

参赛队员姓名：谢责成，陈佳成

中学：福州第一中学

省份：福建省

国家/地区：中国

指导教师姓名：杨标桂，胡守庭

指导教师单位：福建师范大学，福州第一中学

论文题目：光滑和非光滑区域的 Hamilton 等周量的极小化  
元研究

# 光滑和非光滑区域的 Hamilton 等周量的极小化元研究

谢责成, 陈佳成

福州第一中学

**摘要** 本文研究了非光滑和非欧氏区域的 Hamilton 等周量对应的极小化元存在性及其特征.

**关键词** Hamilton 等周量, 极小化元, Plato 多面体, 测地圆盘.

## 目录

### 1. 引言

### 2. 几种带尖点图形的面积分割问题

#### 2.1.1 等周不等式

#### 2.2 平面三角形

#### 2.3 平面矩形

#### 2.4 正四面体表面

#### 2.5 立方体表面

#### 2.6 正八面体表面

### 3 球冠的 Hamilton 等周量

#### 3.1 平面圆盘

#### 3.2 球冠

### 4. 两种正多面体的体积分割问题

#### 4.1 单位正四面体

#### 4.2 单位正八面体

## 1. 引言

等周不等式的研究可以追溯到古希腊时期. 当人们试图用给定周长的曲线围出面积最大的区域时, 就得到了经典的等周不等式. 等周不等式在现代分析和几何学中都起到了重要的作用. 例如, 在[5]中, Cheeger 引入了两个等周常数, 这两个常数与 Laplace 算子的第一特征值的联系十分紧密, 详情见[20]. 在曲线收缩流(CSF)的研究中, Hamilton[Ha1]引入了两个等周量, 并将它们用于证明平面嵌入闭曲线的嵌入性在曲线收缩流下得到保持. 需要注意的是 Hamilton 也将他的等周比应用于平面和球面上的 Ricci 流研究中[10][8]. 近来, Hsu[11]分析了在[8]中引入的等周不等式的极小化元的存在性问题, Nardulli 和 Russo 又将 Hsu 的关于 Hamilton 等周不等式的极小化元的存在性研究结果拓展到了体积有限的任意维完备黎曼流形上.

本文主要考虑了 Hamilton 等周量的极小化元存在性及其特征. 我们的研究可以粗略分为两个部分. 第一部分我们解决了几种非光滑闭曲面 (Plato 正多面体的表面) 的 Hamilton 等周量问题. 我们将表明在 Plato 正多面体表面(非光滑闭曲面), Hamilton 等周不等式的极小化元退化成正多面体的一个顶点(也就是奇点). 在第二部分, 我们研究了在欧几里德和非欧几里

德空间的凸域(带边区域)上的 Hamilton 等周量. 我们证明了对于球冠(即球面上的测地圆盘), Hamilton 等周不等式的极小化元为其内蕴直径(即通过圆盘中心的测地线段). 我们还研究了用平面分割 Plato 正多面体时所确定的 Hamilton 等周量. 由于多面体的边界是尖的, 我们期望此时 Hamilton 等周量对应的极小化元是退化的. 我们在某些情形讨论了这个猜想.

文章的布局如下: 在§2 中, 我们研究 Plato 正多面体表面(非光滑闭曲面)的 Hamilton 等周量; 在§3 中, 我们研究单位圆盘以及球冠(单位球面上的测地圆盘)上的 Hamilton 等周量; 在§4 中, 我们研究 Plato 正多面体的 Hamilton 等周量.

## §2. 非光滑曲面的 Hamilton 等周量

在这一节中, 我们将研究非光滑曲面的 Hamilton 等周量, 我们考虑了几类平面尖点图形(三角形和矩形), 以及几类无边界的含尖点的正多面体(正四面体, 立方体和正八面体)表面. 我们将证明不同于圆盘与球冠等光滑且有界的几何体, 这类光滑曲面的 Hamilton 等周量最小值往往不是在截面过几何体对称中心时取到, 而是在截面退化至尖点时取到.

考虑到要取得 Hamilton 等周量最小值, 在分割曲线的长度一定时, 要使分割的较小部分面积尽可能大, 而我们注意到等周不等式可以将一个给定长度的闭合曲线化为圆使得面积最大化. 而对于不封闭但是端点固定的曲线, 我们也可以通过等周不等式的推论将其化为圆弧, 使得曲线和端点连线所围成的面积最大化. 因此我们有引理 2.1.1 和引理 2.1.2.

**引理 2.1.1(等周不等式)** 对于平面 $\Omega$ 上任意长度为 $L$ 的封闭曲线 $\gamma$ , 当其为圆时面积最大.

由该引理, 我们可以将一般曲线化作圆来取得 Hamilton 等周量的更优值. 但是对于有一定限制的曲线, 比如不封闭曲线以及始末两端固定的曲线, 该引理不能给出有效的调整, 因此我们有引理 2.1.2.

**引理 2.1.2** 对任意曲线 $\Gamma$ 与其端点连线 $l$ , 我们有以 $l$ 为弦且与 $\Gamma$ 等长的圆弧 $\Gamma_0$ , 使得 $\Gamma_0, l$ 围成的面积 $S_{\Gamma_0}$ 不小于 $\Gamma, l$ 围成面积 $S_{\Gamma}$ .

证明: 补齐 $\Gamma_0$ 所对应的圆弧 $\Gamma'$ , 记 $\Gamma_0$ 所对圆心角为 $\alpha$ ,  $\Gamma$ 和 $\Gamma_0$ 长度为 $b$ ,  $\Gamma'$ 长度为 $c$ , 圆

半径为 $r$ ,  $\Gamma'$ 与 $l$ 所成面积 $S_{\Gamma'}$ ,

$$\alpha = \frac{b}{r} \quad c = (2\pi - \alpha)r = \left(2\pi - \frac{b}{r}\right)r \text{ 为定值}$$

由引理 2.1.1

$$\begin{aligned} b + c &= b + c \\ S_{\Gamma} + S_{\Gamma'} &\leq S_{\Gamma_0} + S_{\Gamma'} \\ S_{\Gamma} &\leq S_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

证毕.

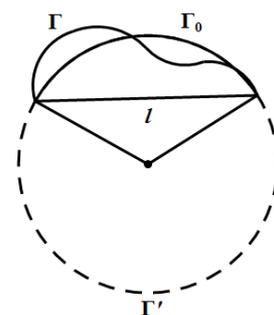


Figure 2.1.2

因为三角形是最基本的二维欧氏平面非光滑图形, 故我们首先研究:

### 2.2 平面三角形

对于二维欧氏平面上的一般三角形, 我们用任意曲线 $\Gamma$ 将其分割为两部分, 面积分别为 $S_1, S_2$ , 曲线长为 $L$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$ .

**定理 2.2** 对于任意 $\triangle ACB$ ,  $A, B, C$  分别为三角形三个内角. 最优曲线 $\Gamma_0$  为以最小角顶点为圆心的圆弧退化至顶点时取到,

$$H(\Gamma_0) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = 2 \min\{A, B, C\}$$

定理 2.2 说明作为二维欧氏平面中最基本的非光滑图形的三角形, 其 Hamilton 等周量的最优分割曲线在尖点退化处取到.

对于该定理的证明, 我们要取到 Hamilton 等周量的最小值. 考虑到对于固定长度 $L$ 的曲线 $\Gamma$ , 其分割出两块面积, 当所分割的较小面积越大, 则 Hamilton 等周量越小. 我们很容易联想到在相同的长度下, 圆弧所围成的面积最大, 因此我们希望能将一般曲线化为圆弧使得 Hamilton 等周量取到最小. 我们考虑对于给定角度 $\varphi$ , 在极坐标系下, 记曲线方程为 $r(\theta)$ , 则由弧长的积分公式可得曲线的弧长为:

$$L = \int_0^\varphi \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

而曲线围成的面积

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2(\theta) d\theta$$

则问题变成了

$$\begin{aligned} & \max \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2(\theta) d\theta \\ & \text{s.t. } \int_0^\varphi \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = L_0 \end{aligned}$$

在这里我们考虑使用拉格朗日乘子法来解决以上问题

定义:

$$F(\theta, r, r') = -\frac{1}{2}r^2(\theta) + \lambda \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} - L_0$$

利用 Euler-Lagrange Equation

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial r'} - \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

我们证明了曲线 $\Gamma$ 上任意点到该角顶点的距离相等, 即 $\Gamma_0$ 为以顶点为圆心作的圆弧. 由此我们得到引理 2.2.1.

**引理 2.2.1** 给定角 $\varphi$ , 对于给定长度 $L$ 的曲线 $\Gamma$ , 其两端在角的两边上. 当其围成面积最大时,  $\Gamma$ 是以角的顶点为圆心的圆弧 $\Gamma_0$ .

通过引理 2.2.1, 我们可以在一个角处将一条任意曲线 $\Gamma$ 转化为以角的顶点为圆心的圆弧. 但是显然在三角形中, 角的两端不能向外无限延伸, 因此对圆弧有一定的限制, 我们希望说明圆弧分割在同等长度下最优, 即所围成面积最大, 就要说明对任意分割面积都能取到圆弧, 为此需说明以三角形某个角为圆心的圆弧最多可以分割三角形一半以上的面积. 从而我们有引理 2.2.2.

**引理 2.2.2** 对于任意三角形, 以最小角为圆心作弧分割三角形, 可以截得一半以上面积.

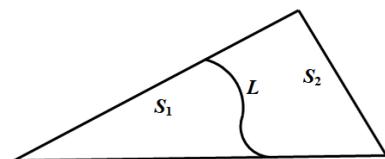


Figure 2.2 三角形分割

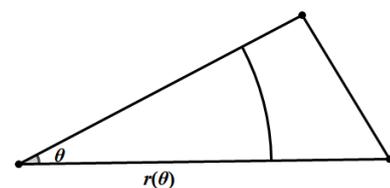


Figure 2.2.1 圆弧分割三角形

关于引理 2.2.2 的证明, 我们只需要将一般三角形分为锐角三角形和非锐角三角形, 对于非锐角三角形, 引理显然; 对于锐角三角形:

在锐角三角形 ABC 中,  $a, b, c$  为三角形的三边, 不妨设  $a < b < c$ , 角 A 度数为  $\alpha$ , 则圆弧所能分割最大面积为

$$S_{max} = \frac{1}{2}\alpha h^2$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah$$

其中  $h$  为 BC 上的高

$$S_{max} > \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$$

$$\Leftrightarrow 2ah > a \Leftrightarrow \frac{a}{\alpha} < 2h$$

由正弦定理可知

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\alpha} < \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2S_{\Delta ABC}}$$

只需证明  $\frac{abc}{2S_{\Delta ABC}} < 2h$

计算可得, 在锐角三角形中引理 2.2.2 同样成立.

根据引理 2.2.2, 我们知道  $\Gamma$  能分割三角形面积一半, 即圆弧可以覆盖 Hamilton 等周量中面积部分的所有情况.

现在我们计算以三角形三个角为圆心的圆弧分别的 Hamilton 等周量最小值

$$L = \alpha r \quad S_1 = \frac{\alpha}{2}r^2$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = 2\alpha - \frac{(\alpha r)^2}{S_0 - \frac{\alpha}{2}r^2} \geq 2\alpha$$

即对于三角形任意一个角, 以其为圆心的圆弧所得到的 Hamilton 等周量最小值均在该角退化取到, 且其值为  $2\alpha$ . 因此三角形中 Hamilton 等周量最小值是在最小角处退化取得, 其 Hamilton 等周量最小值  $H(\Gamma_0) = 2 \min\{A, B, C\}$

### 2.3 平面矩形

在本节中我们研究了矩形这类较为简单的具有尖点的平面图形, 我们在这一节中将探究矩形中使得 Hamilton 等周量最小的曲线满足怎样的性质. 类比在三角形中的讨论, 我们考虑将一般曲线化为圆弧取得固定长度下的最大面积, 再分别对于每种情况进行 Hamilton 等周量计算.

在  $1 \times a (a \geq 1)$  的矩形中, 我们用任意曲线  $\Gamma$  将其分割为两个部分, 面积分别为  $S_1, S_2$ , 曲线长为  $L$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$ .

从而我们得到定理 2.3:

**定理 2.3** 在  $1 \times a (a \geq 1)$  的矩形中, Hamilton 等周量最小值为  $H(\Gamma_0)$ , 最优分割曲线  $\Gamma_0$ , 则 (1)  $1 \leq a < \frac{4}{\pi}$ , 最优曲线为退化至矩形一角的四分之一圆弧,  $H(\Gamma_0) = \pi$ . (2)  $a = \frac{4}{\pi}$ , 最优曲线  $\Gamma_0$  在退化或平分矩形时取到,  $H(\Gamma_0) = \pi$ . (3)  $a > \frac{4}{\pi}$ , 最优曲线  $\Gamma_0$  为平分矩形且垂直于长度为  $a$  的对边的直线段,  $H(\Gamma_0) = \frac{4}{a}$ .

定理 2.3 说明矩形中的最优分割与矩形边长有关.

定理 2.3 的证明, 我们根据曲线端点所在位置, 可分为三种情况, 即端点在对边上, 端点在邻边上以及端点在同一边上.

### 2.3.1 端点在对边上

该情况下, 我们注意到有

$$L \geq 1$$

而由 Cauchy Inequality

$$S_1^{-1} + S_2^{-1} \geq \frac{(1+1)^2}{S_1 + S_2} = 4$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \geq 4$$

即当曲线为过矩形中心并且垂直于长度为  $a$  的对边的线段时,  $H(\Gamma_0) = \frac{4}{a}$

由此我们注意到在后续的讨论中只需考虑  $L \leq 1$  的情况.

### 2.3.2 端点在邻边上

因为  $L \leq 1$ , 因此曲线总在  $1 \times 1$  的正方形中.

此时可以看作引理 2.2.1 中  $\varphi$  为直角的情况, 即对于给定长度  $L$ , 当曲线为以矩形一个顶点为圆心的四分之一圆弧时, 所截面积最大. 我们计算 Hamilton 等周量可知:

$$L = \frac{\pi}{2}r \quad S_1 = \frac{\pi}{4}r^2$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{1-S_1} \right) = \pi + \frac{\left(\frac{\pi}{2}r\right)^2}{1 - \frac{\pi}{4}r^2} \geq \pi$$

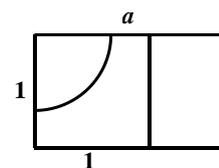


Figure 2.3.2

即我们说明了在当曲线的端点位于矩形的邻边时, 有当该曲线为四分之一圆, 并退化至矩形一个顶点时有 Hamilton 等周量最小值,  $H(\Gamma_0) = \pi$ .

### 2.3.3 端点在同一边上

此时可以看作引理 2.2.1 中为平角的情况, 即对于给定长度  $L$ , 此时的最优曲线即为半圆. 由此计算 Hamilton 等周量, 有

$$L = \pi r \quad S_1 = \frac{\pi}{2}r^2$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{1-S_1} \right) = 2\pi + \frac{(\pi r)^2}{1 - \frac{\pi}{2}r^2} \geq 2\pi$$

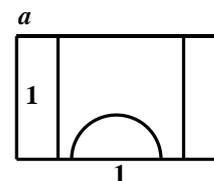


Figure 2.3.3

此时 Hamilton 等周量最小值同样也是在该曲线为半圆, 并退化为矩形边上一点时取到.  
 $H(\Gamma_0) = 2\pi$

综上, 我们证明了定理 2.3

基于三角形和矩形这两种基础的平面图形, 我们对几种带有尖点但无界的经典的欧几里德正多面体 (正四面体、立方体、正八面体) 表面的曲线分割问题进行了研究. 我们将探究 Hamilton 等周量最小值及其分割曲线的几何特征, 研究正多面体尖点对 Hamilton 等周量最小值的影响. 对于这些情况, 我们通过将它们的立体图形展开, 在平面上找到每种情况封闭曲线分割的最优情况. 注意到相同长度, 将一般曲线转化为能围成更大面积的圆弧可以使得 Hamilton 等周量更优, 我们考虑通过引理 2.1.2 将曲线化为圆弧, 然后圆弧的情况下进行讨论.

同时在以下的讨论中, 并非每种情况下的曲线都可以调整至圆弧, 即不是每种情况的展开图都可以取到最优情况, 对于这些例外, 我们通过放缩确定下界, 这在下面的讨论中将经常用到.

## 2.4 正四面体表面

本节中, 我们将研究欧几里德正多面体中最简单的正四面体的情况.

在正四面体表面, 我们用一条封闭曲线  $\Gamma$  将其分割为两部分, 面积分别为  $S_1, S_2$ , 曲线长为  $L$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$ .

经过研究, 我们得到定理 2.4:

**定理 2.4** 在正四面体表面, 最优曲线  $\Gamma_0$  在围绕一个端点的曲线退化至顶点时取到,

$$H(\Gamma_0) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = 2\pi$$

定理 2.4 说明了正四面体作为最简单三维欧氏空间的非光滑几何体, 其 Hamilton 等周量最小值同样在退化至顶点取到, 与上述三角形的结论一致.

