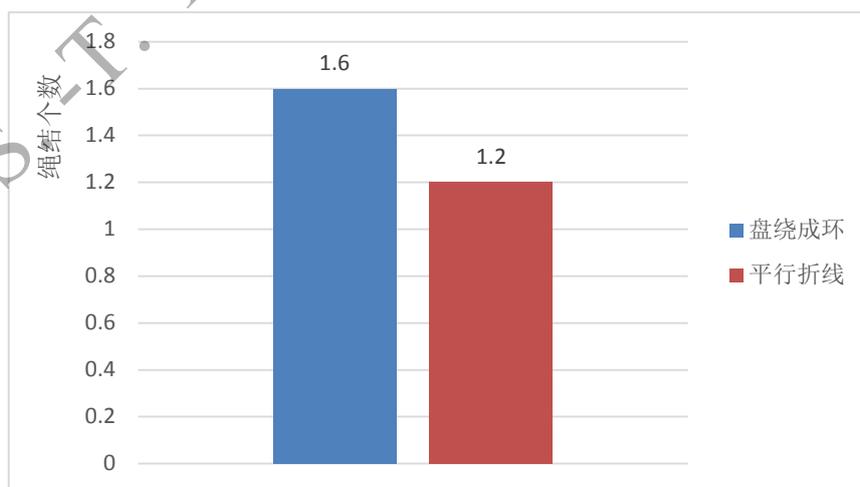


图 4.6 盘绕方式对绳结个数的影响

盘绕成环比平行折线可用于打结的面积更大，实验与 3.2.1 的理论预期相符。

## 4.2.2 打结概率与绳子长度的关系

振动方式：竖直振动，绳子的初始状态：盘绕成环，材质：9 芯尼龙绳，振幅 12cm，振动频率 2.9Hz，振动时间 60s，结果如图 4.7，曲线表示理论预测打结概率（公式（22）），蓝点表示实验中不同长度下打结的概率。图中数据是 5 次实验获得的数据，数据见附录 1。

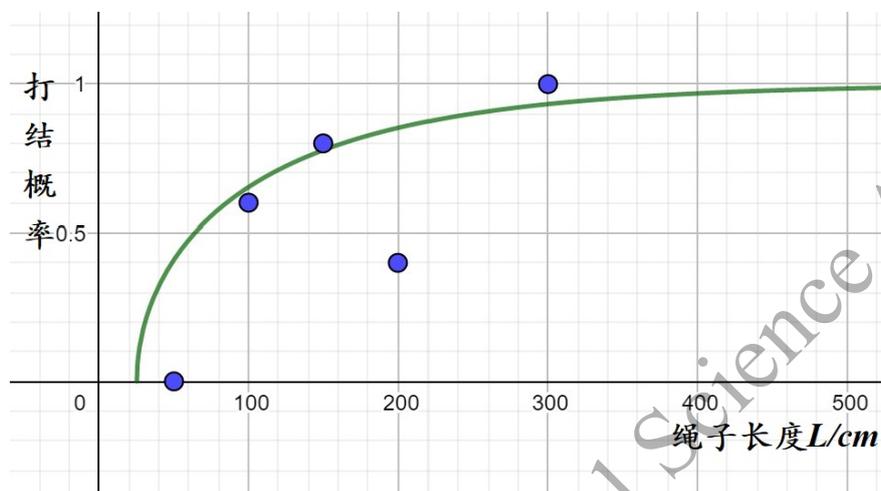


图 4.7 打结概率与绳长关系的理论（曲线）和实验（数据点）结果

从图 4.7 可以看出，随着绳子长度增加，平均打结概率也增大，这和 3.2.2 的理论分析是相符的。图中长度为 2m 的点偏差较大，在实验中发现绳子为 2m 时会整体卡在容器中，从而影响打结。另外，理论公式未考虑绳子占据的体积和它的刚度。

## 4.2.3 绳结个数与绳子材质的关系

我们测量了绳子的线密度，见表 4.1。此外，还定性地考察绳子的刚度。绳子刚度排序见图 4.8。通过绳子与竖直方向所成的夹角来判断刚度的大小。由软到硬分别为金属链、0 芯尼龙线、棉线、9 芯尼龙线、导线。



图 4.8 按刚度排序的绳子

振动方式: 竖直振动, 绳子的初始状态: 盘绕成环, 长度 1m, 振动频率 2.9Hz, 振动时间 60s, 振幅 12cm, 结果如图 4.9 (线密度), 图 4.10 (刚度)。图中数据是 5 次实验的平均值, 数据见附录 1。

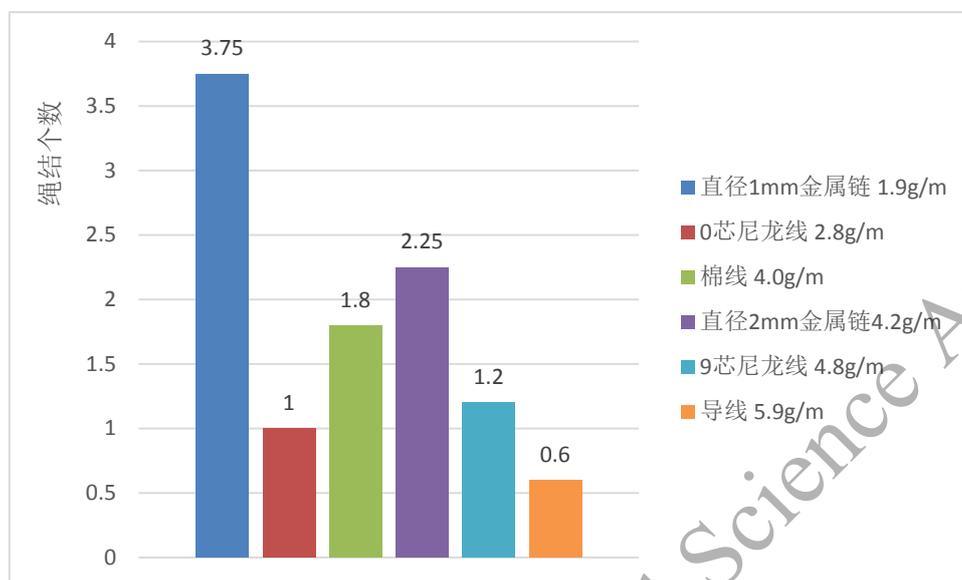


图 4.9 线密度对绳结个数的影响 (密度从小到大)

由图 4.9 可以知道, 总的趋势是线密度越小越容易打结, 与 3.2.3 理论分析符合。

两个反例是, 棉线线密度比直径 2mm 金属链小, 打结个数更小, 可能因为直径 2mm 金属链刚度比棉线更小。另一个例子是 0 芯尼龙线, 它是空心的, 结构与其他绳子不同, 有待进一步研究。

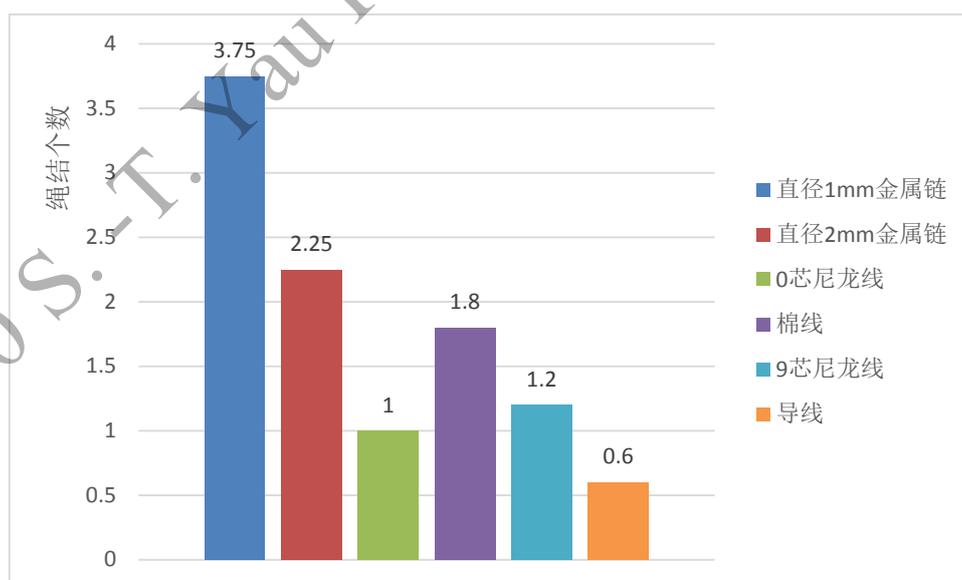


图 4.10 刚度对绳结个数的影响 (刚度从小到大)

