

参赛队员姓名： 张宸， Sunny Yeung

中学： 广东碧桂园学校

省份： 广东

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 万水英

指导教师单位： 广东碧桂园学校

论文题目： 环形水跃的动力学与在特殊界面上的非对称畸变

环形水跃的动力学与在特殊界面上的非对称畸变



从左向右依次为水流垂直冲击亚克力板的环形水跃；水流斜射地面的鱼形水跃；水流垂直入射弯曲表面的畸变鱼形水跃

摘要

早在 15 世纪，水跃现象就已经被达芬奇注意到并在他的笔记中精细的描绘了出来。这一水流冲击界面形成的不连续高度变化吸引了广泛的关注，然而直到上世纪末才由托马斯·玻尔等人首次在理论上进行了定量解释。玻尔的工作之后，若干学者对这一问题进行了系统的实验与理论研究。然而，受限于理论假设与实验条件，这些研究均建立在冲击界面的光滑性与平直性这两个重要前提之上。本文搭建了基于水循环的水跃实验平台，通过改变平面的几何特征，观察了不同条件下水跃的动力学与新奇的几何形状。具体来说 1) 平面微观几何的变化（粗糙与否）会影响水跃的明显程度与水跃半径的动力学涨落，但并非是水跃出现的必要条件；2) 平面宏观几何的变化（弯曲与否）会导致水跃的几何由水流的动力学冲击与平面不同位置水流的重力势能差异所共同决定，进而产生不同于平面水跃的若干奇特行为。除此以外，本文也在基础层面对平面上的环形、椭圆水跃进行了定量实验研究，得到的结果较此前同主题的实验研究有更宽的参数区间与更细致的动态涨落分析。本文的研究对建立弯曲界面和特殊界面材料上水跃的理论具有启发作用。

关键词：流体力学；环形水跃；粗糙界面；有限界面；弯曲界面；非对称畸变

目录

1. 引言	4
2. 水跃现象的动力学与水跃半径	5
2.1 垂直入射	5
2.2 射流与界面夹角带来的水跃形变	8
3. 环形水跃的实验量化	9
3.1 实验装置	10
3.2 水跃半径与流量的关系	10
3.3 斜射情况下的椭圆水跃	12
4. 非光滑水跃与非稳定水跃	13
4.1 非光滑水跃	13
4.2 非稳定水跃	14
5. 冲击界面的材料与几何性质对水跃的影响	15
5.1 粗糙表面的水跃	15
5.2 表面有限尺寸的影响	16
5.3 弯曲表面的水跃	18
6. 总结与展望	20
致谢	23
参考文献	22
附录	24

1. 引言

当厨房的水龙头被打开，水流将以水柱的形式，在重力的作用下，从高处向低处平面冲击。在图 1 ((a) 厨房中的水跃，(b) 达芬奇的笔记) 中，可以看到，在平面冲击点处，水流的竖直方向的速度转化为沿水槽平面的速度同时沿径向扩散。有趣的是，图中出现了一个圆形的凹陷，对应着一个明显的浅水区。在一个特定的半径处，又可以观察到水流厚度的陡然抬升，使得水流以跃起的态势向外进一步扩散。考虑到该跃起水流的边缘一般为圆形，我们称之为环形水跃[1]。达芬奇在他的笔记中用绘图的方式对这一类水跃现象较为仔细的描述（图 1 (b)，后面的丰富研究可以看看跟达芬奇绘制图片的异同）。环形水跃在日常生活中非常常见，除了前面提及的厨房洗碗池中，淋浴冲击在浴室的地面上，还有浇花时水流冲击到墙壁甚至植物叶片上等等。只要水流从高处冲击低处平面或者斜面，都可以观察到该现象。

当然，环形水跃只是众多丰富的水跃现象中的一种特殊对称情况。只要在某一区域内，流体表面的重力波的传播受到流体自身流速的限制时，都将形成水跃。



图 1. 典型的环形水跃现象。 (a) 笔者在家里厨房拍摄到的水跃； (b) 达芬奇在笔记中绘制的水跃[2]

水跃现象吸引了工程与科学领域广泛的研究兴趣。在设计水坝时，工程师们利用了水跃过程中水体的动能会转化为热耗散这一特点，在泄水口下游设计消力池和水跃阶梯泄洪道[3]来增强水跃中的能量耗散。这样的设计可以大幅度降低水体接下来的流速，减少水流对下游的侵蚀，从而提高水利设施的稳定性和使用年限。Zhou et al.[4]的实验研究表明，在泄洪速率达到约 101.45 立方米每秒（近乎两倍于老式泄洪道的最大泄洪速率）时，能量可以耗散 75%以上。在城市的污水处理系统中，水跃的动能耗散被用于迅速消散凝聚物，是实现水体快速清洁的基础。实验研究表明[5]，水跃混合装置的水体浊度去除率可以达到 98.8%，几乎与传统的机械混合装置性能相当，且具有巨大的价格优势。除了在工程领域的重要应用价值，水跃现象背后的深刻物理还被引申到天体物理领域。Jannes et al. [6] 和 Volovik [7] 等研究小组将光速对应于水跃中重力波的传播速度，视界位置类比为水跃半径，从而给出了理解白洞的形成及几何结构的新视角[8]。这些例子表明，深入研究水跃现象在基础研究和实际应用方面都具有重要价值。