事实上不只是对于定理 2.4, 在后面立体图形表面的最优的分割问题中, 我们需要在每种分割情况的平面展开图中进行讨论, 通过引理 2.1.1 与引理 2.1.2 将任意曲线首先变换为等长的圆弧, 使得所分割的面积  $S_1$  增大.

现在我们根据曲线分割顶点数, 我们有如下三种情况:

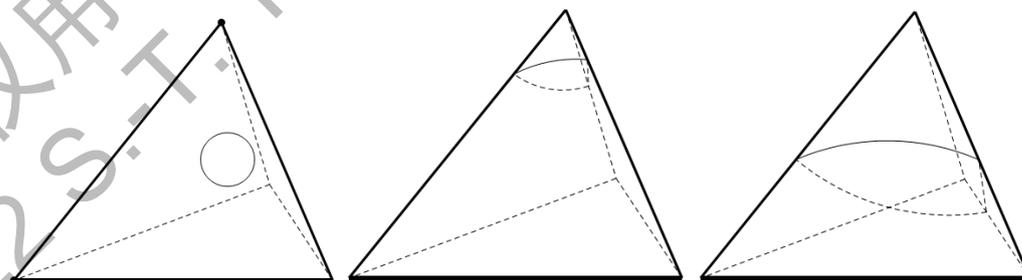


Figure 2.4 正四面体表面分割情况

### 2.4.1 未分割任意顶点

由引理 2.1.1, 我们将一般封闭曲线优化为圆, 可得

$$L = 2\pi r, S = \pi r^2$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{\sqrt{3} - S_1} \right) = 4\pi^2 r^2 \left( \frac{1}{\pi r^2} + \frac{1}{\sqrt{3} - \pi r^2} \right) = 4\pi + \frac{4\pi}{\frac{\sqrt{3}}{r^2} - \pi}$$

$$r = 0 \text{ 时, } H(\Gamma_0) = 4\pi$$

#### 2.4.2 分割一个顶点

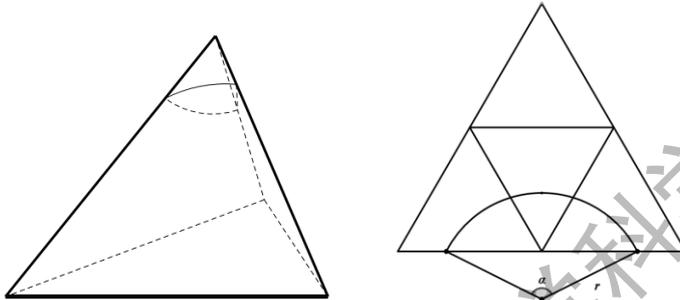


Figure 2.4.2 曲线围绕正四面体一个端点

此时与引理 2.2.1 中平角的情况相同, 于是我们得到

$$H(\Gamma_0) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{\sqrt{3} - S_1} \right) = 2\pi$$

此时的最优曲线是退化至正四面体一个顶角的半圆

#### 2.4.3 分割两个顶点

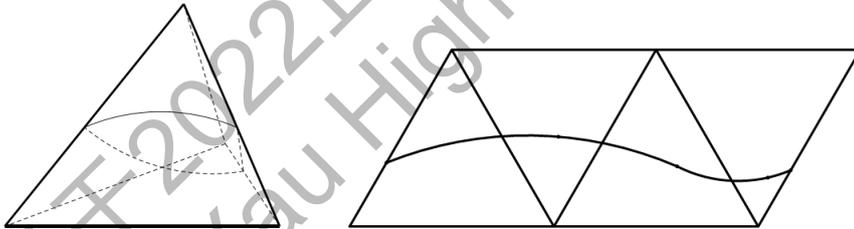


Figure 2.4.3 曲线围绕正四面体两个端点

由展开图可知,  $L$  垂直边界, 平分面积时,  $H$  有最小值,

$$H(\Gamma_0) = \frac{12}{\sqrt{3}} \approx 7.06.$$

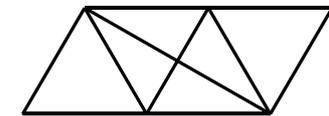


Figure 2.4.3 两个端点最优情况

综上, 在正四面体中, 使得 Hamilton 等周量取最小值的封闭曲线退化至一个尖点,  $H(\Gamma_0) = 2\pi$ .

### 2.5 立方体表面

在本节中, 我们研究了立方体中 Hamilton 等周量最小值以及取得最小值的曲线性质.

在立方体表面,我们用一条封闭曲线 $\Gamma$ 将其分割为两部分,面积分别为 $S_1, S_2$ , 曲线长为 $L$ ,

我们有 Hamilton 等周量  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$ .

同样, 经过研究, 我们得到了定理 2.5.

**定理 2.5** 在立方体中, 最优分割曲线 $\Gamma_0$ 是在退化成立方体的一个顶点时退化取得,

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = 3\pi.$$

定理 2.5 说明了取得 Hamilton 等周量最小的曲线, 在立方体中同样存在在尖点处退化的性质. 对于定理 2.5, 我们同样通过引理 2.1.2 将一般曲线化作等长的圆弧, 然后按照分割顶角个数进行分类讨论.

### 2.5.1 当封闭曲线不分割立方体的任意一个顶点

由引理 2.2.1, 最优曲线为圆, 计算 Hamilton 等周量:

$$S_1 = \pi r^2 \quad L = 2\pi r$$

$$H(\Gamma) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = 4\pi^2 r^2 [(\pi r^2)^{-1} + (6 - S_1)^{-1}] \geq 4\pi$$

即当曲线不分割立方体任意顶点时, Hamilton 等周量有下界 $4\pi$ , 此时曲线是立方体表面上的一个圆, 且退化至立方体表面上一点.

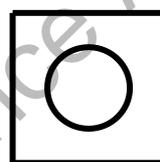


Figure 2.5.1 不分割顶点

### 2.5.2 当闭合曲线分割立方体的一个顶点

由展开图可知, 要使其为封闭曲线, 需要满足曲线的两端对称. 我们考虑对于一条固定长度为 $L$ 的曲线, 在两端位置固定时, 由引理 2.1.2, 我们知道其为圆弧使得分割面积变大.

但是对于任意的圆弧, 我们无法直接进行计算. 因此, 我们希望证明圆弧满足一定的性质, 所以, 我们调整圆弧的两端, 从而我们可以证明当圆弧两端垂直边界时取到该长度 $L$ 下曲线所能分割的最大面积.

现在我们计算此时的 Hamilton 等周量:

$$S_1 = \frac{3\pi}{4} r^2 \quad L = \frac{3\pi}{2} r$$

$$H(\Gamma) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \left(\frac{3\pi}{2} r\right)^2 \frac{6}{S_1(6-S_1)} = 3\pi \frac{6}{6-S_1} \quad \text{随 } S_1 \text{ 增大而增大}$$

$$\text{当 } S_1 = 0 \quad H(\Gamma_0) = [L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1})]_{\min} = 3\pi$$

即我们证明了, 在分割立方体一个顶角时的 Hamilton 等周量最小值在曲线为四分之一圆并且退化至立方体的顶角时取得.

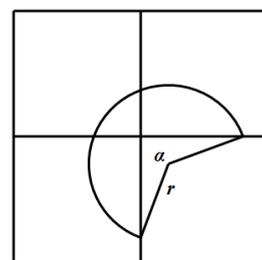


Figure 2.5.2 分割正方体一个顶点

### 2.5.3 当闭合曲线分割立方体的两个顶点

(i). 当该两个顶点相邻

和上一种情况相同的, 我们对于一段固定长度  $L$  的曲线, 先是固定曲线的两端, 那么可调整至圆弧使得分割面积增大, 接着改变曲线两端位置. 我们证得, 此时取得最大面积的曲线为半圆.

此时

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \pi r, \quad S_1 = \frac{\pi}{2} r^2 - \frac{1}{2} \\
 H(\Gamma) &= L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{6 - S_1} \right) \\
 &= \pi^2 r^2 \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2} r^2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{6 - \frac{\pi}{2} r^2 + \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{24\pi}{-\left(\pi^2 r^2 + \frac{13}{r^2}\right) + 14\pi} \\
 r &= \sqrt[4]{\frac{13}{\pi}}, \quad H(\Gamma_0) = \frac{24\pi}{14 - 2\sqrt{13}} \approx 11.106
 \end{aligned}$$

即当闭合曲线分割两个相邻顶点时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{24\pi}{14 - 2\sqrt{13}} \approx 11.106$ , 此时曲线为半圆.

(ii). 当该两个顶点相间

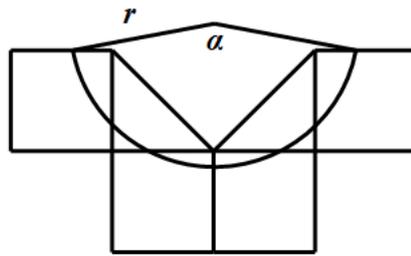
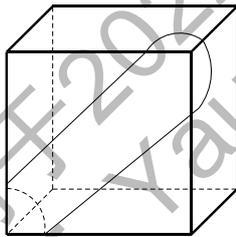


Figure 2.5.3.2 分割正方体两个对角顶点

一样的, 我们可以证明当曲线为两端垂直边界的半圆时, 分割面积最大.

此时

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \pi r, \quad S_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 - 1 \\
 H(\Gamma) &= \pi^2 r^2 \left( \frac{1}{\frac{1}{2} \pi r^2 - 1} + \frac{1}{6 - \left(\frac{1}{2} \pi r^2 - 1\right)} \right) = \frac{24\pi^2}{-\left(\pi^2 r^2 + \frac{28}{r^2}\right) + 16\pi}
 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{28}{\pi^2}}, \quad H(\Gamma_0) = \frac{24\pi^2}{16\pi - 4\sqrt{7}\pi} \approx 13.92$$

即当闭合曲线分割两个相间顶点时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{24\pi^2}{16\pi - 4\sqrt{7}\pi} \approx 13.92$ , 此时曲线为半圆

(iii). 当该两点相对时

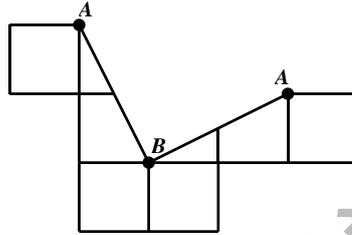


Figure 2.5.3.3 分割正方体的异面对角

注意到

$$L \geq 2\sqrt{5} \quad S_1^{-1} + S_2^{-1} \geq \frac{(1+1)^2}{S_1 + S_2} = \frac{2}{3}$$

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) \geq (2\sqrt{5})^2 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13.33$$

即当闭合曲线分割两个相对顶点时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{40}{3} \approx 13.33$ , 需要注意的是此时的下界并非下确界.

2.5.4 当闭合曲线分割立方体的三个顶点

(i). 当这三个顶点位于正方形的同一面上

我们同样可以证明曲线为垂直边界的四分之一圆时, 分割面积最大.

$$L = \frac{\pi}{2}r \quad S_1 = \frac{\pi}{4}r^2 - 3$$

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \frac{24\pi^2}{-\pi^2 r^2 - \frac{432}{r^2} + 48\pi} \geq \frac{\pi}{2 - \sqrt{3}} \approx 11.725$$

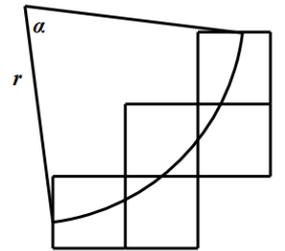


Figure 2.5.4.1 分割正方体三个顶点个共面顶点

即曲线分割位于立方体同一平面上的三点时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{\pi}{2-\sqrt{3}} \approx 11.725$ , 此时的曲线为垂直边界的四分之一圆.

(ii). 当这三个顶点不位于立方体上的同一平面, 此时也存在两种情况

(1). 存在相邻两点

我们可以证明其为两端垂直边界的四分之一圆时分割面积最大  
此时

$$L = \frac{\pi}{2}r \quad S_1 = \frac{\pi}{4}r^2 - 5$$

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \frac{24\pi^2}{-\pi^2r^2 - \frac{880}{r^2} + 64\pi} \geq \frac{3\pi}{8 - \sqrt{55}} \approx 16.144$$

即当闭合曲线分割立方体异表面三点时且存在相邻顶点, Hamilton 等周量有下界  $\frac{3\pi}{8 - \sqrt{55}} \approx 16.144$ , 此时的曲线为垂直边界的四分之一圆.

(2). 不存在相邻两点

$$L \geq 3\sqrt{2} \quad S_1^{-1} + S_2^{-1} \geq \frac{(1+1)^2}{S_1 + S_2} = \frac{2}{3}$$

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) \geq (3\sqrt{2})^2 \times \frac{2}{3} = 12$$

即当闭合曲线分割立方体异表面三点时且不存在相邻顶点时, Hamilton 等周量有下界 12, 同样需要注意此下界不为下确界.

#### 2.5.4 当闭合曲线分割立方体的四个顶点

此时情况较多. 实际上, 对于分割四个顶点, 所需闭合曲线一定有长  $L \geq 4$ , 又由 Cauchy Inequality,

$$S_1^{-1} + S_2^{-1} \geq \frac{(1+1)^2}{S_1 + S_2} = \frac{2}{3}$$

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) \geq 4^2 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3}$$

即当分割四个顶点时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{32}{3}$ , 即我们说明了 Hamilton 等周量最小值不会在分割四个点的时候取得. 我们现在对其中比较对称的两种情况进行讨论.

(i). 当该闭合曲线分割的四点共面

由展开图可知, 曲线垂直边界且平分面积时, 取得

$$H(\Gamma_0) = \frac{32}{3} \approx 10.667.$$

即当闭合曲线分割共面四点时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{32}{3} \approx 10.667$ , 此时的分割曲线为平分立方体的一条闭合线段, 所在平面过立方体中心.

(ii). 当该闭合曲线分割的四点异面

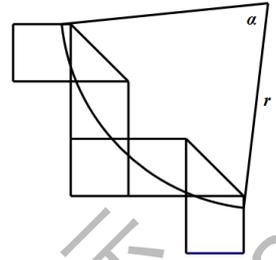


Figure 2.5.4.2 分割正方体异表面的三个顶角

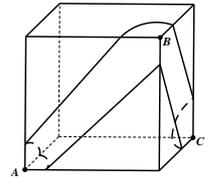


Figure 2.5.4.3 分割两组对角顶点

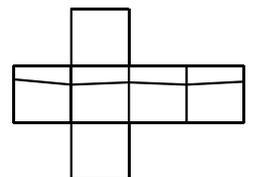


Figure 2.5.4.1 分割正方体共面四个顶角

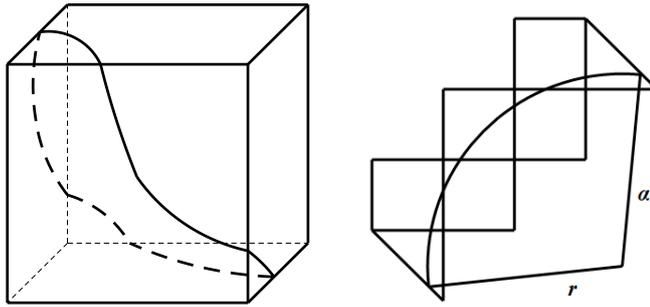


Figure 2.5.4.2 分割正方体异面  
四个顶角

由 Cauchy Inequality

$$S_1^{-1} + S_2^{-1} \geq \frac{(1+1)^2}{S_1 + S_2} = \frac{2}{3}$$

$$L = \alpha r \quad r = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$H(\Gamma) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) \geq \frac{2}{3} \alpha^2 r^2 = \frac{12 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \geq 12$$

即当闭合曲线分割异面四点时, Hamilton 等周量有下界 12.

综上, 我们完整讨论了立方体的尖点对 Hamilton 等周量的影响, 和三角形以及矩形类似的, 我们发现尖点对于 Hamilton 等周量的影响在立体图形中也存在, 由此我们推断存在尖点的图形, 其取得 Hamilton 等周量最小的曲线, 总退化至尖点.

## 2.6 正八面体表面

在本节中, 我们将研究欧几里德正多面体中的单位正八面体, 我们研究一般曲线对于正八面体表面的分割最优分割问题, 希望证明最优曲线符合本章中发现的具有尖点的图形的共性, 即最优曲线在尖点处退化取到.

在正八面体表面, 我们用一条封闭曲线  $\Gamma$  将其分割为两部分, 面积分别为  $S_1, S_2$ , 曲线长为  $L$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$ .

经过研究, 我们可以得到以下结论:

**定理 2.6** 对于单位正八面体, 最优分割曲线  $\Gamma_0$  是在正八面体的一个尖点处退化取得,

$$H(\Gamma_0) = L^2(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = \frac{8}{3}\pi.$$

该定理就可以很好的说明对于尖点图形, 最优分割可能具有在尖点处退化的共性.