由图 4.10 可以知道, 刚度越小越容易打结, 这与 3.2.3 的分析相符。0 芯尼龙线因为它是空心的, 结构与其他绳子不同, 有待进一步研究。

#### 4.2.4 绳结的打结与解结

表 4.2 以及图 4.11 是研究绳子的打结与解结和振动时间的关系。我们做了五组实验，实验中，每过 60s 就把电机停下来，数一下绳结的个数再重新启动，这样就可以观察到绳结的动态变化。实验发现，绳结增加、减少与不变的情况都存在，五组实验的具体情况见表 4.2。

表 4.2 绳结的打结与解结情况

| 绳子材质               | 振动时间 |      |      |      |      |      |      | 绳子的打结与解结        |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|-----------------|
|                    | 60s  | 120s | 180s | 240s | 300s | 360s | 420s |                 |
| 长 1m, 9 芯尼龙线, 5g/m | 0    | 0    | 1    | 0    |      |      |      | 先打结然后解结         |
|                    | 1    | 1    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 最终打结解结速率相同 (死结) |
|                    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |      |      | 未打结             |
|                    | 0    | 2    | 1    | 1    | 0    |      |      | 先打结然后解结         |
|                    | 1    | 0    | 2    |      |      |      |      | 打结解结后再打结        |

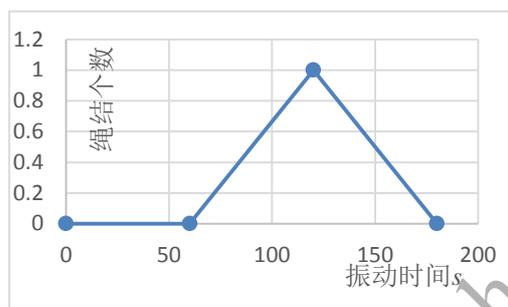


图 4.11a

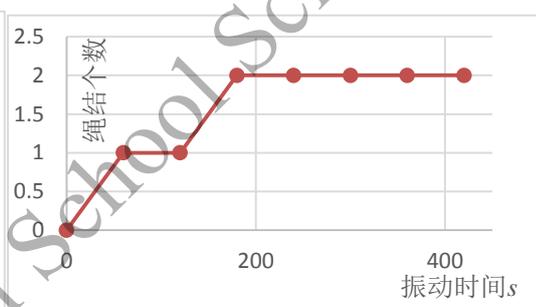


图 4.11b



图 4.11c

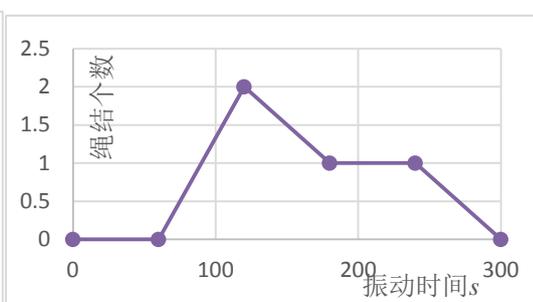


图 4.11d

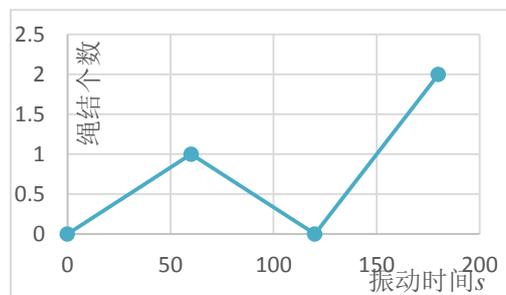


图 4.11e

图 4.11 绳子打结与解结的动态过程

## 五、转动实验

本实验目的是为了研究转动时各种条件下线绳打结的特性。为了分析和验证绳子放在转动容器中的打结情况，我们自己制作了转动实验装置，探究不同转动频率以及转动时间下的绳子打结特性；探究绳长、绳子盘绕方式、绳子材质、配重对打结概率和绳结数目的影响；还考虑了打结的可逆性，验证实验装置尺寸的影响。

### 实验器材

在转动实验中，我们制作了两套转动实验装置。它们的主要区别是容器尺寸的大小。

#### 1. 转动实验装置-1

装置介绍：直径 24cm、高 50cm 的圆柱形的纯净水桶；25W 齿轮调速电机套装（4RK25GN-C 减速机+调速器 US-52）：电压 220V，最大转速 166rpm；铁质和木质支架。该装置实物图片如图 5.1a 所示。



图 5.1a 转动实验装置-1

#### 2. 转动实验装置-2

装置介绍：直径 17cm、高 28cm 的圆柱形纯净水桶；15W 齿轮调速电机套装（3RK15GN-C 减速机+调速器）：电压 220V，最大转速 166rpm；铁质和木质支架。该装置实物图片如图 5.1b 所示。



图 5.1b 转动实验装置-2

### 3. 不同材质的绳子

我们运用不同材质的绳子进行实验。用于实验的绳子包括：橡皮绳、铜芯导线、尼龙绳、棉线、耳机线（两端带耳塞）、耳机线（两端不带耳塞）。不同材质的绳子实物图片如图 5.2 所示。



图 5.2a 橡皮绳



图 5.2b 铜芯导线



图 5.2c 尼龙绳



图 5.2d 棉线



图 5.2e 带耳塞的耳机线



图 5.2f 不带耳塞的耳机线

图 5.2 各种材质的绳子

### 5.1 转动参数的影响

我们使用转动实验装置-1 探究转动时间和转动频率对打结概率和绳结个数的影响。以下图中的每个数据都是重复 10 次实验的结果。

#### 5.1.1. 转动时间对绳结个数的影响

选取铜芯导线做实验，探究了打结概率与转动时间、平均绳结数与转动时间的关系。实验中绳长为 200cm，转动频率固定为 60rpm，绳子的盘绕方式为盘绕成环。实验结果如图 5.3 所示。

实验表明：当转动时间增加时，绳打结的概率也会增加，当  $80s \geq \text{转动时间} \geq 40s$  时，打结的概率基本稳定在 40-50% 左右。当转动时间  $> 80s$  时，打结概率和数量减小。然而，由 3.1.3 的结论可知打结数量与  $\sqrt{t}$  成正比。因为理论考虑的是无限长的绳子，而实验中有效的绳长在减小，解结更容易发生，故绳结数量在达到一定的数值后会减小。

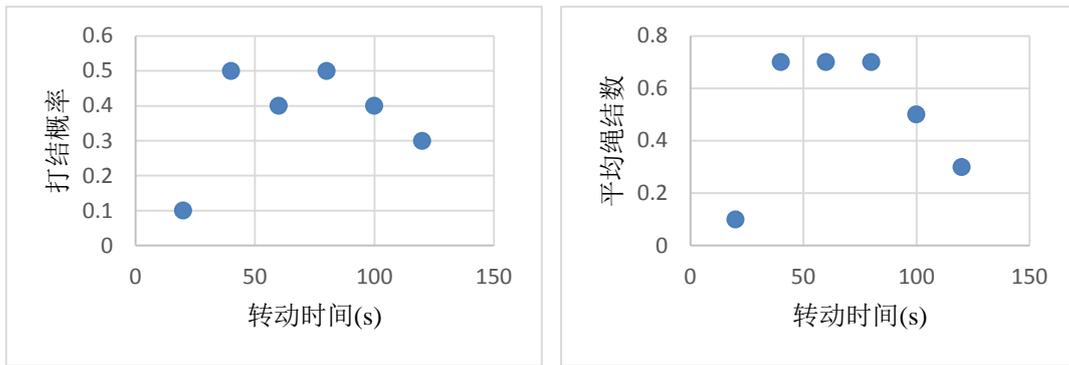


图 5.3 转动时间对打结概率、平均绳结数的影响

### 5.1.2 转动频率对绳结个数的影响

选取铜芯导线做实验，探究了打结概率与转动频率、平均绳结数与转动频率的关系。绳长为 200cm，转动时间固定为 60s，绳子的盘绕方式为盘绕成环。实验数据如图 5.4 所示，从实验结果可以看出，随着转动频率的增加，打结的概率逐渐增大，当转动频率为 80rpm(1.33Hz)时达到最大值，然后随着转动频率的增加，打结概率逐渐减小。