对于该定理的证明, 我们根据曲线分割正八面体顶角的个数进行分类, 由于分割的对称性, 我们只需算出曲线没有分割任何顶角, 分割 1、2、3 个顶角的情况下的 Hamilton 等周量局部最小值或者下界进行比较.

同样, 考虑到引理 2.1.2, 我们知道长度为  $L$  的曲线在起始两端固定时, 为圆弧时能围出最

大面积. 在这个条件下, 我们对下面的情况进行讨论.

### 2.6.1 当曲线未分割任一正八面体的顶角

由引理 2.1.1, 此时的最优曲线为一个完整的圆, 则我们计算有

$$L = 2\pi r \quad S_1 = \pi r^2$$

$$H(\Gamma_0) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2\sqrt{3} - S_1} \right) = 4\pi^2 r^2 \left( \frac{1}{\pi r^2} + \frac{1}{6 - \pi r^2} \right) \geq 4\pi$$

所以我们得到这种情况下的 Hamilton 等周量的最小值  $4\pi$ , 此时的曲线退化至正八面体表面的一点.

### 2.6.2 当曲线分割正八面体的一个顶角

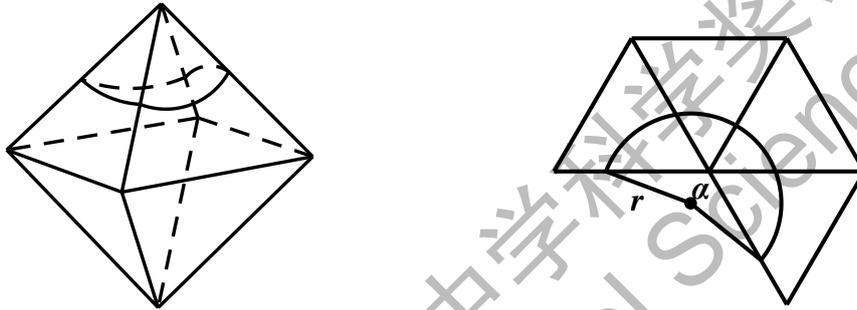


Figure 2.6.2 分割正八面体一个顶角

我们画出在这个顶角的展开图, 可以得到一段圆弧, 由于圆弧的任意性, 我们希望说明在最优圆弧应该满足一定的几何性质, 与立方体情况相似的, 我们可以通过构造函数, 证明了对于给定长度的圆弧, 最优圆弧(分割面积最大)应该满足垂直两端边界.

然后我们计算:

$$L = \frac{4\pi}{3} r \quad S_1 = \frac{2\pi}{3} r^2$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2\sqrt{3} - S_1} \right) = \frac{16\pi^2 r^2}{9} \left( \frac{3}{2\pi r^2} + \frac{1}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} r^2} \right) = \frac{8}{3} \pi + \frac{8\pi^2 r^2}{9\sqrt{3} - 3\pi r^2} \geq \frac{8}{3} \pi$$

此时 Hamilton 等周量有最小值  $\frac{8}{3}\pi$ , 这种情况下圆弧在尖点处退化, 也就是我们希望证明最小情况. 因此下面我们只要说明其余情况的下界都不如该退化情况下的 Hamilton 等周量.

### 2.6.3 当曲线分割两个顶角

这种情况下, 根据这两个顶角的位置关系, 可以分为两种情况: 两点相邻和两点相间

(i). 当此两点相邻

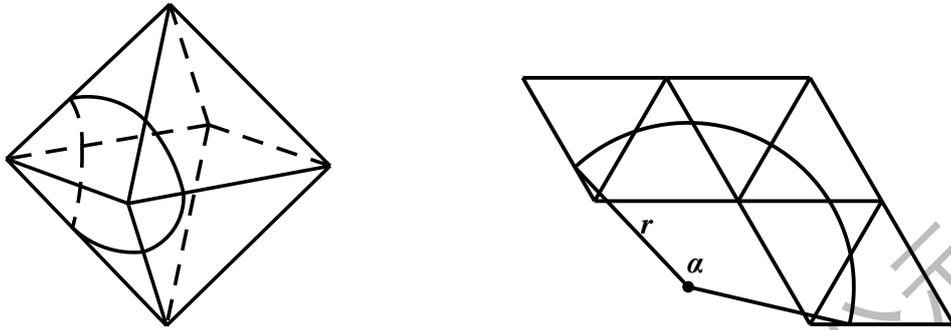


Figure 2.6.3 (i) 分割正八面体两个相邻顶角

由展开图, 同样的我们可以证明圆弧在两端垂直于边界时, 有最优分割, 此时计算 Hamilton 等周量:

$$S_1 = \frac{\pi}{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad L = \frac{2\pi}{3}r$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2\sqrt{3} - S_1} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{9} \frac{\pi^2}{\sqrt{3}\pi - \frac{\pi^2 r^2}{9} - \frac{15}{4r^2}} \geq \frac{\frac{8}{3}\pi}{3 - \sqrt{5}} \approx 10.9664$$

即我们说明了在分割相邻顶角时, Hamilton 等周量有下界  $\frac{8}{3}\pi \approx 10.9664$

(ii). 当此两点相间

我们发现此时的展开图较为困难, 但是注意到

$$L \geq 2\sqrt{3}.$$

又由 Cauchy Inequality,

$$S_1^{-1} + S_2^{-1} \geq \frac{(1+1)^2}{S_1 + S_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2\sqrt{3} - S_1} \right) \geq (2\sqrt{3})^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \approx 13.8564.$$

即这个时候我们找到了一个较在顶点处退化更大的下界, 因而说明了退化至顶点较这种情况更优. 同时上式的等号不能同时取得. 因此, 该下界不是该情况的下确界.

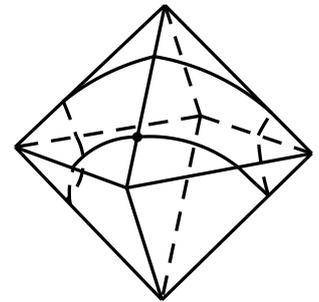


Figure 2.6.3 (ii) 分割正八面体相对两个顶角

#### 2.6.4 当曲线分割三个顶角

此时, 我们注意到

$$L \geq 3$$

同样的

$$H(\Gamma) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2\sqrt{3} - S_1} \right) \geq 3^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 10.3923$$

即我们也找到了该情况比在顶点处退化更大的下界, 说明在顶点处退化更优. 同样等号不能同时取到.

综上, 在这一节的讨论中, 我们证明了闭合曲线分割正八面体的使得 Hamilton 等周量最小情况为曲线在一个顶点处退化, 这为尖点且无界图形 Hamilton 等周量会在曲线在顶点退

化取到最小提供了一个有力的例子.

### §3. 球冠的 Hamilton 等周量

在此章节中我们想研究取得 Hamilton 等周量最小值的曲线在几类无尖点且有界图形中的几何性质. 因此我们考虑了单位圆盘以及球冠的最优表面分割问题, 并研究这两种情况中的 Hamilton 等周量的最小值及其分割曲线的几何特征.

#### 3.1 平面圆盘

本节中, 我们研究对于半径为 1 的平面圆盘, 用任意曲线  $\Gamma$  分割为两个部分, 研究取得最优的 Hamilton 量:  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$  的曲线特征.

**定理 3.1** 对于单位圆盘, 最优曲线  $\Gamma_0$  为圆盘直径时取到,

$$H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = \frac{16}{\pi}$$

定理 3.1 说明了对于圆盘的最优分割曲线满足过圆盘中心, 并且垂直于两端边界.

对于定理 3.1 的证明, 首先由引理 2.1.2 可知, 对于固定弦长的任意曲线, 有圆弧更优. 这说明了要使任意曲线更优, 需要满足该曲线为一段圆弧, 或为一条线段. 其中线段的情况在圆盘中并不困难, 但是因为圆弧所对半径与圆心角的任意性, 我们并不能直接讨论 Hamilton 等周量最小值. 因此我们希望找到最优圆弧所需要满足的几何性质, 从而我们现在有引理 3.1.1.

**引理 3.1.1** 对于一段圆弧  $\gamma$  分割圆盘  $\Gamma$ , 分割后的较小部分面积  $S_1$  的最大值在圆弧两端垂直圆盘的圆弧时取到. 特别地, 当圆弧两端为圆盘的直径两端时, 分割曲线为圆盘的直径.

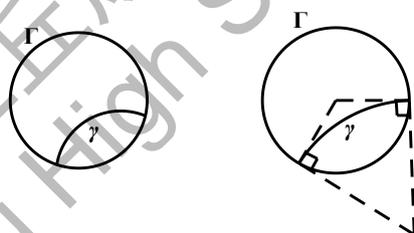


Figure 3.1.1 圆盘分割

对于引理 3.1.1, 有不少办法可以证明, 事实上引理等价于证明当圆弧所对圆心角与分割部分所对圆盘圆心角互补时, 我们取到分割部分面积的最大值. 关于这个证明我们可以在固定圆弧长度  $L$  的条件下, 证明分割面积的函数在定义域内仅有两个圆心角互补这个唯一极大值, 该命题可单纯用初等办法解决, 即证明导数唯一零点, 或可用拉格朗日乘子法证明.

同时因为考虑到下一节我们将要研究单位球体上测地线盘, 初等方法难以证明, 我们对于引理 3.1.1 可以引入第一变分公式证明. 我们考虑对假定的最优曲线进行二维变分, 在保证面积不变的情况下, 由于变分的任意性, 我们得到最优曲线即为引理 3.1.1 阐述的.

现在我们有引理 3.1.1, 接着只需分别对弦和两端垂直圆盘的圆弧的 Hamilton 量进行比较, 就可以知道满足分割圆盘 Hamilton 等周量最小的曲线满足怎样的几何性质.

##### 3.1.1 曲线为弦时

我们记弦长为  $L$ , 弦所对圆周角为  $\theta$ , 我们希望弦为直径则我们计算有

$$L = 2 \sin \theta$$

$$S_1 = S_{\text{扇形}A_1OA_2} - S_{\Delta A_1OA_2} = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$H(\theta) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = 4\pi \sin^2 \theta \frac{1}{S_1(\pi - S_1)}$$

我们可以证得 $H(\theta)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减. 因此当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,  $H(\theta)$ 取得最小值 $\frac{16}{\pi}$ . 此时的最优曲线就是过圆盘中心切垂直于两端边界的直径.

### 3.1.2 曲线为圆弧时

设 $OD = x$ , 由相似性可知

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OD}{AD}$$

$$AC = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$L = 2 \sin^{-1} x \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$S_1 = \cos^{-1} x - x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{x^2} (\sin^{-1} x - x\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{令 } x = \sin \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$L = 2\theta \cot \theta$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta + \cot^2 \theta (\theta - \sin \theta \cos \theta)$$

$$H = \frac{L^2 \pi}{S_1(\pi - S_1)}$$

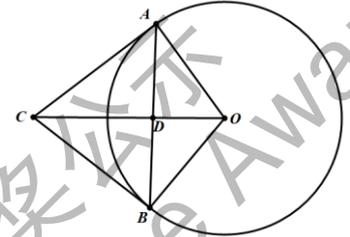


Figure 3.1.2 圆弧分割

我们证明了 $H$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增. 因此 Hamilton 等周量最小值在 $x = 0$ 处取到, 此时曲线为圆盘直径,  $H = \frac{16}{\pi}$ . 到此, 我们说明了定理 3.1 正确.

### 3.2 球冠

在本节中, 我们继续研究上一节圆盘分割的最优曲线性质是否在另外一些无尖点而有界图形中依旧成立. 因此, 我们将在本节中研究单位球面上与球心距离为 $d$ 的球冠的最优分割问题.

我们用一条曲线 $\Gamma$ 将其分割为两部分, 面积分别为 $S_1, S_2$ , 曲线长为 $L$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)$

经过研究, 我们得到定理 3.2:

**定理 3.2** 对于单位球面上与球心距离为 $d$ 的球冠, 最优曲线 $\Gamma_0$ 为测地圆且垂直球冠时取到,

$$H(\Gamma_0) = L^2 \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = \frac{8 \arccos^2 d}{\pi(1-d)}$$

定理 3.2 同样说明了最优曲线所在平面过球冠所在单位球面的球心, 且垂直球冠时有 Hamilton 等周量的最小值.

对于定理 3.2, 想要一次性完成证明显然是很困难的, 因而我们想分为两个步骤进行证明, 即先确定曲线形状, 再确定曲线位置. 也就是我们先证明对于最优曲线是两端垂直于球冠边界的圆弧, 然后我们证明这样的圆弧, 平分球冠时最优. 从而我们有引理 3.2.1 与引理 3.2.

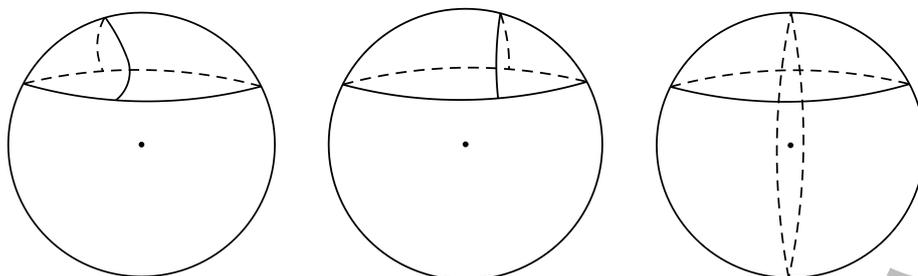


Figure 3.2.1 球冠分割

**引理 3.2.1** 对于单位球上的球冠的最优分割是两端垂直于球冠边界的圆弧.

事实上对于引理 3.2.1 是上一节中所提的引理 3.1.1 中第一变分公式的一个推论, 我们可以用同样的方式, 对假定的最优的曲线进行三维方向上的变分. 其中与引理 3.1.1 不同的地方在于多出垂直于球面向外的方向向量, 而该方向向量对于面积变化没有影响, 因此我们可以得出相同的结论, 即为最优分割曲线是两端垂直于边界且曲率恒定的曲线. 在球冠中满足该条件的曲线即为引理 3.2.1 中说阐述的曲线. 需要注意的是, 垂直于球冠边界的圆弧并不必然竖直. 现在我们引入引理 3.2.2 来找到该曲线在最优分割时的位置.

**引理 3.2.2** 对于两端垂直于球冠边界的圆弧, 当圆弧平分球冠时为最优曲线.

对于引理 3.2.2 的证明, 我们建立空间直角坐标系, 设出分割曲线所在平面方程, 通过 Gauss-Bonnet 公式计算出分割面积, 最后证明平面平分球冠时取到 Hamilton 等周量的最小值点.

有引理 3.2.1 与引理 3.2.2 之后, 我们就证明了定理 3.2 正确, 同时说明了在球冠此类无尖点图形上, 取得 Hamilton 等周量最小值的最优曲线满足其过图形的中心, 平分图形面积, 并且两端垂直于图形边界.

## §4. 两种正多面体的体积分割问题

下面我们接着研究含有尖点且有界的正四面体和正八面体的体积分割问题.

### 4.1 单位正四面体

这节中, 我们研究了单位正四面体的哈密顿等周量的最小值以及体积分割问题.

在单位正四面体中, 我们用平面  $\Pi$  将其分割为两部分, 假设体积分别为  $V_1, V_2$ , 截面面积为

$S$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H = S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)$ .

我们有定理 4.1.

**定理 4.1** 在单位正四面体中, 最优平面  $\Pi_0$  平行正四面体中的一面且退化至一顶角时取到,

$$H(\Pi_0) = S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = 3\sqrt{2}.$$

我们将按平面分割正四面体的角的个数进行分类, 显然有以下两种情况: 1. 平面分割正四面体的一个顶角; 2. 平面分割正四面体的两个顶角. 为了方便以下的计算, 我们将正四面体置于立方体中.

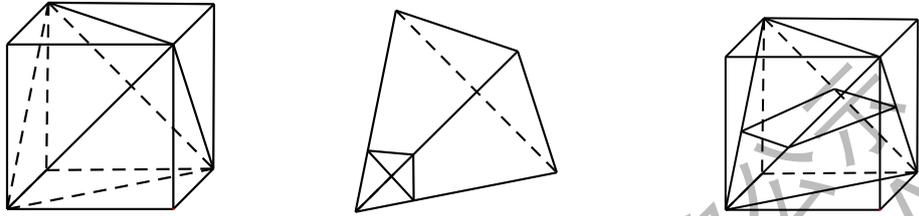


Figure 4.1 单位正四面体的体积分割

#### 4.1.1 平面分割正四面体的一个顶角

设所分割的三条棱长为  $a, b, c$ , 则分割体积:

$$V_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} abc$$

我们考虑在固定分割体积时, 使得截面面积最大.

由散度定理  $\sum S_i n_i = 0$ , 其中  $n_i$  为单位外法向, 则截面面积

$$S_0^2 = \frac{3}{16} \sum a^2 b^2 - \frac{1}{8} abc(a+b+c)$$

而  $\sum a^2 b^2 = \frac{1}{2} \sum (a^2 b^2 + b^2 c^2) \geq abc(a+b+c)$ ,

$$S_0^2 \geq \frac{1}{16} abc(a+b+c) \geq \frac{3}{16} (abc)^{\frac{4}{3}}$$

即当  $a=b=c$  时, 我们取到截面面积的最小值.

此时的 Hamilton 等周量为

$$H = S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{12} a^3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{12} a^3} \right) \geq 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{4}} \approx 2.41778$$

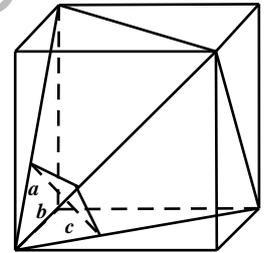


Figure 4.1.1 分割正四面体一个角

#### 4.1.2 平面分割正四面体的两个顶角

因为此时一般平面的用初等方法难以研究, 我们这里仅考虑与四面体一条棱平行的平面, 这样的平面具有一定的对称性.

为了简便计算, 我们首先在棱长为 2 的正四面体中研究最优截面的性质.

由对称性, 我们设:

$$P_1(1-a, a, \sqrt{2}a) \quad P_2(a-1, a, \sqrt{2}a) \\ P_3(b-1, -b, \sqrt{2}b) \quad P_4(1-b, -b, \sqrt{2}b)$$

$$V_1(a, b) = 6V_1 = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & \sqrt{2}a \\ 1-b & -b & \sqrt{2}b \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a-1 & a & \sqrt{2}a \\ b-1 & -b & \sqrt{2}b \end{vmatrix} \right|$$

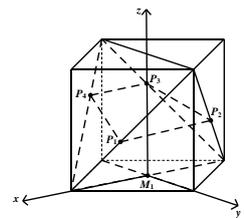


Figure 4.1.2 分割正四面体两个角

$$+ \left| \begin{array}{ccc} 1-a & a & \sqrt{2}a \\ a-1 & a & \sqrt{2}a \\ b-1 & -b & \sqrt{2}b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} b-1 & -b & \sqrt{2}b \\ 1-b & -b & \sqrt{2}b \\ 1-a & a & \sqrt{2}a \end{array} \right|$$

$$= 4\sqrt{2}ab(3-a-b)$$

$$S(a, b) = 2S = |P_2P_1 \times P_2P_3| + |P_4P_3 \times P_4P_1|$$

$$= 2\sqrt{(a+b)^2 + 2(a-b)^2(2-a-b)}.$$

不妨设  $a+b=c$ , 即我们固定  $a+b$  为定值.

我们只需证明

$$\begin{cases} V_1(a, b) \leq V_1\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \\ S(a, b) \geq S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \end{cases}$$

且同时在  $a=b$  时取等.

由此我们知道了, 对于任意  $(a, b)$ , 其中  $a+b=c$ , 我们均可将其调整为  $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ , 使得

Hamilton 等周量变小.

因此我们计算  $a=b$  时单位正四面体的 Hamilton 等周量.

设  $O$  到截面的距离为  $x$

$$S = \sqrt{2}x - 2x^2 \quad V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

$$H = S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = (\sqrt{2}x - 2x^2)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{12} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)} \right)$$

我们得到在  $H$  在  $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  时取到最小值

$$H = 3\sqrt{2} \approx 4.24264$$

综上, 我们得到了平面分割正四面体时, 最优情况是截面平行于正四面体的一面, 且退化至一点,  $H(\Pi_0) = 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{4}} \approx 2.41778$ .

## 4.2 单位正八面体

在本节中, 我们将研究正八面体的体积分割问题, 为了方便后面的讨论, 我们使正八面体处于竖直状态, 定义正八面体中任意四个共面的顶点所在平面为中性面. 我们用平面  $\Pi$  将其分割为两部分, 假设体积分别为  $V_1, V_2$ , 截面面积为  $S$ , 我们有 Hamilton 等周量  $H =$

$S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)$ . 我们得到定理 4.2.

**定理 4.2** 在单位正八面体中, 最优平面  $\Pi_0$  平行于中性面且退化至一顶角时取到,

$$H(\Pi_0) = S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) = 3\sqrt{2}$$

与正四面体相同的, 不易讨论任意平面, 所以在以下的讨论中, 我们均选择了一些较为对

称的分割方式. 同样, 我们将按平面分割正八面体顶角个数进行分类, 显然有以下三种情况: 1. 平面分割正八面体的一个顶角; 2. 平面分割正八面体的两个顶角; 3. 平面分割正八面体的三个顶角.

#### 4.2.1 平面分割正八面体的一个顶角

此时, 我们有结论 4.2.1.

**结论 4.2.1** 对于分割正八面体一个顶角的任意平面  $\Pi$ , Hamilton 等周量最小值在平面  $\Pi_0$  平行于中性面且退化至正八面体一点时取到.

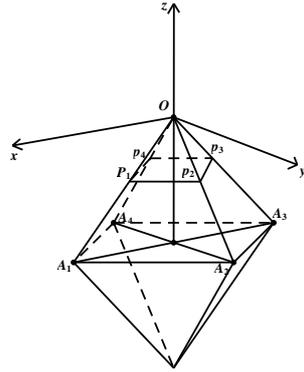


Figure 4.2.1 分割正八面体一个角

首先证明对于分割固定体积的任意平面  $\Pi$ , 其平行于中性面时有截面面积最小.

以  $O$  为原点,  $\overrightarrow{A_3A_1}$  为  $x$  轴正方向,  $\overrightarrow{A_4A_2}$  为  $y$  轴正方向建立空间直角坐标系, 其中  $A_1(1, 0, -1)$ , 设  $\Pi: ax + by + cz = 1$ , 不妨设  $\Pi$  过  $(0, 0, -\frac{1}{2})$ , 则  $\Pi: ax + by - 2z = 1$ , 设分割体积为  $V_1$ , 截面面积为  $S_1$ , 计算得:

$$\begin{aligned}
 & P_1\left(\frac{1}{a+2}, 0, -\frac{1}{a+2}\right) \quad P_2\left(0, \frac{1}{b+2}, -\frac{1}{b+2}\right) \quad P_3\left(\frac{1}{a-2}, 0, \frac{1}{a-2}\right) \quad P_4\left(0, \frac{1}{b-2}, \frac{1}{b-2}\right) \\
 & V_1 = \frac{1}{6} \left( \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{a+2} & 0 & -\frac{1}{a+2} \\ 0 & \frac{1}{b+2} & -\frac{1}{b+2} \\ \frac{1}{a-2} & 0 & \frac{1}{a-2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{a-2} & 0 & \frac{1}{a-2} \\ 0 & \frac{1}{b-2} & \frac{1}{b-2} \\ \frac{1}{a+2} & 0 & -\frac{1}{a+2} \end{array} \right| \right) \\
 & = \frac{4}{3(2-a)(2+a)(2-b)(2+b)} \\
 & S_1 = \frac{1}{2} (|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4}| + |\overrightarrow{P_3P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4}|) = \frac{4\sqrt{a^2+b^2+4}}{(2-a)(2+a)(2-b)(2+b)}
 \end{aligned}$$

对于体积为  $V_1$  的平行于中性面的平面  $\Pi_0$ , 其截面面积  $S_0 = (3\sqrt{2}V_1)^{\frac{2}{3}}$ .

因此我们只需证明:

$$(3\sqrt{2}V_1)^{\frac{2}{3}} \leq S_1.$$

通过均值不等式和求导, 我们证得上式成立. 由此我们证明了, 在分割正八面体一个角时, 对于分割固定体积, 平面平行于中性面时有截面面积最小, 此时 Hamilton 等周量最小.

我们计算此时最小的 Hamilton 等周量:

设截面的边长为  $a$ ,

$$S = a^2$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3$$

$$H = S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1}) = a^3 \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{6} a^3} + a^3 \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} a^3} = 3\sqrt{2} + \frac{a^3}{\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} a^3}.$$

当  $a = 0$  时, Hamilton 等周量取得最小值约为  $3\sqrt{2} \approx 4.2426$ , 即

$$H(\Pi_0) = 3\sqrt{2}$$

因此, 我们说明了水平或竖直的最优分割平面在取得 Hamilton 等周量最小值时是退化的.

#### 4.2.2 平面分割正八面体的两个顶角

此时, 考虑到对称性, 我们有结论 4.2.2.

**结论 4.2.2** 用平行于正八面体一条棱且垂直中性面的平面分割正八面体, Hamilton 等周量最小值在过平面过棱的四等分点处取到.

我们计算此时的 Hamilton 等周量:

设  $AB$  长为  $a$ , 画出截面上半部分:

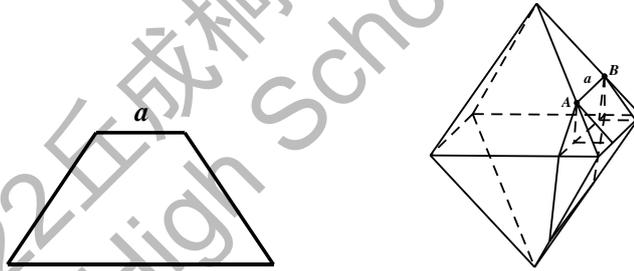


Figure 4.2.2 平行一条棱且竖直分割正八面体

$$S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(a+1) \frac{1-a}{2} \sqrt{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a^2)$$

$$V_1 = 2 \left\{ \left[ \sqrt{2}a \left( \frac{1-a}{2} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} \left[ \sqrt{2} \left( \frac{1-a}{2} \right)^3 \right] \right\}$$

$$V_1 = 2\sqrt{2}a \left( \frac{1-a}{2} \right)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \frac{1-a}{2} \right)^3$$

我们证明了  $a = \frac{3}{4}$  时有  $H = S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1})$  的最小值,

$$H(\Pi_0) = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} \approx 4.3694$$

我们就证明了结论 4.2.2, 这时的最优截面过棱的四分之一点.

### 4.2.3 平面分割正八面体的三个顶角

我们有结论 4.2.3.

**结论 4.2.3** 用平行于正八面体一个面的平面分割正八面体体积, Hamilton 等周量最小值在截面平分正八面体时取得.

我们计算此时的 Hamilton 等周量:

单位正八面体对面距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 设截面到面 ABC 距离为 $x$ , 如图所截长度为 $c$ , 由平行可知,

截面为等角六面体, 其中每个内角均为 $\frac{2\pi}{3}$ .

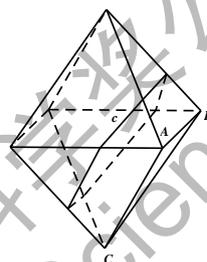
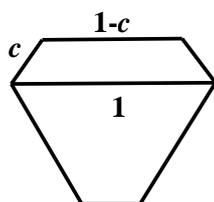


Figure 4.2.3 用平行面分割正八面体

则截面面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2-c) \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2}(1+c) \frac{\sqrt{3}}{2}(1-c) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-2c^2 + 2c + 1) \end{aligned}$$

由相似可知

$$\frac{c}{1} = \frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$c = \frac{3x}{\sqrt{6}}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)$$

其中 $x \in (0, \frac{\sqrt{6}}{3})$

$$V_1 = \int_0^x S dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x \right)$$

$$H = S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1})$$

我们得到在 $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, Hamilton 等周量取得最小值,

$$H(\Pi_0) = S^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) 3^{\frac{13}{4}} \cdot 2^{-3} \approx 4.4417$$

此时的最优截面即为平行于正八面体一面并且平分正八面体的平面.

综上, 在正八面体的这几种较为对称的分割中, 我们得到, 最优分割平面在其平行与中性面, 即分割出一个正四棱锥, 并退化至一个顶角时取到,  $H(\Pi_0) = 3\sqrt{2}$ .

## 5 结论

经过我们的研究我们发现对于例如正四面体, 立方体以及正八面体这类非光滑图形的表面分割, Hamilton 等周量最小值总在尖点退化处取得; 对于单位圆盘以及球冠这类无尖点且有界的非欧氏区域的图形, Hamilton 等周量在平分图形时取到; 对于分割正四面体以及正八面体体积这类既有尖点又有界图形问题时, Hamilton 等周量最小值也是截面退化至尖点时取得.

## 6 展望

本文研究了几类光滑图形的表面积分割问题以及几类含尖点图形的表面分割和体积分割问题. 对于正四面体以及正八面体的体积分割问题, 由于计算难度较大, 结果难以处理, 我们只能说明特殊情况下的分割情况中退化的情况最优, 且优于平分的情况. 但是否最优的情况并非文中讨论的较为对称的情况? 而且对于 Plato 多面体中的正十二面体以及正二十面体, 由于分割情况数较多, 我们需要更加精确有效的方法排除一些情况. 这方面仍有待我们进一步学习新的理论知识和新的方法后, 再做深入地探讨研究.

## 附录

**引理 2.1.1** 对于平面  $\Omega$  上任意长度为  $L$  的封闭曲线  $\gamma$ , 当其为圆时面积最大.

证明: 设

$$\gamma = \{(x(s), y(s)), s \in [s_0, s_1], x(s_0) = x(s_1), y(s_0) = y(s_1)\}.$$

则  $\gamma$  的长度  $L$ :

$$L = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} ds.$$

其中  $x' = \frac{dx}{ds}$ ,  $y' = \frac{dy}{ds}$ .

由格林公式,

$$\int \operatorname{div} F \, dx \, dy = \oint F \cdot v \, ds$$

其中  $F(x, y)$  是向量函数,  $v$  垂直于  $\gamma$  边界,

$$F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad v = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}.$$

取  $P = \frac{1}{2}x$ ,  $Q = \frac{1}{2}y$ .

则  $\gamma$  围成面积

$$A = \int dx dy = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} (xy' - x'y) ds.$$

现在我们希望

$$\max A \quad \text{s. t.} \quad L = L_0.$$

运用拉格朗日乘法

$$I = \max_{x,y} A + \lambda L,$$

$$G = \frac{1}{2} (xy' - x'y) + \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

由欧拉拉格朗日方程

$$\frac{dG}{ds} \frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left( -\frac{1}{2} y + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) - \frac{1}{2} y' = 0,$$

$$\frac{dG}{ds} \frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) + \frac{1}{2} x' = 0,$$

$$-y + \frac{2\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = c_1, \quad x + \frac{2\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = c_2,$$

其中  $c_1, c_2$  为常数.

$$\frac{2\lambda}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{c_1 + y}{x'} = \frac{c_2 - x}{y'},$$

$$(c_1 + y)y' + (x - c_2)x' = 0,$$

$$\frac{d}{ds} [(y + c_1)^2 + (x - c_2)^2] = 0,$$

$$(y + c_1)^2 + (x - c_2)^2 = R^2.$$

因此, 当  $A$  取得最大时,  $\gamma$  为圆, 其中  $2\pi R = L$ .

**引理 2.1.2** 对任意曲线  $\Gamma$  与其端点连线  $L$ , 我们有以  $L$  为弦且与  $\Gamma$  等长的圆弧  $\Gamma_0$ , 使得  $\Gamma_0, L$  围成的面积  $S_{\Gamma_0}$  不小于  $\Gamma, L$  围成面积  $S_{\Gamma}$ .

证明: 补齐  $\Gamma_0$  所对应的圆弧  $\Gamma'$ , 记  $\Gamma_0$  所对圆心角为  $\alpha$ ,  $\Gamma$  和  $\Gamma_0$  长度为  $b$ ,  $\Gamma'$  长度为  $c$ , 圆半径为  $r$ ,

$\Gamma'$  与  $AB$  所成面积  $S_{\Gamma'}$ .

则:

$$\alpha = \frac{b}{r}, \quad c = (2\pi - \alpha)r = \left(2\pi - \frac{b}{r}\right)r.$$

由此有  $c$  为定值.

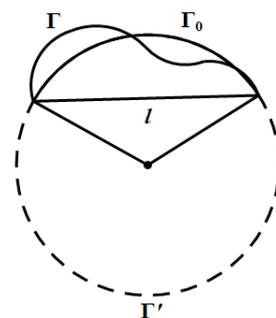
由引理 3.1.1,

$$b + c = b + c,$$

$$S_{\Gamma} + S_{\Gamma'} \geq S_{\Gamma_0} + S_{\Gamma'},$$

$$S_{\Gamma} \geq S_{\Gamma_0}.$$

证毕.



**引理 2.2.1** 给定角  $\varphi$ , 对于给定长度  $L$  的曲线  $\Gamma$ , 其两端在角的两边上. 当其围成面积最大时,  $\Gamma$  是以角的顶点为圆心的圆弧  $\Gamma_0$ .

命题等价于证明: 固定角度  $\varphi$ ,  $OA \leq a$ ,  $OB \leq b$ ,  $a, b$  已知, 固定长度的曲线  $AB$ , 使  $OAB$  面积最大的曲线为圆弧  $AB$ , 且垂直于  $OA, OB$  (即以  $O$  为圆心).