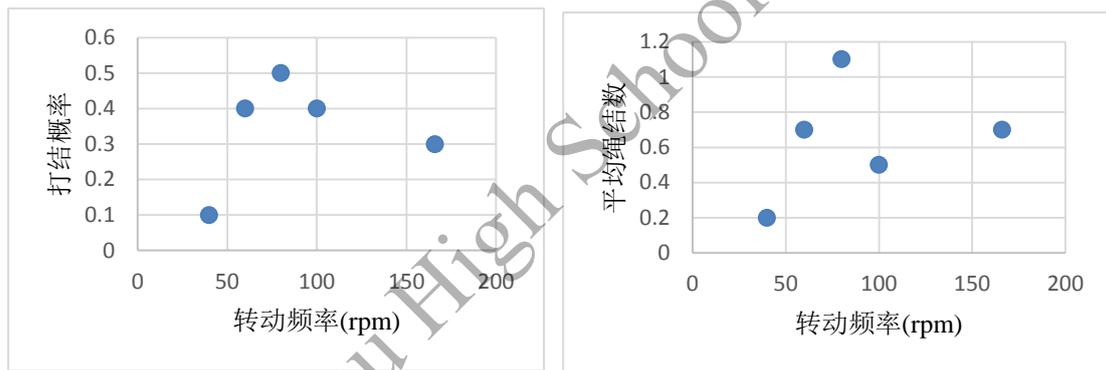


图 5.4 转动频率对打结概率、平均绳结数的影响

从实验结果看到，转动频率对打结概率和平均绳结数的影响趋势与理论相符合。我们取自由端的长度为 0.15m， $g=9.8\text{m/s}^2$  代入公式 (17) 计算得到使得打结概率最大的最优频率为 1.59Hz，实验获得的最优转动频率为 1.33Hz，与理论符合较好。

## 5.2 绳子参数的影响

### 5.2.1 绳子盘绕方式对绳结个数的影响

仍然选取铜芯导线在转动实验装置-1 中做实验，探究绳结个数与绳子盘绕方式的关系。绳子的初始盘绕方式有盘绕成环和平行折线两种状态，实验过程中固定绳长度为 200cm、转动时间为 60s、转动频率为 60rpm。实验数据如图 5.5 所示，从实验结果可以看出，当绳子的初始状态为盘绕成环时，其打结概率与平均绳结数略优于平行折线，与理论分析一致。

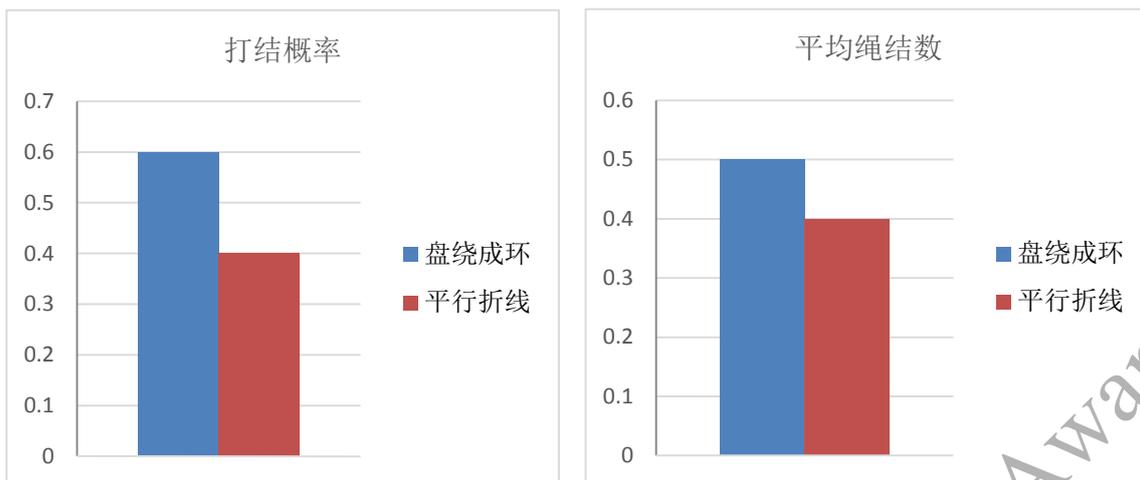


图 5.5 绳子初始条件对打结概率、平均绳结数的影响

### 5.2.2 摩擦系数的测量

如图 5.6，我们采用绕绳法测量了六种绳子的摩擦系数。摩擦系数的结果见表 5.1。



图 5.6 测量绳子的摩擦系数

绳子与纯净水桶之间摩擦系数的测量原理如下。

将绳子绕在半径为  $R$  的圆筒外侧，研究张角为  $d\alpha$  的一小段绳子，受力如图 5.7 所示。

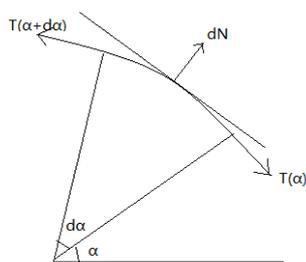


图 5.7 绳子受力分析

写出切向和法向的受力平衡方程

$$dN = T(\alpha + d\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{2} + T(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{2} = T(\alpha)d\alpha$$

$$f = \mu dN = T(\alpha + d\alpha) - T(\alpha) = dT(\alpha)$$

两式联立，消去  $dN$  得

$$\mu T(\alpha)d\alpha = dT(\alpha)$$

$$\mu d\alpha = \frac{dT(\alpha)}{T(\alpha)}$$

积分得

$$\ln \frac{T(\alpha)}{T(0)} = \mu\alpha$$

$$T(\alpha) = T(0)e^{\mu\alpha}$$

我们在实验中特别选用了内外材质相同的圆桶，这样方便测量摩擦力。如图 5.6，将一根绳子绕桶半圈，在绳子右端施加一个力，拉左端直到微微拉动，测量左端与右端的力。代入上式中

$$T(\pi) = T(0)e^{\mu\pi}$$

则可以计算得到摩擦系数为

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \frac{T(\pi)}{T(0)}$$

### 5.2.3 绳子材质对绳结个数的影响

#### 1. 摩擦系数

##### a. 使用转动实验装置-1 的实验数据

表 5.1 不同材质绳子的实验结果

|      | 材质           | 摩擦系数  | 绳长    | 转动频率   | 转动时间 | 平均绳结数    |
|------|--------------|-------|-------|--------|------|----------|
| 绳子 1 | 铜芯导线         | 0.175 | 200cm | 120rpm | 60s  | 0.8 (打结) |
| 绳子 2 | 橡皮绳          | 0.364 | 250cm | 120rpm | 60s  | 0.1 (打结) |
| 绳子 3 | 尼龙绳          | 0.046 | 200cm | 120rpm | 60s  | 0 (不打)   |
| 绳子 4 | 棉线           | 0.107 | 200cm | 120rpm | 60s  | 0 (不打)   |
| 绳子 5 | 耳机线 (两边带耳塞)  | 0.187 | 120cm | 120rpm | 60s  | 0.3 (打结) |
| 绳子 6 | 耳机线 (两边不带耳塞) | 0.187 | 110cm | 120rpm | 60s  | 0 (不打)   |

实验观察中发现，不能打结的情况都是绳子停留在桶的下方，无法上升的情况，因此主要与摩擦系数相关。实验中采用了六种绳子。从表 5.1 可以看出，比较绳子 1-4 可以发现，绳子 1、2 摩擦系数大的两种绳子能成功打结。比较绳子 5、6 可以发现带耳塞（有配重）的绳子更容易打结。

当转速为 120rpm 时，我们将  $R=0.12\text{m}$ ， $\omega=4\pi\text{rad/s}$ ， $g=9.8\text{m/s}^2$  代入，计算得到  $\omega^2 R/g = 1.93$ ，由 3.1.1 节可知摩擦系数的条件应满足

$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4g^2}{\omega^4 R^2}-1} < \mu < \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4 R^2-g^2}}$ ，计算得到摩擦系数的范围是  $0.088 < \mu < 0.604$ 。实