证明: 以  $O$  为原点建立极坐标系, 定义曲线  $AB$  上的点到  $O$  的距离为  $r(\theta)$ ,  $\theta \in [0, \varphi]$

则 AB 长 L 为

$$L = \int_0^\varphi \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} d\theta.$$

则问题变成了

$$\begin{aligned} & \max \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2(\theta) d\theta \\ \text{s. t. } & \int_0^\varphi \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = L_0, \end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned} & \min \left( -\frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2(\theta) d\theta \right) \\ \text{s. t. } & \int_0^\varphi \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = L_0. \end{aligned}$$

下面运用 Euler-Lagrange Equation 证明.

定义:

$$F(\theta, r, r') = -\frac{1}{2}r^2(\theta) + \lambda \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} - L_0,$$

其中  $\lambda$  为 Lagrange 系数.

由 Euler-Lagrange Equation 可知, 最优解满足:

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial r'} - \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (*).$$

因为 F 中没有  $\theta$  项,  $F(\theta, r, r') = F(r, r')$ ,

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{\partial F}{\partial r'} \frac{dr'}{d\theta} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr}{d\theta}$$

(\*) 两边同乘  $r' = \frac{dr'}{d\theta}$ ,

$$\left( \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial r'} \right) r' - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr'}{d\theta} = 0,$$

$$\left( \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial r'} \right) r' - \frac{dF}{d\theta} + \frac{\partial F}{\partial r'} \frac{dr'}{d\theta} = 0,$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( r' \frac{\partial F}{\partial r'} - F \right) = 0,$$

$$r' \frac{\partial F}{\partial r'} - F = c \quad (c \text{ 为常数}),$$

$$\lambda r' \frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} + \frac{1}{2} r^2 - \lambda \sqrt{r^2 + (r')^2} = L_0 + c = c',$$

$$\lambda (r')^2 - \lambda (r^2 + (r')^2) = \left( c' - \frac{1}{2} r^2 \right) \sqrt{r^2 + (r')^2},$$

$$-\lambda r^2 = \left( c' - \frac{1}{2} r^2 \right) \sqrt{r^2 + (r')^2},$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \frac{-2\lambda r^2}{2c' - r^2}.$$

而  $\sqrt{r^2 + (r')^2} > 0$ , 所以:

$$\frac{\lambda}{r^2 - 2c'} > 0.$$

两边积分有

$$L_0 = \int_0^\varphi \frac{-2\lambda r^2}{2c' - r^2} d\theta = \int_0^\varphi \frac{-4\lambda c'}{2c' - r^2} + 2\lambda d\theta.$$

1.  $r^2 - 2c' < 0, \lambda < 0$

令  $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 - 2c' < 0$ , 则  $c' < 0$

此时  $\int_0^\varphi \frac{-4\lambda c'}{2c' - r^2} d\theta = L'$ , 且  $\frac{-4\lambda c'}{2c' - r^2} > 0$ .

$$\begin{aligned} & \max\left(\frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 d\theta\right) \\ \Leftrightarrow & \min\left(-\frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 d\theta\right) \\ \Leftrightarrow & \min\left(\int_0^\varphi 2c' - r^2 d\theta\right). \end{aligned}$$

由 Cauchy—Schwarz:

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi 2c' - r^2 d\theta \cdot \int_0^\varphi \frac{-4\lambda c'}{2c' - r^2} d\theta & \geq \left(\int_0^\varphi \sqrt{2c' - r^2} \sqrt{\frac{-4\lambda c'}{2c' - r^2}} d\theta\right)^2 = \left(\int_0^\varphi \sqrt{-4\lambda c'} d\theta\right)^2. \\ & \Rightarrow 2c' - r^2, \frac{-4\lambda c'}{2c' - r^2} \text{ 为常数,} \\ & \Rightarrow r^2 \text{ 为常数.} \end{aligned}$$

2.  $r^2 - 2c' > 0, \lambda > 0$

$$r \leq \sqrt{r^2 + (r')^2} = \frac{-2\lambda r^2}{2c' - r^2},$$

$$r^2 - 2c' - 2\lambda r \leq 0 \quad \text{对任意 } r(\theta) \text{ 成立}$$

令  $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 - 2c' - 2\lambda r = +\infty$ ,

因此  $\exists r_0$  s. t.  $r_0^2 - 2c' - 2\lambda r_0 > 0$ , 矛盾.

综上,  $r$  为常数, 即曲线为以  $O$  为圆心的圆弧.

**引理 2.2.2** 对于任意三角形, 以最小角为圆心作弧分割三角形, 可以截得三角形一半以上的面积.

证明: 设半径为  $x, x \in (0, M)$ ,

$$S = \frac{1}{2} \alpha x^2.$$

1.  $\triangle ABC$  为锐角三角形.

此时  $h$  为  $BC$  边上的高,

$$S_{max} = \frac{1}{2} \alpha h^2,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah,$$

$$S_{max} > \frac{1}{2}S_{\Delta ABC},$$

$$\Leftrightarrow 2ah > a \Leftrightarrow \frac{a}{\alpha} < 2h.$$

由正弦定理可知,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

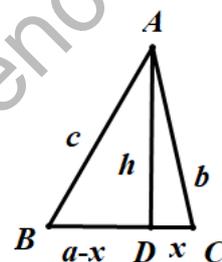
$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R},$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\alpha} < \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2S_{\Delta ABC}}.$$

只需证明  $\frac{abc}{2S_{\Delta ABC}} < 2h$ .

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{2 \cdot \frac{1}{2}ah} < 2h,$$

$$bc < 2h^2.$$



如右图, 设  $CD = x$ , 则  $BD = a - x$ ,

$$b^2 + c^2 = 2h^2 + x^2 + (a-x)^2,$$

$$b^2 + c^2 = 2h^2 + x^2 + (a-x)^2 \geq 2bc,$$

$$2h^2 - bc \geq bc - x^2 - (a-x)^2,$$

$$2h^2 - bc \geq bc - \left[2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\right].$$

而  $b, c \geq a, x \in (0, a)$ ,

所以

$$bc - \left[2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\right] > 0,$$

即  $2h^2 - bc > 0$  得证.

2.  $\Delta ABC$  为钝角三角形.

如图, 以  $A$  为圆心,  $AC$  长为半径作弧, 交  $AB$  于  $E$ , 过  $C$  作  $CD$  垂直  $AB$  于  $D$ .

我们有:

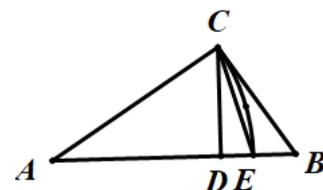
$$AC^2 = CD^2 + AD^2$$

$$CB^2 = CD^2 + BD^2$$

因为  $a \leq b$ , 故  $AD \geq BD$ ,

又  $\Delta ACE$  为顶角为锐角的等腰三角形, 故  $CD$  在  $\Delta ACE$  内, 即  $AD < AE$ .

所以我们有  $AE > BE$ , 则  $S_{\text{扇} CAE} > \frac{1}{2}S_{\Delta ACB}$ , 得证.



2.5.2 我们证明对于给定  $L$ , 以尖点为圆心的四分之三圆分割面积最大.

证明: 我们假设存在圆心角为 $\alpha_1$ 的圆弧, 使得所分割面积最大.

$$L = (2\pi - \alpha)r = (2\pi - \alpha_1)r_1,$$

$$S_1 = \left[ \left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] r^2,$$

$$S_{max} = \left[ \left( \pi - \frac{\alpha_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right] r_1^2,$$

$$S_{max} \geq S_1,$$

$$\left[ \left( \pi - \frac{\alpha_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right] r_1^2 \geq \left[ \left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] r^2,$$

$$\left[ \left( \pi - \frac{\alpha_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right] \left( \frac{(2\pi - \alpha)r}{(2\pi - \alpha_1)} \right)^2 \geq \left[ \left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] r^2,$$

$$\frac{\left( \pi - \frac{\alpha_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}}{(2\pi - \alpha_1)^2} \geq \frac{\left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(2\pi - \alpha)^2}.$$

考虑构造函数

$$f(x) = \frac{\left( \pi - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin x - \sin^2 \frac{x}{2}}{(2\pi - x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{\left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) (2\pi - \alpha)^2 + 2(2\pi - \alpha) \left[ \left( \pi - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin x - \sin^2 \frac{x}{2} \right]}{(2\pi - \alpha)^4},$$

$$f'(x) = \frac{\left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) (2\pi - \alpha) + 2 \left[ \left( \pi - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin x - \sin^2 \frac{x}{2} \right]}{(2\pi - \alpha)^3},$$

$$\text{令 } g(x) = \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) (2\pi - x) + 2 \left[ \left( \pi - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin x - \sin^2 \frac{x}{2} \right], \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$g'(x) = \left( -\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) (2\pi - x) - \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) + 2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right),$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) (2\pi - x) < 0,$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x - \left( \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) (2\pi - x) + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x,$$

$$g''(x) = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) (2\pi - x).$$

$$x \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right) \quad g''(x) < 0 \quad g'(x) \text{ 单调递减} \quad x \in \left( \frac{\pi}{4}, \pi \right) \quad g''(x) > 0 \quad g'(x) \text{ 单调递增},$$

$$g'(0) = -\pi \quad g'(\pi) = -1 + \frac{\pi}{2} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - \frac{3\pi}{4},$$

$$\exists x_0 \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right), \text{ s. t. } g'(x_0) = 0.$$

$x \in (0, x_0)$   $g(x)$  单调递减,  $x \in (x_0, \pi)$   $g(x)$  单调递增, 而  $g(\pi) = -\pi + \pi - 2 < 0$ .

$x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$   $g(x) > 0$   $f(x)$  单调递增,  $x \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right)$   $g(x) < 0$   $f(x)$  单调递减.

所以 $f(x)$ 的最大值在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处取得. 因此, 对于每对符合条件的 $(\alpha, r)$ 都可以调整至 $(\frac{\pi}{2}, r')$ , 使得调整过后的 $S_1' > S_1$ .

此时

$$S_1 = \frac{3\pi}{4}r^2 \quad L = \frac{3\pi}{2}r.$$

得证.

### 2.5.3

(i) 给定  $L$ , 曲线为半圆是分割面积最大.

证明:  $L = \alpha r, S = \frac{\alpha}{2\pi}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha$ .

由同上构造法可得

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2\pi}\pi - \frac{1}{2}\sin x}{x^2},$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x)x^2 - 2x(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x)}{x^4},$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x)x - (x - \sin x)}{x^3}.$$

令 $g(x) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x)x - (x - \sin x)$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2},$$

$$g''(x) = \frac{1}{2}x \cos x.$$

$g'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 单调递减. 而 $g'(0) = 0, g'(2\pi) = 0. \exists x_0 \in$

$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ , s.t.  $g'(x_0) = 0$ . 因此 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 递增,  $(x_0, 2\pi)$ 递减, 而 $g(0) = 0, g(\pi) = 0, g(2\pi) = -2\pi$ , 所以 $x = \pi$ 是 $f(x)$ 的最小值点.

(ii) 给定  $L$ , 曲线为半圆是分割面积最大.

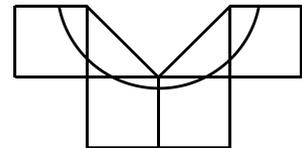
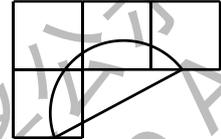
证明:  $L = \alpha r, S = \frac{\alpha}{2\pi}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha - 1$ .

由上同构法可得

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2\pi}\pi - \frac{1}{2}\sin x}{x^2}.$$

此时与(i)相同,  $x = \pi$ 是 $f(x)$ 的最小值点

### 2.5.4

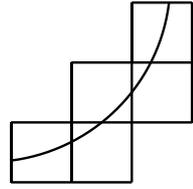


(i) 曲线为垂直边界的四分之一圆有面积最大值.

若该闭合曲线对应圆弧所对圆心角 $\alpha$ 为钝角.

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \left( \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \right),$$

$$S_1 = \frac{\alpha}{2} r^2 + \left( \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \right) r^2 - 3, L = \alpha r = \alpha_1 r_1.$$



同上构造函数 $f(x) = \frac{x+2\sin^2\frac{x}{2}-\sin x}{2x^2}$ .

$$f'(x) = \frac{x(1 + \sin x - \cos x) - 2 \left( x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x \right)}{2x^3}.$$

令 $g(x) = x(1 + \sin x - \cos x) - 2 \left( x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x \right), g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \sin x - \cos x + x(\cos x + \sin x) - 2 + 2 \cos x - 2 \sin x \\ &= \cos x - \sin x - 1 + x(\sin x + \cos x), \end{aligned}$$

$$g''(x) = x(\cos x - \sin x) < 0.$$

因此 $g'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减. 而 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + \frac{\pi}{2} < 0$ , 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减. 因此

$f(x) = \frac{x+2\sin^2\frac{x}{2}-\sin x}{2x^2}$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处取得极大值.

若该闭合曲线对应圆弧所对圆心角 $\alpha$ 为锐角.

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin x - \sin^2 \frac{x}{2} \right),$$

$$S_1 = \frac{\alpha}{2} r^2 + \left( \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \right) r^2 - 3, L = \alpha r = \alpha_1 r_1.$$

同理可构造函数 $f(x) = \frac{\frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x}{x^2}$ .

$$f'(x) = \frac{x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) - 2 \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{x^3},$$

令 $g(x) = x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) - 2 \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \sin^2 \frac{x}{2} \right), g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + x \left( \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right),$$

$$g''(x) = \frac{1}{2} x(\cos x - \sin x).$$

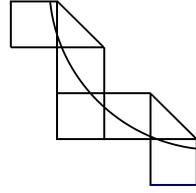
因此 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$   $g''(x) > 0$ ,  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$   $g''(x) < 0$ , 而 $g'(0) = 0, g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

单调递减. 又有 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 所以 $f(x) = \frac{\frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x}{x^2}$ 同样在 $\frac{\pi}{2}$ 处取得极大值.

综上, 只需考虑 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,  $S_1 = \frac{\pi}{4} r^2 - 3, L = \frac{\pi}{2} r$ .

(ii) 曲线为垂直边界的四分之一圆有面积最大值.

$$S_1 = \frac{\alpha}{2} r^2 + \varepsilon r^2 \left( \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \right) - 5, \text{ 其中 } \varepsilon = \begin{cases} -1 & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \alpha = \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \end{cases}$$



因为常数对 $S_1$ 变化无影响, 所以与 3.4.4 相同的, 此时在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 处有局部最优解.

2.6.2 最优圆弧应该满足垂直两端边界.

$$S_1 = \frac{\alpha}{2} r^2 - \frac{1}{2} \sin \alpha r^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} r^2.$$

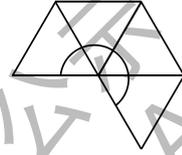
$$\text{构造 } f(x) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin x \right) x^2 - 2x \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{x^4},$$

$$x \in \left( 0, \frac{4\pi}{3} \right) f'(x) > 0, x \in \left( \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right) f'(x) < 0.$$

$f(x)$  在  $x = \frac{4\pi}{3}$  取得最大值, 因此  $\alpha_1 = \frac{4\pi}{3}$ .

此时圆弧两端垂直边界.



2.6.3 最优圆弧应该满足垂直两端边界.

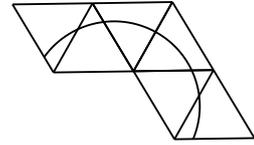
$$S_1 = \frac{\alpha}{2} r^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{构造函数 } f(x) = \frac{\frac{x}{2} + \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \right)}{x^2}.$$

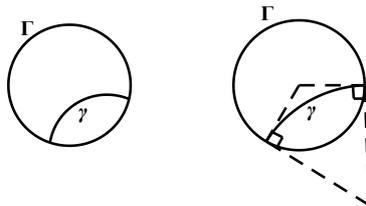
$$f'(x) = \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) x^2 - 2x \left( \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \right)}{x^4},$$

$$x \in \left( 0, \frac{2\pi}{3} \right) f'(x) > 0, x \in \left( \frac{2\pi}{3}, 2\pi \right) f'(x) < 0.$$

$f(x)$  在  $x = \frac{2\pi}{3}$  取得最大值, 因此  $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$ .



**引理 3.1.1** 对于一段圆弧 $\gamma$ 分割圆盘 $\Gamma$ , 分割后的较小部分面积 $S_1$ 的最大值在圆弧两端垂直圆盘的圆弧时取到, 特别地, 当圆弧两端为圆盘的直径两端时, 分割曲线为圆盘的直径.



证明: 事实上, 对于不自我封闭的非劣弧显然在两端可以调整至更优, 而对于封闭的圆, 可将

其移动至与圆盘内切, 此时在显然在切点处调整可更优. 因此只需考虑劣弧即  $\alpha \in (0, \pi)$ .  
对于  $\alpha \in [0, \pi]$ ,

$$S_1 = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{2}\right) \frac{L^2}{\alpha^2} + \sin^{-1} \left(\frac{L}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{L}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

$$\text{令 } f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2}\right) \frac{L^2}{x^2} + \sin^{-1} \left(\frac{L}{x} \sin \frac{x}{2}\right) - \frac{L}{x} \sin \frac{x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{x} \sin \frac{x}{2}\right)^2}.$$

注意到当曲线两端垂直圆盘时, 有  $\alpha_0 + \theta_0 = \pi$ ,  $L = \alpha_0 \cot \frac{\alpha_0}{2}$ .

$$\text{令 } g(x) = x \cot \frac{x}{2},$$

$$g'(x) = \cot \frac{x}{2} - \frac{x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$g'(x) = \frac{\sin x - x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} < 0.$$

可知  $g(x)$  单调递减, 因此  $L$  与  $\alpha$  一一对应并且对于满足  $L = \alpha \cot \frac{\alpha}{2}$ ,  $r = \frac{L}{\alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}$ ,

$$\sin \frac{\theta}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\theta}{2}, \frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\alpha + \theta = \pi.$$

此时有曲线两端垂直圆盘.

$$f'(x) = \frac{-2A^2}{\sqrt{1-A^2}} \left(\frac{L}{x^2} \sin \frac{x}{2} - \frac{L}{2x} \cos \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x + 1}{2x^2}\right) L^2 \text{ 其中 } A = \frac{L}{x} \sin \frac{x}{2}.$$

$$\text{令 } f'(x) = 0,$$

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} L^2 \left(\frac{x^2(\cos x + 1)}{2} - x \sin x\right) = -2L \left(\sin^3 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right),$$

$$\left[4 \left(\sin^3 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \left(\frac{x^2(\cos x + 1)}{2} - x \sin x\right)^2\right] L^2 = \left(\frac{x^2(\cos x + 1)}{2} - x \sin x\right)^2.$$

方程可看作以  $L$  为变量的无一次项的一元二次方程, 且  $L$  有一对相反数解, 而  $L > 0$ , 因此  $L$  仅有唯一解.

考虑  $h(x) = x(\cos x + 1) - 2 \sin x$ .

$$h'(x) = \cos x - x \sin x + 1 - 2 \cos x = 1 - \cos x - x \sin x,$$

$$h''(x) = \sin x - \sin x - x \cos x = -x \cos x.$$

对于  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $h''(x) < 0$ , 对于  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $h''(x) > 0$ . 而  $h'(0) = 0$ ,  $h'(\pi) = 2$ , 因此

$\exists x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  s. t.  $h'(x_1) = 0$ . 对于  $x \in (0, x_1)$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减,  $x \in (x_1, \pi)$ ,  $h'(x) > 0$ ,

$h(x)$  单调递增. 而  $h(0) = 0$ ,  $h(\pi) = 0$ , 可知  $h(x) < 0$ , 因此方程的二次项与常数项不为零,

所以方程有唯一  $L$  关于  $x$  的解. 又  $L = x \cot \frac{x}{2}$  为方程的解, 并且由  $g(x) = x \cot \frac{x}{2}$  的单调性,

$f'(x) = 0$  在  $(0, \pi)$  上有唯一零点  $x_0$ ,  $x_0$  满足  $x_0 \cot \frac{x_0}{2} = L$ . 又有  $f'(\pi) = \frac{-2A^2}{\sqrt{1-A^2}} \frac{L}{\pi^2} < 0$ , 因此对于

每个  $L$ ,  $S_1$  的最大值在  $\alpha = x_0$  或  $\alpha = 0$  时取得. 事实上曲线为弦时, 可视为圆心处于无穷远点, 此时即为  $\alpha = 0$  的情况.

引理证毕.

事实上, 对于引理 2 证明, 与三角形最优分割类似的我们可以给出拉格朗日乘子法证明  
证明: 考虑任意圆弧, 目标是证明垂直边界时最优的, 即

$$x + y = \pi.$$

由正弦定理有

$$\frac{r}{\sin x} = \frac{1}{\sin y}.$$

则面积为

$$S_1 = x - \cos x \sin x + \left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^2 (y - \cos y \sin y).$$

弦长为

$$L = \frac{2y \sin x}{\sin y}.$$

固定  $L_0$ , 使得  $S_1$  最大, 使用拉格朗日乘子法. 定义:

$$f(x, y, \lambda) = S_1 + \lambda(L - L_0).$$

最优解需要满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = L - L_0 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \cos 2x + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 y} (y - \cos y \sin y) + 2\lambda y \frac{\cos x}{\sin y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\sin x}{\sin y}\right) \left[ -2 \frac{\sin x \cos y}{\sin^2 y} (y - \cos y \sin y) + \frac{\sin x}{\sin y} (1 - \cos 2y) + 2\lambda \left(1 - y \frac{\cos y}{\sin y}\right) \right],$$

记  $B = y - \cos y \sin y$ .

由  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  可知

$$2\lambda = - \frac{1 - \cos 2x + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 y} B}{y \frac{\cos x}{\sin y}}.$$

带入  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  可得:

$$-2 \frac{\sin x \cos y}{\sin^2 y} B + \frac{\sin x}{\sin y} (1 - \cos 2y) - \frac{1 - \cos 2x + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 y} B}{y \frac{\cos x}{\sin y}} \left(1 - y \frac{\cos y}{\sin y}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -y \sin 2x \cos y B + y \sin y - \frac{1}{2} y \sin y \sin 2x (1 - \cos 2y) \\
&\quad - (\sin y - y \cos y) [(1 - \cos 2x) \sin^2 y + \sin 2x B] = 0 \\
&\Leftrightarrow -y \sin 2x \cos y B + y \sin y \sin 2x \sin^2 y - 2 \sin^2 x \sin^3 y \\
&\quad + 2 \sin^2 x \sin^2 y y \cos y - \sin 2x B \sin y + \sin 2x B y \cos y = 0 \\
&\Leftrightarrow y (\sin^3 y \sin 2x + 2 \sin^2 x \sin^2 y \cos y - \sin 2x \sin y) \\
&\quad - 2 \sin^2 x \sin^3 y + \sin 2x \cos y \sin^2 y = 0 \\
&\Leftrightarrow 2y \sin x \sin y (\sin y \sin(x+y) - \cos x) \\
&\quad + 2 \sin x \sin^2 y (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 0 \\
&\Leftrightarrow y (\sin y \sin(x+y) - \cos x) + \sin y \cos(x+y) = 0.
\end{aligned}$$

显然  $x + y = \frac{\pi}{2}$  是方程的一个解, 下面证明这是方程的唯一解.

$$\begin{aligned}
g(y) &= y (\sin y \sin(x+y) - \cos x) + \sin y \cos(x+y), \\
g'(y) &= \sin y \sin(x+y) - \cos x + y (\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)) \\
&\quad + \cos y \cos(x+y) - \sin y \sin(x+y) \\
&= y \sin(x+2y) + \cos y \cos(x+y) - \cos x, \\
g''(x) &= \sin(x+2y) + 2y \cos(x+2y) - \sin y \cos(x+y) \\
&\quad - \cos y \sin(x+y) \\
&= \sin(x+2y) + 2y \cos(x+2y) - \sin(x+2y) \\
&= 2y \cos(x+2y).
\end{aligned}$$

因此, 对于任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $y \in (0, \pi - x)$   $g'(y)$  先递增后递减. 而  $g'(0) = 0$ ,  $g'(\pi - x) = -y \sin y - \cos y - \cos(\pi - y) = -y \sin y < 0$ , 因此  $g(y)$  在  $(0, \pi - x)$  先递增后递减. 而  $g(0) = 0$ ,  $g(\pi - x) = -y \cos x - \sin y < 0$ . 因此  $g(y)$  在  $(0, \pi - x)$  上有唯一零点, 即对于任意  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 存在唯一  $y \in (0, \pi - x)$ , 使得方程有解. 又有  $x + y = \frac{\pi}{2}$  是方程的一个解. 从而证明了  $x + y = \frac{\pi}{2}$  是方程的唯一解.

引理证毕.

考虑到在下一节中, 我们将研究非欧几里德平面的测地线盘, 我们在这里给出引理的变分证明.

证明:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ .

考虑分割面积不变的最优曲线

$$\gamma_0: [0, L] \rightarrow D$$

$$\forall t \in [0, L], \gamma_0(t) \in D, \text{ 其中 } \gamma_0(0), \gamma_0(L) \in \partial D, |\gamma_0'(t)| = 1.$$

考虑  $\gamma_0$  的变分:

$$\gamma: [0, L] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow D,$$

$$\gamma(0, u), \gamma(L, u) \in \partial D.$$

$$L(u) = \int_0^L \left| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle} dt, \\
L'(u) &= \int_0^L \frac{\frac{\partial \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle}{\partial u}}{2\sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle}} dt \\
&= \int_0^L \frac{\left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle}} dt.
\end{aligned}$$

令  $u = 0$ , 则  $\left| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right| = 1$ , 记  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = T$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial u} = v$ ,

$$\begin{aligned}
L'(0) &= \int_0^L \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= \int_0^L \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= \int_0^L \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial u}, T \right\rangle dt \\
&= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \langle v, T \rangle dt - \int_0^L \left\langle v, \frac{dT}{dt} \right\rangle dt \\
&= \langle v, T \rangle \Big|_{t=0}^L - \int_0^L \left\langle v, \frac{dT}{dt} \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

由变分的任意性得

$$\langle v, T \rangle \Big|_{t=0}^L = \int_0^L \left\langle v, \frac{dT}{dt} \right\rangle dt = 0,$$

$$\langle v, T \rangle \Big|_{t=0}^L = v(L)T(L) - v(0)T(0) = 0.$$

所以曲线与边界垂直.

设  $v(t) = l(t)T + f(t)n$ ,

$$\int_0^L \left\langle v, \frac{dT}{dt} \right\rangle dt = \int_0^L \langle f(t)n, \mathcal{K}(t)n \rangle dt = \int_0^L f(t)\mathcal{K}(t)dt.$$

由于面积不变

$$\int_0^L f(t)n dt = 0.$$

由  $f(t)$  的任意性得

$$\mathcal{K}(t) \equiv c.$$

其中  $c$  为常数.

因此此时的最优曲线时两端垂直于边界的圆弧.

3.1.2  $H = \frac{L^2 \pi}{S_1(\pi - S_1)}$  单调递增.

$$\begin{aligned}
\ln H &= 2 \ln L + \ln \pi - \ln S_1 - \ln(\pi - S_1), \\
\frac{d \ln H}{d \theta} &= \frac{2}{L} \frac{dL}{d \theta} - \frac{1}{S_1} \frac{dS_1}{dx} + \frac{1}{\pi - S_1} \frac{dS_1}{dx}
\end{aligned}$$

$$\propto 2S_1(\pi - S_1) \frac{dL}{d\theta} - L(\pi - S_1) \frac{dS_1}{dx} + LS_1 \frac{dS_1}{dx}.$$

$$\text{记 } W = 2S_1(\pi - S_1) \frac{dL}{d\theta} - L(\pi - S_1) \frac{dS_1}{dx} + LS_1 \frac{dS_1}{dx}.$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{2}{\tan \theta} - \frac{2\theta}{\sin^2 \theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dx} &= -1 - \cos 2\theta + \frac{2}{\tan \theta} \left( -\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) (\theta - \sin \theta \cos \theta) + \cot^2 \theta (1 - \cos 2\theta) \\ &= -2 \cos^2 \theta + \frac{-2\theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta \cos 2\theta}{\sin^3 \theta} \\ &= \frac{3 \cos^2 \theta \sin \theta - 2\theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta \sin^3 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\sin^3 \theta} \\ &= \frac{2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2\theta \cos \theta}{\sin^3 \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta (\cos \theta \sin \theta - \theta)}{\sin^3 \theta}. \end{aligned}$$

记  $A = -\theta - \sin \theta \cos \theta + \cot^2 \theta (\theta - \sin \theta \cos \theta)$ ,  $B = \cos \theta \sin \theta - \theta$ .  
则

$$S_1 = \frac{\pi}{2} + A,$$

$$\begin{aligned} W &= 2 \left( \frac{\pi}{2} + A \right) \left( \frac{\pi}{2} - A \right) \frac{2B}{\sin^2 \theta} - \pi \cdot 2\theta \frac{1}{\tan \theta} \frac{2 \cos \theta B}{\sin^3 \theta} + 2 \cdot 2\theta \frac{1}{\tan \theta} \left( \frac{\pi}{2} + A \right) \frac{2 \cos \theta B}{\sin^3 \theta} \\ &= 4B \left( \frac{\pi^2}{4} - A^2 \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4\theta \pi \cos^2 \theta B}{\sin^4 \theta} + \frac{8\theta \left( \frac{\pi}{2} + A \right) \cos^2 \theta B}{\sin^4 \theta} \\ &= \frac{4B}{\sin^4 \theta} \left[ \left( \frac{\pi^2}{4} - A^2 \right) \sin^2 \theta - \theta \pi \cos^2 \theta + 2\theta \left( \frac{\pi}{2} + A \right) \cos^2 \theta \right] \\ &= \frac{4B}{\sin^4 \theta} \left[ \left( \frac{\pi^2}{4} - A^2 \right) \sin^2 \theta + 2A\theta \cos^2 \theta \right] \\ &= \frac{4B}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\pi^2}{4} - A^2 + \frac{2A\theta}{\tan^2 \theta} \right). \end{aligned}$$

下面证明  $A^2 - \frac{2A\theta}{\tan^2 \theta}$  单调递减.

$$\text{设 } g(\theta) = A^2 - \frac{2A\theta}{\tan^2 \theta},$$

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 2A \frac{dA}{d\theta} - 2\theta \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{dA}{d\theta} - 2A \left[ \frac{1}{\tan^2 \theta} + 2 \frac{\theta}{\tan \theta} \left( -\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \right] \\ &= 2A \frac{2 \cos \theta B}{\sin^3 \theta} - 2\theta \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{2 \cos \theta B}{\sin^3 \theta} - \frac{2A}{\tan^2 \theta} + \frac{4A\theta}{\sin^2 \theta \tan \theta} \\ &= \frac{4AB \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \cos^3 \theta B - 2A \sin^3 \theta \cos^2 \theta + 4A\theta \sin^2 \theta \cos \theta}{\sin^5 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin^5 \theta} (4AB \sin^2 \theta - 4 \cos^2 \theta B - 2A \sin^3 \theta \cos^2 \theta + 4A\theta \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \theta}{\sin^5 \theta} (-4A\theta \sin^2 \theta + 4A \sin^3 \theta \cos \theta + 4\theta^2 \cos^2 \theta - 4\theta \cos^3 \theta \sin \theta \\
&\quad - 2A \sin^3 \theta \cos^2 \theta + 4A\theta \sin^2 \theta) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin^5 \theta} (2A \sin^3 \theta \cos^2 \theta + 4\theta^2 \cos^2 \theta - 4\theta \cos^3 \theta \sin \theta) \\
&= \frac{2 \cos^3 \theta}{\sin^5 \theta} (A \sin^3 \theta + 2\theta^2 - 2\theta \cos \theta \sin \theta) \\
&= \frac{2 \cos^3 \theta}{\sin^5 \theta} (-\theta \sin^3 \theta - \sin^4 \theta \cos \theta + \theta \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^3 \theta \\
&\quad - 2\theta \cos^2 \theta \sin \theta + 2\theta^2 \cos \theta) \\
&= \frac{2 \cos^3 \theta}{\sin^5 \theta} (2\theta^2 \cos \theta - \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta).
\end{aligned}$$

设  $h(\theta) = 2\theta^2 \cos \theta - \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta$ ,

$$\begin{aligned}
h(\theta) &= \cos \theta (2\theta^2 - \theta \tan \theta - \sin^2 \theta) \\
&= \cos \theta \left( -\sin^2 \theta + 2\theta^2 - \frac{\theta^4}{\sin^2 \theta} + \frac{\theta^4}{\sin^2 \theta} - \theta \tan \theta \right) \\
&= \cos \theta \left[ -\left( \sin \theta - \frac{\theta^2}{\sin^2 \theta} \right)^2 + \frac{\theta^4}{\sin^2 \theta} - \theta \tan \theta \right].
\end{aligned}$$

因为  $-\left( \sin \theta - \frac{\theta^2}{\sin^2 \theta} \right)^2 \leq 0$ , 所以只需证明  $\frac{\theta^4}{\sin^2 \theta} - \theta \tan \theta < 0$ , 等价于证明  $\theta^3 - \tan \theta \sin^2 \theta < 0$ .