验中打结的绳子都满足此范围。由于绳子不是质点，实际打结的条件比公式给出的更为严格。

## b. 使用转动实验装置-2 的实验数据

表 5.2 不同材质绳子的实验结果

|      | 材质           | 绳长    | 转动频率   | 转动时间 | 平均绳结数    |
|------|--------------|-------|--------|------|----------|
| 绳子 1 | 铜芯导线         | 200cm | 120rpm | 60s  | 0        |
| 绳子 2 | 橡皮绳          | 250cm | 120rpm | 60s  | 0.3 (打结) |
| 绳子 3 | 尼龙绳          | 200cm | 120rpm | 60s  | 0        |
| 绳子 4 | 棉线           | 200cm | 120rpm | 60s  | 0        |
| 绳子 5 | 耳机线 (两边带耳塞)  | 120cm | 120rpm | 60s  | 0.4 (打结) |
| 绳子 6 | 耳机线 (两边不带耳塞) | 110cm | 120rpm | 60s  | 0        |

在将各种材质的绳子放入小桶中实验时，发现只有橡皮绳以及两边带耳塞的耳机线会打结，其他材质的绳子都不会打结。我们将  $R=0.085\text{m}$ ， $\omega=4\pi\text{ rad/s}$ ， $g=9.8\text{m/s}^2$  代入，计算得到  $\omega^2 R/g=1.37$ ，按照 3.1.1 中公式 (12)，桶的半径越小，摩擦系数的上下界同时变大，即桶的半径越小，能打结的绳子摩擦系数更大，计算得到摩擦系数的范围是  $0.355 < \mu < 1.068$ ，小桶中能打结的橡皮绳摩擦系数符合该范围。两边带耳塞的耳机线（有配重）也能成功打结。

## 2. 恢复系数

在转动实验中我们还观察到，绳子落下后发生反弹是打结的有利条件。所以恢复系数大有利于打结。

### 5.2.4 绳长对绳结个数的影响

选取铜芯导线在转动实验装置-1 中做实验，探究了打结概率与绳长、平均绳结数与绳长的关系。转动时间为 60s，转动频率固定为 60rpm，绳子的盘绕方式为盘绕成环。实验数据如图 5.8 所示，从实验结果可以看出，对于铜芯导线，当绳长为 1m、1.3m、1.4m 时，绳子的打结概率为 0，即当绳长小于 1.45m 时，绳子不会打结；当绳长  $\geq 1.45\text{m}$  时，绳子开始打结，绳子越长，打结的概率越大。

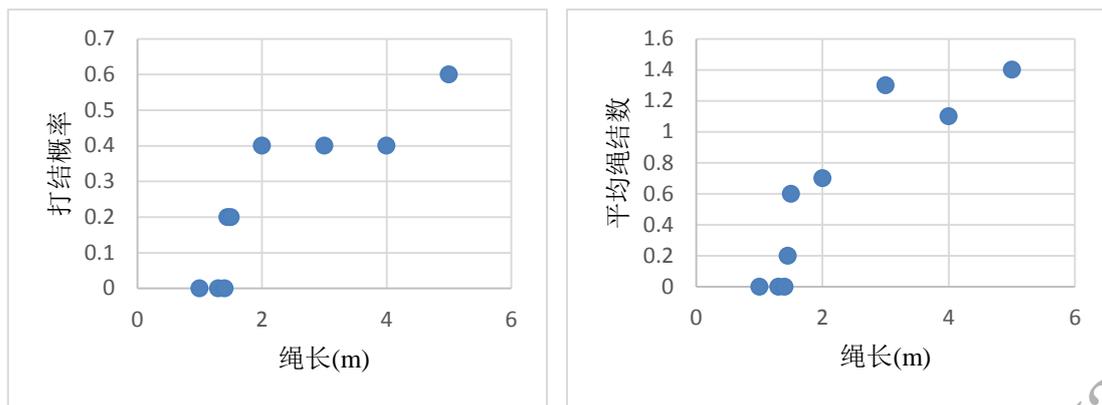


图 5.8 绳长对打结概率、平均绳结数的影响

将  $r=0.1\text{m}$ ,  $S=0.045\text{m}^2$ ,  $P_0=0.6$  代入公式 (22), 理论计算得到打结概率如图 5.9。当绳长大于临界值时, 绳子能够打结, 并且绳子越长, 打结的概率越大。

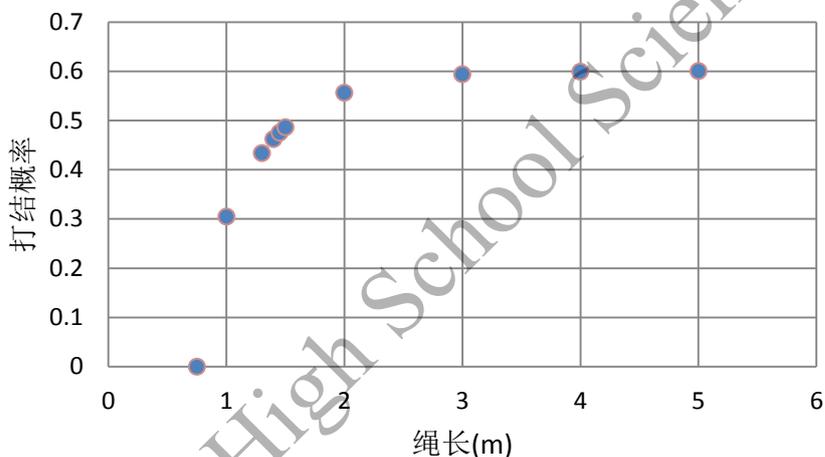


图 5.9 打结概率随绳长的变化 (理论值)

### 5.2.5 配重对绳结个数的影响

因为实际的耳机带有耳塞, 相当于导线加配重。我们以螺母当作配重, 研究其影响, 所用螺母的质量为 1.0 克。

首先选取长度为 200cm 的铜芯导线在转动实验装置-1 中进行实验, 当固定转动频率为 80rpm, 转动时间为 60s 时, 在导线两端分别固定 1~3 对螺母时, 观察绳结数目。实验数据如图 5.10 所示, 图中螺母是两端螺母的总数。可以看出: 增加螺母后打结概率增加, 两端各增加一个螺母时, 打结概率最大, 但是增加的螺母更多时, 打结概率和数目反而降低。

接着我们使用长度为 110cm 的不带耳塞的耳机线进行实验, 在转动频率为 80rpm、转动时间为 60s 时, 记录两边各加不同数量的螺母时的平均绳结数目, 实验发现当不带耳塞的耳机线增加 3 对螺母时, 平均绳结数目最大。我们也使用长度为 200cm 的尼龙绳进行了实验, 发现无论增加几个螺母, 尼龙绳都不打结。

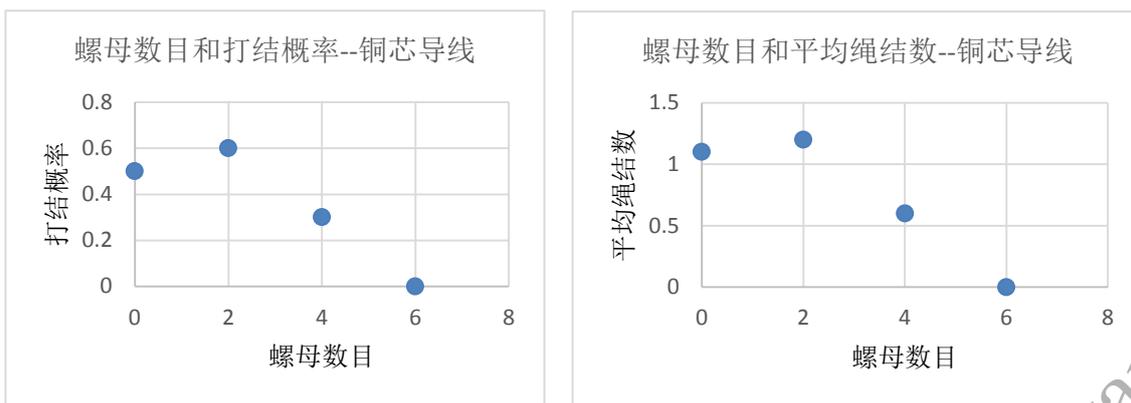


图 5.10 加配重对铜芯导线打结概率和平均绳结数的影响

以上实验说明适当的配重有可能增加打结概率。绳子打结成功是因为在转动过程中，绳子的各个部分都受到惯性离心力的作用，绳圈部分会趋向于被拆散，进入圈内的绳头有可能使结拉紧，只有在绳头惯性足够大的时候，才能反抗绳圈散开的趋势，有利于打结，所以适当的配重会增加打结的概率。如果配重过大，转桶无法带动配重，导致无法打结。

## 5.3 讨论

### 5.3.1 打结的可逆性

我们分别选取 200cm 铜芯导线、110cm 不带耳塞的耳机线、120cm 带耳塞的耳机线、200cm 棉线和 200cm 的尼龙绳在转动实验装置-1 中做实验，将已经打了结的绳子作为初始状态，探究绳结的可逆性。

将已经打了一定数量结的绳子放到桶内，接着转动 60s，在改变初始绳结个数、转动频率的条件下，观察不同材质绳子的最终绳结个数。这里我们定义解结率：

$$\text{解结率} = \frac{\text{绳结减少个数}}{\text{实验次数}}$$

图 5.11 是初始与最终绳结个数随时间的变化。从图中可以看出，对于铜芯导线，已经打结的绳子放在桶内转动，仍然继续打结，在转动频率为 60rpm 和 120rpm 时平均解结率分别为 -0.3 和 -1.2，说明转动频率越大，继续打结的数目越多。

对于不带耳塞的耳机线，打了结后放在桶内转动时，会解结，解结率为正值，当转动频率为 80rpm 时，解结率为 2.2，说明不带耳塞的耳机线容易解结，不容易打结。

带耳塞的耳机线，打了结后放在桶内继续转动，仍然会继续打结，转动频率为 80rpm 时，解结率为 -1.4，说明带耳塞的耳机线更容易打结。

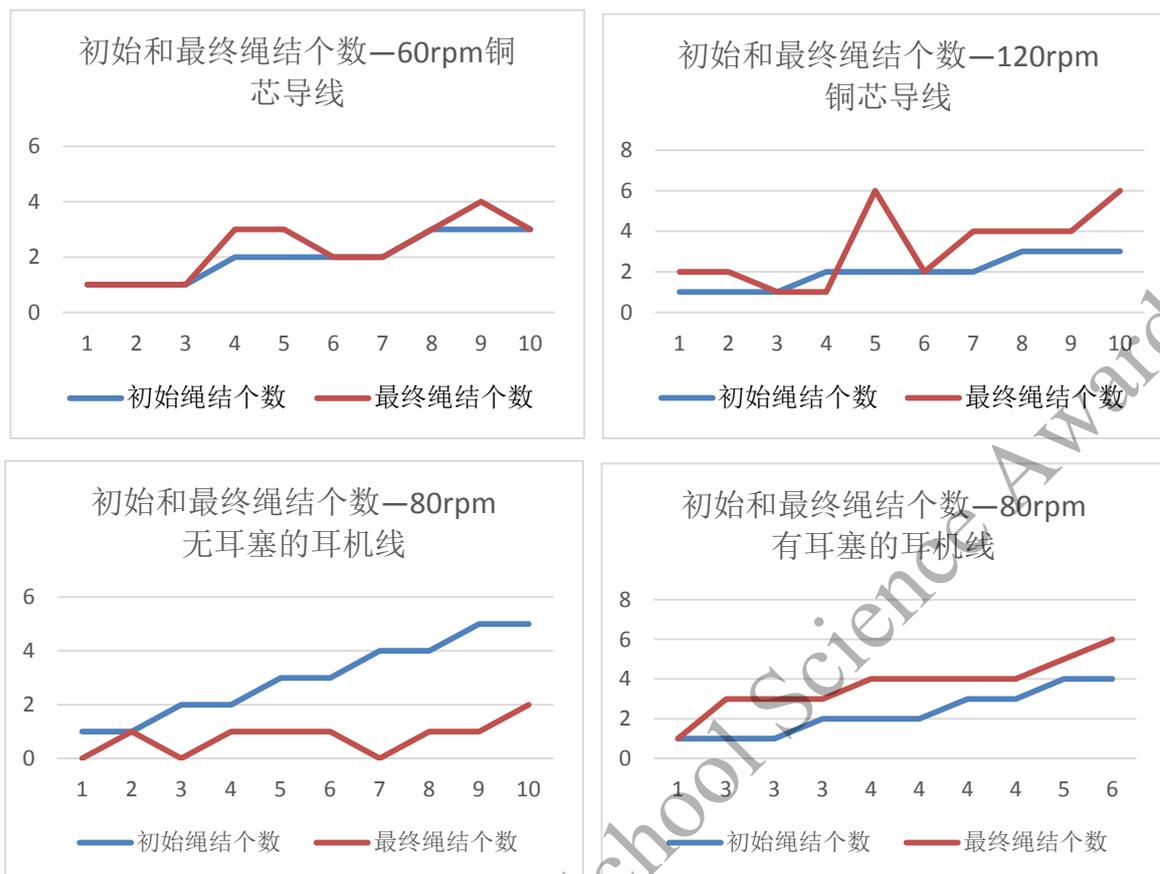


图 5.11 初始和最终绳结个数

对于打了结的尼龙绳和棉线，由于绳子放在桶内贴在桶壁不随桶转动，所以既不会继续打结也不会解结，解结率为零，这里没有画图。

### 5.3.2 转动容器的尺寸与形状的影响

我们选取 250cm 长的橡皮绳做实验，分别使用转动实验装置-1（大桶）和转动实验装置-2（小桶），在改变转动频率和转动时间的条件下，记录打结概率和平均绳结数，实验结果如图 5.12 和图 5.13 所示。

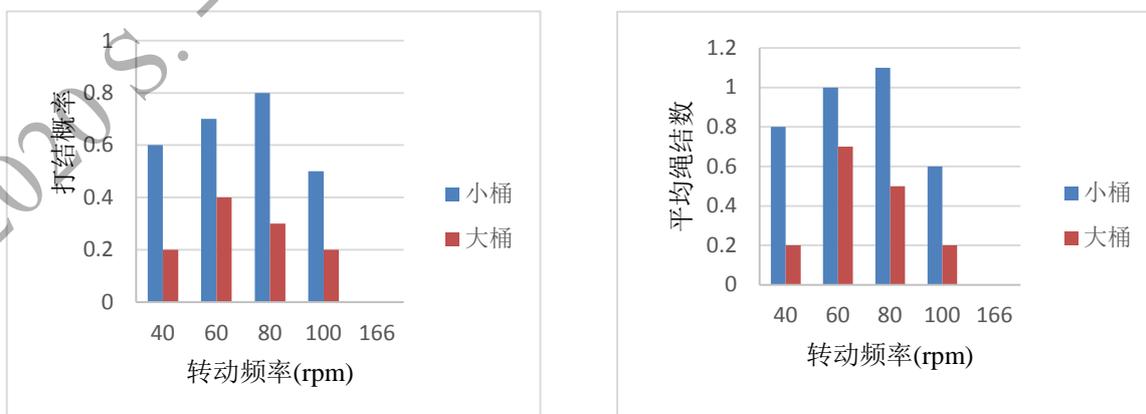


图 5.12 不同桶尺寸下转动频率与打结概率、平均绳结数的关系

从实验结果可以看出，无论是使用大桶还是小桶进行实验，打结概率和平均

绳结数曲线变化趋势相似。在探究转动频率的影响实验中，转动时间固定为 60s，绳子的盘绕方式为盘绕成环。在小桶实验中，使打结概率和平均绳结数达到最大值的转动频率为 80rpm；而在大桶实验中，该转动频率为 60rpm。小桶更容易打结，但是达到最大概率的转速更高。

在探究转动时间的影响实验中，转动频率固定为 60rpm，绳子的盘绕方式为盘绕成环。在小桶实验中，当转动时间为 60s 时，打结概率和平均绳结数达到最大值；在大桶实验中，该转动时间为 40s。