设  $K(x) = x^3 - \tan x \sin^2 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$K'(x) = 3x^2 - \tan^2 x - 2 \sin^2 x,$$

$$K''(x) = 6x - 2 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} - 4 \sin x \cos x,$$

$$\begin{aligned}
K'''(x) &= 6 - \frac{2}{\cos^4 x} - 4 \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} - 4 \cos^2 x + 4 \sin^2 x \\
&= \frac{1}{\cos^4 x} (6 \cos^4 x - 2 - 4 \sin^2 x - 4 \cos^6 x + 4 \sin^2 x \cos^4 x).
\end{aligned}$$

设  $P(x) = 6 \cos^4 x - 2 - 4 \sin^2 x - 4 \cos^6 x + 4 \sin^2 x \cos^4 x$ ,

$$\begin{aligned}
P(x) &= 6 \cos^4 x - 2 - 4 + 4 \cos^2 x - 4 \cos^6 x + 4 \cos^4 x - 4 \cos^6 x \\
&= -8 \cos^6 x + 10 \cos^4 x + 4 \cos^2 x - 6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{P'(x)}{2} &= -\sin x (-24 \cos^5 x + 20 \cos^3 x + 4 \cos x) \\
&= 4 \sin x \cos x (6 \cos^4 x - 5 \cos^2 x - 1) \\
&= 4 \sin x \cos x [5(\cos^2 x - 1) \cos^2 x + \cos^4 x - 1] < 0.
\end{aligned}$$

$P(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递减, 而  $P(0) = 0, P(x) < 0$ , 即  $K'''(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递减. 而  $K'''(0) = 0$ ,

$K'''(x) < 0$ , 即  $K''(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递减. 而  $K''(0) = 0$ , 有  $K''(x) < 0$ , 即  $K'(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递

减. 而  $K'(0) = 0$ , 有  $K'(x) < 0$ , 即  $K(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递减因此  $K(x) < K(0) = 0$ , 即  $\theta^3 -$

$$\tan \theta \sin^2 \theta < 0.$$

因此  $h(\theta) \leq 0$ ,  $g'(\theta) \leq 0$ ,  $g(\theta)$  单调递减, 而  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ , 因此  $\frac{\pi^2}{4} - A^2 + \frac{2A\theta}{\tan^2 \theta} \leq 0$ . 又有

$B = \cos \theta \sin \theta - \theta \leq \sin \theta - \theta \leq 0$ , 因此  $\frac{d \ln H}{d\theta} \geq 0$ ,  $H$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递增.

**引理 3.2.1** 对于单位球上的球冠的最优分割是两端垂直于球冠边界的圆弧.

实际上, 该引理证明与上一节圆盘的变分证明基本一致, 设球冠到球心距离为  $d$ , 只需  $\mathbb{D} = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq d\}$ ,  $\partial \mathbb{D} = \{(x, y, d) \in R^3 | x^2 + y^2 + d^2 = 1\}$ ,  $v(t) = l(t)T + f(t)n + g(t)N$ ,  $N$  为垂直球面的单位向量, 而  $N$  不对面积变化产生影响, 因此可以得出相同的结论.

### 3.2 Hamilton 等周量最小值的计算.

我们不妨考虑半径为 1 时  $z = \frac{1}{2}$  的球冠, 设平面为  $ax + by + cz = d$ , 其中  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

$$\text{交线 } C_1 \begin{cases} ax + by + cz = d \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \quad C_2 = \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

设交点为  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ .

$C_2$  在  $P_0$  处的切向量为  $\vec{t}_2(-y_0, x_0, 0)$ ,  $C_1$  在  $P_0$  处的切向量  $\vec{t}_1 \perp (a, b, c)$  且  $\vec{t}_1 \perp (x_0, y_0, \frac{1}{2})$ .

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 &= \left( \begin{vmatrix} b & c \\ y_0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ \frac{1}{2} & x_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left( \frac{b}{2} - cy_0, cx_0 - \frac{a}{2}, ay_0 - bx_0 \right). \end{aligned}$$

而由引理 4.2.1,  $\vec{t}_1 \perp \vec{t}_2$ ,

$$-\left(\frac{b}{2} - cy_0\right)y_0 + \left(cx_0 - \frac{a}{2}\right)x_0 = 0,$$

$$-\frac{1}{2}by_0 + cx_0^2 + cy_0^2 - \frac{a}{2}x_0 = 0,$$

$$-\frac{1}{2}by_0 - \frac{1}{2}ax_0 + \frac{3}{4}c = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\left(d - \frac{c}{2}\right) + \frac{3}{4}c = 0.$$

从而得到了  $c = \frac{d}{2}$ .

下面考虑截面面积.

$$\Omega_1: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Omega_2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz \leq 2c \end{cases}$$

由对称性, 令  $b = 0$ , 则

$$\Omega_2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{1 - c^2}x + cz \leq 2c \end{cases}$$

其中  $c \in [0, \frac{1}{2}]$ .

截面面积为  $\Omega_1, \Omega_2$ , 先求交点  $P_1, P_2$  坐标.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \\ \sqrt{1 - c^2}x + cz = 2c \\ x_0 = \frac{3c}{2\sqrt{1 - c^2}} \end{cases}$$

考虑  $z = \frac{1}{2}$  平面上的弧长

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{x_0}{r} \\ &= \arccos \sqrt{3} \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \end{aligned}$$

$$L_1 = 2\theta r = \sqrt{3} \arccos \sqrt{3}.$$

考虑  $\sqrt{1 - c^2}x + cz = 2c$  平面上的弧长.

圆心:  $2c(\sqrt{1 - c^2}, 0, c)$ , 半径  $r = \sqrt{1 - \frac{(2c)^2}{1 - c^2 + c^2}} = \sqrt{1 - 4c^2}$ ,

弦长  $L = 2y_0$ .

$$x_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\frac{9c^2}{4(1 - c^2)} + y_0^2 = \frac{3}{4},$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1 - 4c^2}}{2\sqrt{1 - c^2}},$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \right).$$

弧长

$$L_2 = 2\varphi\sqrt{1 - 4c^2}.$$

由 Gauss-Bonnet 公式可知,

$$2\alpha + \int_D K dA + \int_{\partial D} K_g dS = 2\pi,$$

球面曲率  $K=1$ , 圆盘 geodesic curvature  $K_g = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}$ .

所以

$$S = \pi - k_1 l_1 - k_2 l_2$$

$$\begin{aligned}
&= \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{1-c^2}} - 4c \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-c^2}}, \\
L &= 2\sqrt{1-4c^2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-c^2}}, \\
dL &= \frac{2\sqrt{3}c}{1-c^2} - \frac{4c}{1-4c^2} L, \\
dS &= \frac{1}{\sqrt{1-4c^2}} \left( \frac{\sqrt{3}(1-4c^2)}{1-c^2} - 2L \right).
\end{aligned}$$

记  $A_1 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-c^2}}$ ,  $A_2 = \arccos \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{1-c^2}}$ .

$$\begin{aligned}
&\frac{d \ln H}{dc} \propto 2S(\pi - S)dL - L\pi ds + 2LSdS \\
&= \frac{2(4A_1c^2 - 4A_1 + \sqrt{3}\sqrt{1-4c^2})(8A_1^2c + 8A_1A_2c^2 + 2A_1A_2 - 4\pi A_1c^2 - \pi A_1 + 2A_2^2c - 2\pi A_2c)}{(c^2 - 1)\sqrt{1-4c^2}}.
\end{aligned}$$

目标证明  $\frac{d \log H}{dc} \geq 0$ .

因为

$$\begin{aligned}
&c^2 - 1 < 0, \\
&4A_1c^2 - 4A_1 + \sqrt{3}\sqrt{1-4c^2} \\
&= 4A_1(c^2 - 1) + \sqrt{3}\sqrt{1-4c^2} \\
&= (c^2 - 1) \left( 4A_1 - \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4c^2}}{1-c^2} \right).
\end{aligned}$$

而

$$dA_1 = \frac{\sqrt{3}c}{(1-c^2)\sqrt{1-4c^2}} > 0.$$

因此  $A_1$  单调递增.

而对于  $B = \frac{\sqrt{1-4c^2}}{1-c^2}$ ,

$$\begin{aligned}
B' &= \frac{-8c}{2\sqrt{1-4c^2}}(1-c^2) + \frac{2c\sqrt{1-4c^2}}{(1-c^2)^2} \\
&\propto -2(1-c^2) + (1-4c^2) \\
&= -2c^2 - 1 < 0.
\end{aligned}$$

而当  $c = 0$  时,

$$4A_1 - \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4c^2}}{1-c^2} = 4.16 - \sqrt{3} > 0.$$

因此

$$4A_1c^2 - 4A_1 + \sqrt{3}\sqrt{1-4c^2} < 0.$$

下面我们证明:

$$8A_1^2c + 8A_1A_2c^2 + 2A_1A_2 - 4\pi A_1c^2 - \pi A_1 + 2A_2^2c - 2\pi A_2c \geq 0,$$

记上述函数为  $f(c)$ .

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dc} &= \frac{d}{dc} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-c^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4(1-c^2)}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-c^2}} \cdot \frac{-2c}{(1-c^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}c}{(1-c^2)\sqrt{1-4c^2}}. \\ \frac{dA_2}{dc} &= \frac{d}{dc} \arccos \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{1-c^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3c^2}{1-c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1-c^2} = -\frac{1}{c} \frac{dA_1}{dc}.\end{aligned}$$

对 $f$ 求导

$$\begin{aligned}f'(c) &= 8A_1^2 + 16A_1c dA_1 + 16A_1A_2c + 8c^2 \left( A_2 dA_1 - \frac{A_1 dA_1}{c} \right) + 2A_2 dA_1 - \frac{2A_1 dA_1}{c} \\ &\quad - 4\pi dA_1 c^2 - 8\pi A_1 c - \pi dA_1 + 2A_2^2 - 4A_2 dA_1 - 2\pi A_2 + 2\pi dA_1 \\ &= \left[ \pi(1-4c^2) + 2A_2(4c^2-1) + 2A_1 \left( 4c - \frac{1}{c} \right) \right] dA_1 + 8A_1^2 + 16A_1A_2c - 8\pi A_1 c + 2A_2^2 \\ &\quad - 2\pi A_2 \\ &= 8A_1^2 + 16A_1A_2c - 8\pi A_1 c + 2A_2^2 - 2\pi A_2 + \sqrt{1-4c^2}(\pi c - 2A_2c - 2A_1) \frac{\sqrt{3}}{1-c^2}.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}h(c) &= 8A_1^2 + 16A_1A_2c - 8\pi A_1 c + 2A_2^2 - 2\pi A_2, \\ g(c) &= -\sqrt{1-4c^2}(\pi c - 2A_2c - 2A_1) \frac{\sqrt{3}}{1-c^2}.\end{aligned}$$

我们首先证明 $h(c), g(c)$ 单调递减且为凹函数.

先考虑 $h(c)$ .

$$\begin{aligned}h'(c) &= 16A_1 dA_1 + 16A_1A_2 + 16cA_2 dA_1 - 16A_1 dA_1 - 4A_2 \frac{dA_1}{c} - 8\pi A_1 - 8\pi c dA_1 + 2\pi \frac{dA_1}{c} \\ &= (16A_1A_2 - 8\pi A_1) + \left( 16cA_2 - \frac{4A_2}{c} - 8\pi c + \frac{2\pi}{c} \right) dA_1 \\ &= 8A_1(2A_2 - \pi) + (\pi - 2A_2) \left( \frac{2}{c} - 8c \right) dA_1 \\ &= 2(\pi - 2A_2) \left( \frac{\sqrt{3}}{1-c^2} \sqrt{1-4c^2} - 4A_1 \right).\end{aligned}$$

而

$$\pi - 2A_2 > 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{1-c^2} \sqrt{1-4c^2} - 4A_1 < 0 \text{ (上文已证)}.$$

因此有

$$h'(c) < 0.$$

下面证明 $h(c)$ 为凹函数.

注意到 $\pi - 2A_2$ 单调递增,  $\frac{\sqrt{3}}{1-c^2} \sqrt{1-4c^2} - 4A_1$ 单调递减且小于0, 所以 $h'(c)$ 单调递减, 从而我们得到 $h(c)$ 为凹函数.

接着考虑 $g(c)$ .

$$g(c) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4c^2}}{1-c^2}(2A_1 + 2A_2c - \pi c),$$

$$g'(c) = \sqrt{3} \frac{\sqrt{1-4c^2}}{\sqrt{1-c^2}}(2dA_1 + 2A_2 - 2dA_1 - \pi)$$

$$+ \sqrt{3} \frac{-8c}{2\sqrt{1-4c^2}} \frac{(1-c^2) + 2c\sqrt{1-4c^2}}{(1-c^2)^2} (2A_1 + 2A_2c - \pi c)$$

$$= \sqrt{3} \frac{\sqrt{1-4c^2}}{1-c^2} (2A_2 - \pi) - \sqrt{3} \frac{2c(1+2c^2)}{(1-c^2)\sqrt{1-4c^2}} (2A_1 + 2A_2c - \pi c).$$

注意到

$$C = 2A_1 + 2A_2c - \pi c,$$

$$C' = 2A_2 - \pi < 0.$$

当 $c = \frac{1}{2}$ ,  $C = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi > 0$ , 所以 $C > 0$ . 而 $2A_2 - \pi < 0$ , 所以 $g'(c) < 0$ .

考虑对 $g(c)$ 取对数.

$$\ln g(c) = \frac{1}{2} \ln(1-4c^2) - \ln(1-c^2) + \ln(2A_1 + 2A_2c - \pi c),$$

$$[\ln g(c)]' = -\frac{4c}{1-4c^2} + \frac{2c}{1-c^2} + \frac{2A_2 - \pi}{2A_1 + 2A_2c - \pi c}.$$

因为 $2A_2 - \pi$ 单调递减且小于0,  $2A_1 + 2A_2c - \pi c$ 单调递增且大于零, 所以 $\frac{2A_2 - \pi}{2A_1 + 2A_2c - \pi c}$ 递减.

而

$$-\frac{4c}{1-4c^2} + \frac{2c}{1-c^2} = \frac{-2c-4c^3}{(1-4c^2)(1-c^2)}.$$

注意到 $2c + 4c^3$ 递增,  $(1-4c^2)(1-c^2)$ 递减, 所以 $\frac{-2c-4c^3}{(1-4c^2)(1-c^2)}$ 递减.

从而 $[\ln g(c)]'$ 递减, 也即 $g(c)$ 也为凹函数.

现在我们证明 $f(c) \geq 0$ .

(1) 缩小左边区间.

$$h(0) > g(0).$$

令 $h(c_1) = g(0)$ ,  $c_1 \approx 0.154$ .

在 $[0, c_1]$ ,  $h(c) > g(c)$ ,  $f'(c) > 0$ ,  $f(c)$ 递增,  $f(c) \geq 0$ .

(2) 缩小右边区间.

$$h'(c) = 2(\pi - 2A_2) \left( \frac{\sqrt{3}}{1-c^2} \sqrt{1-4c^2} - 4A_1 \right),$$

$$h' \left( \frac{1}{2} \right) = -4\pi^2.$$

在 $(\frac{1}{2}, 0)$ 处做 $h(c)$ 的切线 $l_1$ ,

$$l_1: y = -4\pi^2 \left( c - \frac{1}{2} \right).$$

令 $g(c_2) = -4\pi^2 \left( c_2 - \frac{1}{2} \right)$ , 则 $c_2 \approx 0.467$ .

在  $[c_2, \frac{1}{2}]$ ,  $g(c) \geq h(c)$ ,  $f'(c) \leq 0$ ,  $f(c)$  单调递减,  $f(c) \geq 0$ .

(3) 再次缩小右边区间.

在  $(c_2, h(c_2))$  再做  $h(c)$  的切线  $l_2$ :

$$l_2: y - h(c_2) = h'(c_2)(c - c_2).$$

令  $g(c_3) = h'(c_2)(c_3 - c_2) + h(c_2)$ , 则  $c_3 \approx 0.411$ .

同理在  $[c_3, \frac{1}{2}]$ ,  $f'(c) \leq 0$ ,  $f(c)$  单调递减,  $f(c) \geq 0$ .

(4) 再次缩小右边区间.

在  $(c_3, h(c_3))$  处再做  $h(c)$  的切线  $l_3$ :

$$l_3: y - h(c_3) = h'(c_3)(c - c_3).$$

令  $g(c_4) = h'(c_3)(c - c_3) + h(c_3)$ , 则  $c_4 \approx 0.393$ .

同理在  $[c_4, \frac{1}{2}]$ ,  $f(c) \geq 0$ .

(5) 缩小左边两次.

$$h(c_1) > g(c_1).$$

令  $h(c_5) = g(c_1)$ , 则  $c_5 \approx 0.203$ .

$$h(c_5) > g(c_5).$$

令  $h(c_6) = g(c_5)$ , 则  $c_6 \approx 0.232$ .

同理在  $[0, c_6]$ ,  $f(c) \geq 0$ .

(6) 最后我们在  $[c_6, c_4]$  完成证明.