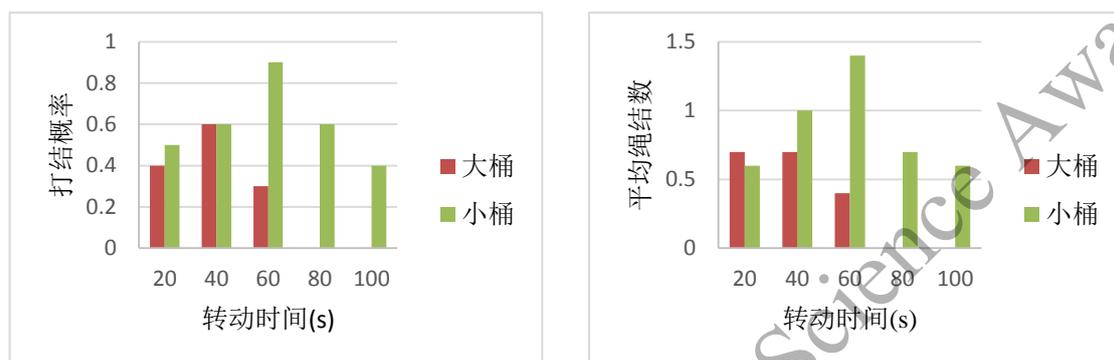


图 5.13 不同桶尺寸下转动时间与打结概率、平均绳结数的关系

对于相同的转动时间，相同的转动频率，橡皮绳在大桶中的打结概率和平均绳结数目均小于在小桶中。原因是小桶的盘绕圈数更多，易于打结。

再考虑最佳转速，打结的发生在失重条件附近，即  $\omega^2 R = g$ 。按照小桶半径计算失重时的转速， $\omega = 10.74 \text{ rad/s} \approx 101.64 \text{ rpm}$ ；对于大桶，转速为 86.30rpm。这是按照质点的估计，可以肯定的是绳子处于失重状态时，小桶的转速 > 大桶的转速，实验结果与理论是符合的。

文献[4]的转动实验采用的是方形桶，对比文献我们不难发现方桶中尼龙绳也能够打结，并且方桶中能够打结的绳子种类比圆桶中更多，因为方桶中绳子容易在角落处上升、再发生掉落、碰撞等过程，而圆桶条件更为苛刻，打结更困难。

## 六、总结与展望

本论文研究了线绳自发打结的物理机制。考虑了驱动和绳子两类因素，建立理论模型，定量分析转动和振动中驱动方式、驱动时间和频率，以及绳子盘绕方式、绳长、绳子材料对打结概率和数量的影响。然后使用自制的实验装置，分别从振动和转动两种驱动方式进行了实验验证，并将实验结果与理论结果进行比较分析。本论文研究工作的结论汇总如表 6.1 所示。

表 6.1 结论汇总

| 影响因素  |       | 理论结论                                                         | 是否与实验相符                  |
|-------|-------|--------------------------------------------------------------|--------------------------|
| 驱动的影响 | 振幅    | 一定频率下，振幅较小时，打结与振幅正相关，振幅较大时，打结与振幅趋向于无关                        | 与振动实验符合                  |
|       | 频率    | 振动及转动频率在 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ 附近最容易打结 | 与振动和转动实验皆符合              |
|       | 时间    | 对于无限长的绳子，结的数量与 $\sqrt{t}$ 成正比                                | 与振动实验符合，转动实验先增后减（因为绳长有限） |
| 绳子的影响 | 绳长    | 打结概率随绳长的增加而单调增加                                              | 与振动和转动实验皆符合              |
|       | 盘绕方式  | 盘绕成环略优于平行折线                                                  | 与振动和转动实验皆符合              |
| 材料的影响 | 摩擦系数  | 振动打结与摩擦关系不大，所以摩擦系数主要影响的运动是圆桶中的转动，桶的半径越小，摩擦系数越大               | 与转动实验一致                  |
|       | 线密度   | 线密度小有利于打结                                                    | 与振动实验一致（排除有其他因素）         |
|       | 刚度    | 刚度小有利于打结                                                     | 与振动实验一致。（排除其他因素）         |
|       | 恢复系数  | 转动时，绳子落下后发生反弹是打结的条件，所以恢复系数大有利于打结                             | 与转动实验一致                  |
| 讨论    | 打结与解结 | 打结和解结过程同时存在，在转动中，材质和配重影响解结。在振动中，打结和解结随机性较大                   | 与振动和转动实验皆符合              |
|       | 配重    | 适当的配重会增加打结的概率                                                | 与实验一致（转动）                |

利用类似的实验方法，振动和转动实验装置还可以研究多根绳的互打结机制。此外，本文的理论模型适用于重力场下的打结问题，我们还希望研究失重条件下的打结特性。这将对解决太空中宇航员工作时太空绳的打结问题提供基础，具有实际意义。图 6.1 为宇航员在太空站工作照片。



图 6.1 宇航员在太空站工作照片

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 参考文献

- [1] 维基百科编者. 绳结 [EB/OL]. 维基百科. <https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E7%B9%A9%E7%B5%90&oldid=50633164>, 2018.
- [2] Colin C. Adams. The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots (American Mathematical Society, Providence, RI)[M], 2004.
- [3] 吴振奎. 纽结的表示与分类[J]. 中等数学, 2003(04): 19-21.
- [4] Dorian M. Raymer, Douglas E. Smith. Spontaneous Knotting of an Agitated String[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 104(42), 2007: 16432-16437.

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 致 谢

在此论文即将完成之际,我们衷心感谢指导老师南京大学的王思慧教授和南京外国语学校的潘志民老师。王教授从选题、理论模型的建立、实验验证、论文写作各方面给予了我们很大的指导和帮助。王教授定期地召集我们开会讨论,对于理论和实验中的困难会耐心地给出指导意见。王教授渊博的学识、严谨的治学态度、亲切谦和的处事风格深深地感染和影响着我们。潘老师从论题的确定、理论分析、实验设计、实验装置的制作到论文写作,每一步都给予了我们耐心的指导和无私的关怀。

我们三位在研究过程中团结协作、密切配合,共同完成了整个论文的研究工作。孙雨辰负责理论建模,郭凯诚负责转动实验验证,孙昊天负责振动实验验证。在撰写论文过程中,我们三人分别负责各自研究内容的论文写作,郭凯诚还负责了论文的汇总成稿。

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 实验时间和地点

在确定研究课题后，我们从6月3号开始进行预实验，根据预实验的结果建立理论研究模型。7月16日确定实验验证方案后开始制作实验装置并进行了多次改版，然后分别进行转动和振动实验，记录实验结果并撰写实验报告，于8月9日初步完成转动和振动实验验证。将实验与理论结果进行比较分析，修正理论模型，并根据理论模型不断补充实验，完善研究报告。8月29号完成全部研究工作，之后对论文进行了整体补充和多次修改。

研究期间指导老师召集我们进行了多轮线上以及5次线下集中讨论，讨论改进原理机制，修正完善实验验证方案，协调整理理论与实验结果，并将理论和实验结果进行对比总结。

预实验在南京外国语学校完成，转动实验在郭凯诚家里完成，振动实验在孙昊天家里完成。孙雨辰在家里完成理论推导。

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 附录 1 部分实验数据

### 1. 振动参数的影响

附表-1 绳结个数与振动方向（水平、竖直）关系

| 振动方向 | 初始状态 | 绳子材质   | 绳子长度 | 振动频率           | 振幅   | 振动时间 | 绳结个数 | 平均值 |
|------|------|--------|------|----------------|------|------|------|-----|
| 竖直   | 盘绕成环 | 9 芯尼龙绳 | 1m   | 2.9Hz<br>17.1V | 12cm | 60s  | 3    | 1.6 |
|      |      |        |      |                |      |      | 1    |     |
|      |      |        |      |                |      |      | 0    |     |
|      |      |        |      |                |      |      | 2    |     |
|      |      |        |      |                |      |      | 2    |     |
| 水平   | 盘绕成环 | 9 芯尼龙绳 | 1m   | 2.9Hz<br>17.1V | 12cm | 60s  | 0    | 1   |
|      |      |        |      |                |      |      | 2    |     |
|      |      |        |      |                |      |      | 1    |     |
|      |      |        |      |                |      |      | 1    |     |
|      |      |        |      |                |      |      | 1    |     |