连接  $(c_6, h(c_6))$  与  $(c_4, h(c_4))$ , 计算斜率,

$$k_1 = \frac{h(c_6) - h(c_4)}{c_6 - c_4} \approx -7.7996.$$

在  $g(c)$  中找出  $g'(c) = k_1$  的点做出切线, 记切线与连线的距离为  $d_1$ , 则对于  $\forall g(c) > h(c)$ ,  $|g(c) - h(c)| < |d_1 \cdot k_1|$ .

$h(c_6)$  与  $h(c_4)$  连线  $l_4$ :

$$l_4: y - h(c_4) = k_1(c - c_4).$$

令  $g'(c') = k_1$ ,  $c' \approx 0.365$ .

$$d_1 = \frac{|k_1(c' - c_4) - g(c') + h(c_4)|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} \approx 0.02789,$$

$$|d_1 \cdot k_1| \approx 0.2175.$$

对于  $c \in [c_6, c_4]$  且  $g(c) > h(c)$ , 有  $f(c) > f(c_4) - |d_1 \cdot k_1| |c_4 - c_6| = 0.000918 > 0$ .

同理, 连接  $(c_6, g(c_6))$  与  $(c_4, g(c_4))$ :

$$k_2 = \frac{g(c_4) - g(c_6)}{c_4 - c_6} \approx -5.9638.$$

在  $h(c)$  中做斜率为  $k_2$  的切线, 同样定义  $d_2$ ,  $|h(c) - g(c)| < |d_2 \cdot k_2|$ .

令  $h'(c'') = k_2$ ,  $c'' \approx 0.272$ ,

$$d_2 = \frac{|k_2(c'' - c_4) - h(c'') + g(c_4)|}{\sqrt{k_2^2 + 1}} \approx 0.02031,$$

$$|d_2 \cdot k_2| \approx 0.12114.$$

对于  $c \in [c_6, c_4]$  且  $h(c) > g(c)$ , 有  $f(c) > f(c_4) - |d_2 \cdot k_2| |c_4 - c_6| = 0.0164 > 0$ .

综上, 对于  $\forall c \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $f(c) \geq 0$ .

从而我们证明了  $\frac{d \ln H}{dc} \geq 0$ , 即  $H$  递增. 因此当  $c = 0$  时, 取到 Hamilton 等周量最小值. 此时截面为过球心且平分球冠.

#### 4.1.2

(i) 证明:

$$\begin{cases} V_1(a, b) \leq V_1\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \\ S(a, b) \geq S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \end{cases}$$

且  $a = b$  时取等, 其中  $a + b = c$ ,  $c$  为常数.

证明:

$$V_1(a, b) = 4\sqrt{2}ab(3 - a - b) \leq 4\sqrt{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(3 - a - b) = V_1\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right),$$

$$S(a, b) = 2\sqrt{(a+b)^2 + 2(a-b)^2}(2 - a - b) \geq 2(a+b)(2 - a - b) = S\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right),$$

且都在  $a = b$  时取等.

(ii) 我们说明:

$$H = S^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right) = (\sqrt{2}x - 2x^2)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{12} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)} \right)$$

在  $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  时取到最小值.

证明:

令

$$f(x) = (\sqrt{2}x - 2x^2)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{12} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)} \right) \quad x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{S^{\frac{3}{2}}}{V_1\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right)},$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2} \frac{3}{2} S^{\frac{1}{2}} S' V_1\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right) - S^{\frac{3}{2}} \left[ S\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right) - V_1 S \right]}{12 \left[ V_1\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right) \right]^2},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{3}{2}S'V_1\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right) - S^2\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - 2V_1\right),$$

$$g(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \left[-6V_1\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right) - S^2\left(-\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}x - \frac{2}{3}\right)\right].$$

下面我们证明  $h(x) = -6V_1\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - V_1\right) - S^2\left(-\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}x - \frac{2}{3}\right) > 0$ .

$$h'(x) = -6S\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - 2V_1\right) - 2SS'\left(-\frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}x - \frac{2}{3}\right) - S^2\left(-\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}\sqrt{2}\right).$$

令

$$\begin{aligned} w(x) &= -6\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - 2V_1\right) + 2S'\left(\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}x + \frac{2}{3}\right) + S\left(\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) \\ &= -\frac{8}{3}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}x - 2x^2) \\ &= \frac{8}{3}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[(\sqrt{2}x - 2x^2) - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\text{令 } T(x) = (\sqrt{2}x - 2x^2) - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$T(x) = -3x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{4},$$

$$T(0) = 0 \quad T\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$\exists x_0 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  s.t.  $T(x_0) = 0$ ,  $h(x)$  在  $(0, x_0)$  递增,  $(x_0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  递减. 而  $h(x) > \min\{h(0), h(\frac{\sqrt{2}}{2})\} =$

0. 因此,  $f(x)$  在  $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  取到最小值.

#### 4.2.1

$$(3\sqrt{2}V_1)^{\frac{3}{2}} \leq S_1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{4\sqrt{2}}{(4-a^2)(4-b^2)}\right]^{\frac{3}{2}} \leq \frac{4\sqrt{a^2+b^2+4}}{(4-a^2)(4-b^2)}$$

$$\Leftrightarrow (4-a^2)(4-b^2) \leq 2(a^2+b^2+4)^{\frac{3}{2}}.$$

而

$$(4-a^2)(4-b^2) \leq \left(\frac{8-a^2-b^2}{2}\right)^2.$$

因此只需证明

$$\left(\frac{8-a^2-b^2}{2}\right)^2 \leq 2(a^2+b^2+4)^{\frac{3}{2}}.$$

令  $x = a^2 + b^2 + 4$ ,  $x \in [4, 12]$ ,

$$\Leftrightarrow 8x^{\frac{3}{2}} - (x-12)^2 \geq 0.$$

令  $f(x) = 8x^{\frac{3}{2}} - (x-12)^2$ ,  $x \in [4, 12]$ ,  $f(4) = 0$ .

$$f'(x) = 12x^{\frac{1}{2}} - 2(x-12) = -2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 12x^{\frac{1}{2}} + 24.$$

而  $f'(4) = 24 + 16 = 40 > 0$ ,  $f'(12) = 12^{\frac{3}{2}} > 0$ , 因此  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $[4, 12]$  递增, 因此

$8x^{\frac{3}{2}} - (x-12)^2 \geq 0$ , 等号在  $a=b=0$  时取得, 此时平面  $\Pi$  平行中性面.

#### 4.2.2

我们证明  $H = S^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$  在  $a = \frac{3}{4}$  时取到最小值.

证明:

$$S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(a+1)\frac{1-a}{2}\sqrt{2},$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a^2),$$

$$V_1 = 2\left\{\left[\sqrt{2}a\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right] + \frac{2}{3}\left[\sqrt{2}\left(\frac{1-a}{2}\right)^3\right]\right\},$$

$$V_1 = 2\sqrt{2}a\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1-a}{2}\right)^3.$$

令  $\frac{1-a}{2} = x$ ,  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

$$V_1 = 2\sqrt{2}x^2(1-2x) + \frac{4\sqrt{2}}{3}x^3,$$

$$V_1 = 2\sqrt{2}x^2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x^3.$$

$$H = S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1}) = [2\sqrt{2}x(1-x)]^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\left(2\sqrt{2}x^2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x^3\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}x^2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x^3\right)},$$

$$H = [2\sqrt{2}x(1-x)]^{\frac{3}{2}} \frac{3\sqrt{2}}{2(6x^2 - 8x^3)(1 - 6x^2 + 8x^3)}.$$

令  $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}{(3x^2 - 4x^3)(1 - 6x^2 + 8x^3)}$ ,  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{A^2} \left[ \left( \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \right) (3x^2 - 4x^3)(1 - 6x^2 + 8x^3) \right.$$

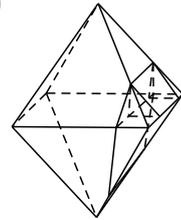
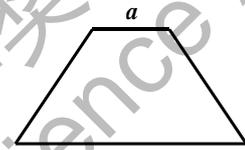
$$\left. - x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} \left( (12x - 24x^2)((1 - 6x^2 + 8x^3)) \right) \right.$$

$$\left. + (3x^2 - 4x^3)(-12x + 24x^2) \right].$$

其中  $A = (3x^2 - 4x^3)(1 - 6x^2 + 8x^3)$ .

$$f'(x) \propto 3(1-2x)(3-4x)(1-6x^2+8x^3) - 2(1-x)(6-12x)(1-12x^2+16x^3)$$

$$\propto (1-2x)(3-4x)(1-6x^2+8x^3) - 2(1-x)(2-4x)(1-12x^2+16x^3)$$



$$\begin{aligned}
&= (1-2x)(3-4x)(1-6x^2+8x^3) - 2(1-x)(2-4x)(4x+1)(2x-1)^2 \\
&= (1-2x)[(3-4x)(1-6x^2+8x^3) - (2-4x)^2(1-x)(4x+1)] \\
&= (1-2x)(32x^4 - 64x^3 + 30x^2 - 1) \\
&= (1-2x)(4x-1)(8x^3 - 14x^2 + 4x + 1).
\end{aligned}$$

下面我们证明  $g(x) = 8x^3 - 14x^2 + 4x + 1 > 0$ , 对  $x \in (0, \frac{1}{2})$  成立.

$$g'(x) = 24x^2 - 28x + 4 = 4(x-1)(6x-1),$$

$g(x)$  在  $(0, \frac{1}{6})$  单调递增,  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$  单调递减, 而  $g(0) = 0$ ,  $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , 因此  $g(x) > 0$ .

所以  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{4}$  时有最小值, 即 Hamilton 等周量最小值为  $3^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} \approx 4.3694$ .

#### 4.2.3

我们证明  $H = S^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})$  在  $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$  时取到最小值.

证明:

单位正八面体对面距离为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 设截面到面 ABC 距离为  $x$ , 由平行可知, 截面为等角

六面体, 其中每个内角均为  $\frac{2\pi}{3}$ .

则截面面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(2-c) \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2}(1+c) \frac{\sqrt{3}}{2}(1-c) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(-2c^2 + 2c + 1).
\end{aligned}$$

由相似性可知

$$\frac{c}{1} = \frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$c = \frac{3x}{\sqrt{6}}$$

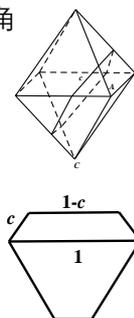
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)$$

其中  $x \in (0, \frac{\sqrt{6}}{3})$ .

$$V_1 = \int_0^x S dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x \right),$$

$$H = S^{\frac{3}{2}}(V_1^{-1} + V_2^{-1})$$

$$= \left[ \frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4} \left( -x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x \right) \right)}$$



$$\text{令 } f(x) = \frac{(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^{\frac{3}{2}}}{(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x) \right)}, x \in \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{B^2} \left( \frac{3}{2}(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^{\frac{1}{2}}(-6x + \sqrt{6})B - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^{\frac{3}{2}}B' \right) \\ &= \frac{1}{B^2}(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{3}{2}(-6x + \sqrt{6})B - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)B' \right] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } B = \left(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x\right) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x) \right).$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{3}{2}(-6x + \sqrt{6})B - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)B',$$

$$\begin{aligned} B' &= (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x\right) \right) \\ &\quad + \left(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x\right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \right) \\ &= (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-x^3 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 + x\right) \right) \\ &= (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( x - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} g(x) &= -9 \left( x - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) B - \left( x - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left( x - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \left[ -9B - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

下面证明  $h(x) = -9B - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) > 0$ .

$$h(x) = -9B - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -9B' - 2(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)(-6x + \sqrt{6}) \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \\ &\quad - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^2 \left( \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &2(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)(-6x + \sqrt{6}) \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)(-6x + \sqrt{6}) \left( \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x - \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -(-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (6x^2 - 2\sqrt{6}x - 8). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= -9B' + (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (6x^2 - 2\sqrt{6}x - 8) \\
 &\quad - (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1)^2 \left( \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -9B' + (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (9x^2 - 3\sqrt{6}x - 9) \\
 &= (-3x^2 + \sqrt{6}x + 1) \left( x - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \left[ -9 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + \sqrt{3}(9x^2 - 3\sqrt{6}x - 9) \right].
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 &-9 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + \sqrt{3}(9x^2 - 3\sqrt{6}x - 9) \\
 &\propto -\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + (3x^2 - \sqrt{6}x - 3) \\
 &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x - 1.
 \end{aligned}$$

而  $w(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x - 1 < \max\{w(0), w(1)\} < 0$ , 因此  $h(x)$  在  $(0, \frac{\sqrt{6}}{6})$  单调递增, 在  $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$  单调递减, 所以  $h(x) > \min\{h(0), h(\frac{\sqrt{6}}{3})\} > 0$ .

从而我们得到了  $H$  在  $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$  时取到最小值  $3^{\frac{13}{4}} \cdot 2^{-3} \approx 4.4417$ .

## Reference:

- [1] Adamowicz, T; Veronelli, G. Isoperimetric inequalities and geometric of level curves of harmonic function on smooth and singular surfaces. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* (2002) 612
- [2] Balestro, V; Martini, H; Teixeira, R: A new geometric view on Sturm-Liouville eigenvalue problems. *Monatshefte für Mathematik*(2019) 190, 213-236
- [3] Boscain, V; Charlot, G; Rossi, F: Existence of Planer Curves Minimizing Length and Curvature. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 2010. voe 270
- [4] Cañete Antonio: Cheeger Sets for Rotationally Symmetric Planar Convex Bodies. *Results in mathematics* 77(2022)
- [5] Cheeger, J: A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, *Problems in Analysis: A symposium in Honor of Salomon Bocheer.* (1969)
- [6] Chen, Yuansi: An almost constant lower bound of the isoperimetric Coefficient in the KLS Conjecture
- [7] Dubin, L.E: On Curves of Minimal length within a constant on overage Curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*(1957) 467-516
- [8] Daskalopoulos, P; Hamilton, R.S: Geometric estimates for the logarithmic fast diffusion equation. *Communications in Analysis and Geometry*(2004) 143-164
- [9] Hamilton, R.S: Isoperimetric Estimates for Curve Shrinking Flow in the plane. *Modern methods in complex analysis* (1992)
- [10] Hamilton, R.S: An Isoperimetric Estimates for the Ricci Flow on the two sphere. *Modern Methods in Complex Analysis* (Princeton (1992))
- [11] Hsu, Shu-Yu: Minimizer of an isoperimetric ratio on a metric on  $\mathbb{R}^2$  with finite total area. *Bulletin of Mathematical Sciences* volume 8, pages603–617 (2018)
- [12] Lei Na; Su Kehua, Cui Li, Yan Shing-Tung, Gu David, Xianfeng: A Geometric View of Optimal Transportation and Generative Model. *Special Issue on Heat Diffusion Equation and Optimal Transport in Geometry Processing and Computer Graphics.*
- [13] Morgan, F: In Polytopes ,Small balls about Some vertex minimizing perimeter *The Journal of Geometric Analysis* 17 Nov 1 2007
- [14] Nardulli, S; Russo, F.G: On the Hamilton's isoperimetric ratio in complete Riemannian manifolds of finite volume. *Journal of Functional Analysis*(2021)
- [15] Osserman, R: Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *The American Mathematical Monthly*(1979)
- [16] Ritoré, M: Optimal isoperimetric inequalities for Cartin-Hadamard manifolds
- [17] Ritoré, M; Ros,A: Some updates on isoperimetric problems *The Mothematirical intelligener* voe 24 Nov 3 2002
- [18] Santaló, L.A Note on convex Spherical curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*(1944)
- [19] Santaló, L.A Note on convex curves on the hyperbolic plane. *Bulletin of the American Mathematical Society*(1945)
- [20] Schoen, R; S.T. Yau. *Lectures on differential Geometry.* Higher Education Press.
- [21] Wegner, F: *Floating bodies of Equilibrium in Three Dimensions.* (2008)

[22] Xie Zecheng, Sun Yueyi, He Haohua The minimum cross-section of Hamilton's Isoperimetric.  
(2021 preprint)

仅用于2022丘成桐中学科学奖公示  
2022 S.-T. Yau High School Science Awards

1. 论文的选题来源、研究背景:

等周不等式的研究从古希腊时期便有记载,在现代分析和几何学中都有重要应用;Hamilton 为研究平面闭合曲线在曲线收缩流下的嵌入性引入了两个等周比,并定义了 Hamilton 等周量.我们受到启发,决定研究几类特殊图形(带尖点且无边界的多面体与欧几里得和非欧几里得空间下的圆盘,球冠) Hamilton 等周量最小值的存在性和特征.

2. 每一个队员在论文撰写中承担的工作以及贡献:

两位队员在论文撰写中平分工作,共同探讨课题,进行计算证明等工作,两位队员都在团队中扮演不可或缺的角色.

3. 指导老师与学生的关系,在论文写作过程中所起的作用:

两位指导老师在论文选题,方向指引,论文架构上进行指导,对论文总体框架与内容做引导工作.

及指导是否有偿: 无偿

4. 他人协助完成的研究成果: 无.

仅用于2022丘成桐中学科学奖公示  
2022 S.-T. Yau High School Science Awards