附表-2 绳结个数与振幅关系

| 振幅    | 初始状态 | 材质  | 长度 | 频率             | 时间  | 振动方向 | 绳结个数 | 平均值  |
|-------|------|-----|----|----------------|-----|------|------|------|
| 5.5cm | 盘绕成环 | 尼龙绳 | 1m | 2.8Hz<br>17.1V | 60s | 竖直   | 0    | 0.29 |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 1    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 1    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
| 9.5cm | 盘绕成环 | 尼龙绳 | 1m | 2.8Hz<br>17.1V | 60s | 竖直   | 1    | 0.43 |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 1    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 1    |      |
| 12cm  | 盘绕成环 | 尼龙绳 | 1m | 2.8Hz<br>17.1V | 60s | 竖直   | 3    | 1.6  |
|       |      |     |    |                |     |      | 1    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 0    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 2    |      |
|       |      |     |    |                |     |      | 2    |      |

附表-3 绳结个数与振动频率的关系

| 振动频率 | 初始状态 | 绳子材质 | 绳子长度 | 振幅 | 振动时间 | 振动方向 | 绳结个数 | 平均值 |
|------|------|------|------|----|------|------|------|-----|
|------|------|------|------|----|------|------|------|-----|

|                |      |     |      |      |     |    |   |     |
|----------------|------|-----|------|------|-----|----|---|-----|
| 2.2Hz<br>13.1V | 盘绕成环 | 尼龙绳 | 1.0m | 12cm | 60s | 竖直 | 0 | 0   |
|                |      |     |      |      |     |    | 0 |     |
|                |      |     |      |      |     |    | 0 |     |
|                |      |     |      |      |     |    | 0 |     |
|                |      |     |      |      |     |    | 0 |     |
| 2.9Hz<br>17.1V |      |     |      |      |     |    | 3 | 1.6 |
|                |      |     |      |      |     |    | 1 |     |
|                |      |     |      |      |     |    | 0 |     |
|                |      |     |      |      |     |    | 2 |     |
|                |      |     |      |      |     |    | 2 |     |
| 4Hz<br>23.9V   |      |     |      |      |     |    | 1 | 1   |
|                |      |     |      |      |     |    | / |     |
|                |      |     |      |      |     |    | / |     |
|                |      |     |      |      |     |    | / |     |
|                |      |     |      |      |     |    | / |     |

附表-4 绳结个数与振动时间关系

| 振动时间 | 初始状态 | 绳子材质 | 绳子长度 | 振动频率           | 振幅   | 振动方向 | 绳结个数 | 平均值 |
|------|------|------|------|----------------|------|------|------|-----|
| 30s  | 盘绕成环 | 尼龙绳  | 1m   | 2.9Hz<br>17.1V | 12cm | 竖直   | 0    | 0.2 |
|      |      |      |      |                |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 0    |     |
| 60s  |      |      |      |                |      |      | 3    | 1.6 |
|      |      |      |      |                |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 2    |     |
| 90s  |      |      |      |                |      |      | 1    | 1.8 |
|      |      |      |      |                |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 2    |     |
| 120s |      |      |      |                |      |      | 2    | 2.2 |
|      |      |      |      |                |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 3    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 3    |     |
|      |      |      |      |                |      |      | 2    |     |

## 2. 绳子的影响

附表-5 盘绕方式与绳结个数的关系

| 初始状态 | 绳子材质 | 绳子长度 | 振幅   | 振动频率  | 振动时间 | 振动方向 | 绳结个数 | 平均值 |
|------|------|------|------|-------|------|------|------|-----|
| 盘绕成环 | 尼龙绳  | 1.0m | 12cm | 2.9Hz | 60s  | 竖直   | 3    | 1.6 |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 2    |     |
| 平行折线 |      |      |      |       |      |      | 2    | 1.2 |
|      |      |      |      |       |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |

附表-6 绳结个数与绳子长度的关系

| 绳子长度 | 初始状态 | 绳子材质 | 振幅   | 振动频率  | 振动时间 | 振动方向 | 绳结个数 | 平均值 |
|------|------|------|------|-------|------|------|------|-----|
| 0.5m | 盘绕成环 | 尼龙绳  | 12cm | 2.8Hz | 60s  | 竖直   | 0    | 0   |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
| 1.0m |      |      |      |       |      |      | 2    | 0.8 |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
| 1.5m |      |      |      |       |      |      | 0    | 1.2 |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 1    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 3    |     |
| 2.0m |      |      |      |       |      |      | 2    | 0.8 |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 0    |     |
| 3.0m |      |      |      |       |      |      | 4    | 3   |
|      |      |      |      |       |      |      | 3    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 4    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 2    |     |
|      |      |      |      |       |      |      | 2    |     |

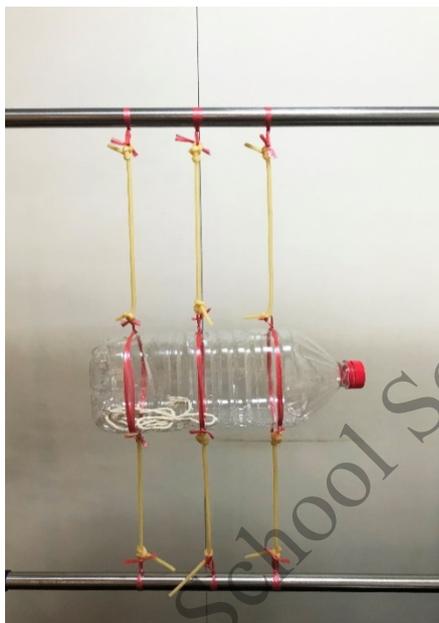
附表-7 绳结个数与绳子材质的关系

| 绳子材质            | 初始状态 | 绳子长度 | 振幅   | 振动频率           | 振动时间 | 振动方向 | 绳结个数 | 平均值  |
|-----------------|------|------|------|----------------|------|------|------|------|
| 直径 1mm 金属链 2g/m | 环状   | 1.0m | 12cm | 2.8Hz<br>17.1V | 60s  | 竖直   | 5    | 3.75 |
|                 |      |      |      |                |      |      | 3    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 6    |      |
| 直径 2mm 金属链 4g/m |      |      |      |                |      |      | 1    | 2.25 |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 5    |      |
| 棉线 4g/m         |      |      |      |                |      |      | 2    | 1.8  |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
| 0 芯尼龙线 3g/m     |      |      |      |                |      |      | 2    | 1    |
|                 |      |      |      |                |      |      | 0    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 0    |      |
| 9 芯尼龙线 5g/m     |      |      |      |                |      |      | 3    | 1.2  |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 0    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 2    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 0    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
| 导线 6g/m         |      |      |      |                |      |      | 0    | 0.6  |
|                 |      |      |      |                |      |      | 0    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |
|                 |      |      |      |                |      |      | 1    |      |

## 附录 2 失败的实验装置

### 1. 失败的振动实验装置 01

运用简谐振动的原理，制作了如图所示的实验装置，希望通过空心橡皮绳的弹力带动塑料桶上下往复运动。由于无稳定的能量输入且能量损耗很快，无法实现持续、稳定的振动。



附图-1 利用空心橡皮绳子作为动力的振动实验装置

### 2. 失败的振动实验装置 02

考虑到当圆的半径足够大且振动幅度较小时，圆平行于水平面的直径与圆相交的两质点的运动可近似看作竖直振动。由此设计如下 2 种装置，希望通过摇摆圆环模拟竖直振动。

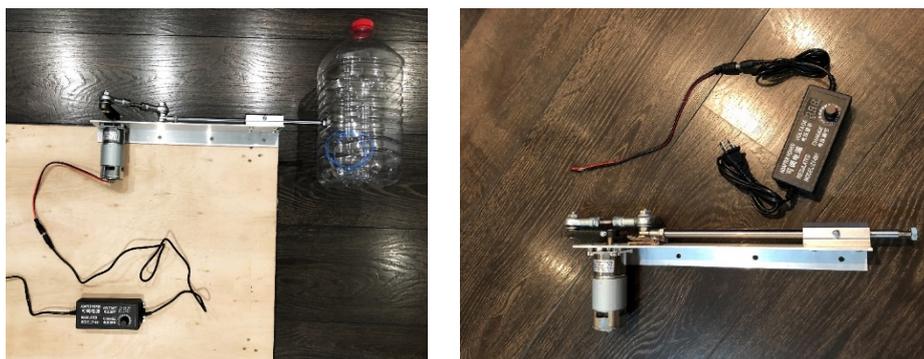
如附图-2.1 利用呼啦圈手动摇摆，实验效果不佳。

如附图-2.2 尝试摇摇椅模式，制作如下模型，试图得到稳定及持久的振动，但受装置直径限制，仍然无法实现持续、稳定的振动。



附图-2.1 (左) 2.2 (右) 采用摇摆产生动力的振动实验装置

最后，为了让装置有持续、稳定的动力，考虑使用直线往复电机，制作可调节的稳定动力输入的振动实验装置。如附图-3 所示。



附图-3 直线往复电机

### 3. 失败的转动实验装置 01

我们曾试图使用电风扇的电机带动纯净水桶转动，制作了如附图-4 所示的实验装置。这个装置不可调速，放入耳机线后，由于离心力较大，无法实现稳定的转动。



附图-4 使用电风扇电机的转动实验装置

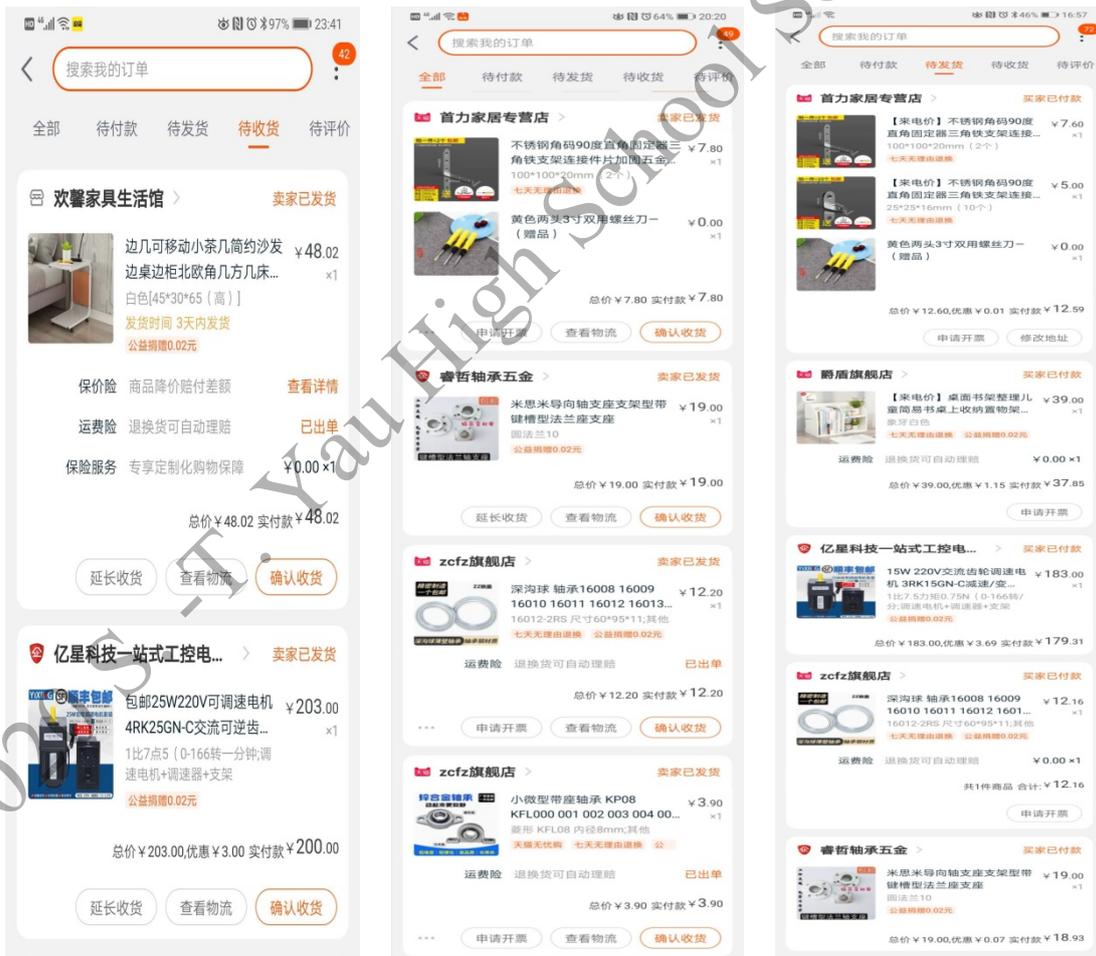
### 4. 失败的转动实验装置 02

然后增加了调速器，仍然使用电风扇电机带动纯净水桶转动，并且在另一端使用拆开的电扇进行加固。实验装置如图附图-5 所示。这个装置虽然增加了调速器，但是调速范围较小，电机转动速度太快，放入的各种绳都无法打结。而且，通电时间不能过长，会出现烧电机的情况。转动时也不够稳定，直接影响了实验效果。



附图-5 增加了调速器的转动实验装置

因此，我们继续改进实验装置，考虑使用低速并可调速的电机带动纯净水桶转动，于是在网上购买了如附图-6 中的材料和工具，并使用了锯、转孔、挖洞、焊接、三角铁支架固定等方法。此外，为了实现稳定的转动，还购买了茶几用做纯净水桶的固定支架。最终制作出了能实现稳定平衡转动的实验装置。



附图-6 制作转动实验装置-1 和转动实验装置-2 所购买的材料

### 附录 3 上传的实验视频

共上传了 5 个实验视频，每个视频的详细描述如下。

**1. 视频 1**

水平振动实验：频率 2.9Hz，振幅 12cm，绳长 1m，时间 60s

**2. 视频 2**

竖直振动实验：频率 2.9Hz，振幅 12cm，绳长 1.5m，时间 60s

**3. 视频 3**

转动实验：大桶，不带耳塞的耳机线，绳长 110cm，频率 80rpm，时间 70s

**4. 视频 4**

转动实验：大桶，铜芯导线，绳长 200cm，频率 100rpm，时间 60s

**5. 视频 5**

转动实验：小桶，橡皮绳，绳长 250cm，频率 80rpm，时间 60s

2020 S.-T. Yau High School Science Award

## 参赛队员简历

姓名：郭凯诚 性别：男

学校：南京外国语学校 年级：高二

简介：各学科成绩优秀，热爱物理，具有锲而不舍的坚毅品质和勇于探索的科学研究精神，具有物理实验的经验。具有良好的英语口语表达沟通能力。

2019 年全国中学生物理竞赛国家二等奖、江苏省一等奖

2019 年 Australian Mathematics Competition 中国赛区卓越奖（排名前 0.3%）

2020 年 Physics Unlimited Explorer Competition (PUEC) 并列第三名

2020 年江苏省青年物理学家竞赛一等奖

2020 年“登峰杯”青少年创新成果展示活动 优秀作品

2019 年南京市青年物理学家竞赛二等奖

2018 年“随园杯”（NPHO）南京市初中物理优秀学生选拔赛一等奖

南京外国语学校“六星学子”

姓名：孙昊天 性别：男

学校：南京外国语学校 年级：高二

简介：各学科全面发展，表现出色，2019 年中考成绩名列南外男生第一，在高一历次考试中名列年级前十。热爱物理，有较强的独立思考和能力分析能力，有实验经验，团队协作能力强。

2018, 2019 年“随园杯”初中物理“一等奖”

2017, 2018 年“时代杯”数学邀请赛“一等奖”

2019 年 AMC12 入围全球 5%，晋级 ARMY

2020 年江苏省青年物理学家竞赛一等奖

2019 年 BPhO 英国物理奥赛金奖

全国中学生学术辩论与演讲（NSDA2018）南京赛区八强

南京外国语学校“六星学子”

姓名：孙雨辰 性别：男

学校：南京外国语学校 年级：高三

简介：具有较强的物理和数学能力，校内成绩和学科竞赛成绩均名列前茅。

2018, 2019 年全国高中生物理奥林匹克竞赛省级一等奖

2019 年 PhysicsBowl 美国物理杯全球第二名

2019 年泛珠三角物理竞赛一等奖

2019 年 BPhO 英国物理奥赛第 7 名

2019 年全国高中生数学奥林匹克竞赛省级一等奖江苏省 74 名

2019 年欧几里得数学竞赛的全球前 20

2019 年南京市青年物理学家竞赛一等奖