尽管已有较成熟的工程应用，对水跃现象本质的系统性探索依然是百年来困扰一众物理学家的难题之一。本着大道至简的研究风格，一些学者从环形水跃这一对称性最高的现象入手，进行了一系列尝试。英国物理学家 Eric Watson (埃里克·沃森) 在 1964 年将从冲击点到水跃半径之间的区域划分成许

多个不同部分（水流冲击区、边界层发展区、边界层全面侵入液面区），在此基础上得到了水膜厚度随注入水流距离的关系。此后近三十年，这一领域没有太引人注目的进展。直到 1993 年，Niels Bohr（尼尔斯·玻尔）的孙子 Thomas Bohr（托马斯·玻尔）等人第一次成功预言了水跃半径的位置[9]。他们从纳维斯托克斯方程出发，通过“贝朗格条件”将水跃的内部和外部区域联系起来，建立了得到了能够根据流体的参数（流量、黏度、密度等）预测竖直冲击情况下的水跃半径的理论模型。这是环形水跃研究的一个里程碑式的结果。

时间来到本世纪，剑桥大学的 R. Kate 等人在 2007 年对射流与平面存在夹角情况下的水跃现象做了研究[10]。他们同样通过纳维斯托克斯方程，并根据重力的作用修正了射流速度与方向，建立了倾斜入射情况下水跃半径的理论模型，他们同时发现在夹角较小 ($\phi < 25^\circ$) 时，水跃的对称性和完整性会被破坏，对此他们归纳得出了几种不同的水跃图像。同年，Kate et al. [11] 对于非闭合性水跃的性质做了进一步研究，发现在一定角度时，非闭合水跃上游的顶点会与水流冲击区重合，对此他们同样得出了对该临界角度预测的理论模型。至此，对于水跃本身的性质的研究已初步趋于完善。

需要注意的是，作为形成水跃现象的必要条件，承载水跃的冲击界面的存在及其物理性质同样是影响水跃形成的重要因素。然而，据我们所查阅的文献可知，1) 目前对水跃现象的研究主要集中于对称的环形水跃。对于畸变的水跃，如椭圆形等其它水跃现象，虽有研究，但是未成体系；2) 目前没有文献系统地研究界面性质，如边界情况、表面粗糙程度等对水跃现象的影响。这构成了本文的主要研究动机。

在本文中，我们将搭建可以调整的出射水流角度以及可更换的冲击界面的实验平台，结合前人的理论与实验研究，对上述问题进行系统性的研究，希望能对相关问题的解决具有一定启发性。本文将按照以下结构展开：在第二节中，基于前人对环形水跃的理论研究，我们本文将分析水跃的动力学，进而给出水跃的主要特征量：水跃半径与流量的关系。在此基础上，本文我们将讨论并量化射流与界面夹角对水跃边界几何的影响。在第三节中，我们本研究设计了一套基于水循环的系统的水跃实验平台，在该平台上研究水跃的几何特征与相关参数的影响。我们首先测量了垂直入射下水跃半径与射流流量的关系，并与前人的实验结果与理论结果进行比对。进而，我们通过改变射流角度，观察了环形水跃出现形变的过程，并在一定角度内确定了该形变的水跃包络是椭圆。在第四节中，我们本文进一步探索水跃在更大参数区间的极端畸变，例如在大角度入射情况下水跃无法形成光滑曲线，此时水跃的特征有丰富的行为；另外，在大流量情况下，水跃边界处会出现湍流现象，水跃的边界不再稳定，而出现随时间的震荡。在第五节中，我们本研究利用不同粗糙程度以及有几何弯曲的表面，1) 从实验上确定了表面的平整结构并不是稳定水跃出现的必要条件；2) 首次观察到了弯曲面上的水跃特征，并简要讨论了其与平面上水跃的关系及其形成原因。全文的总结与展望在第六节中给出。

2. 水跃现象的动力学与水跃半径

2.1 垂直入射

本节简要回顾 Bohr et al. [9] 发展的研究水跃半径的方法，得到环形水跃主要特征量（如水跃半径、水跃能量流衰减等）与水跃初始参数的关系，用以后续实验的对比。首先考虑一个特殊情况，即水流初速度方向垂直于平面。我们从理想的浅水理论出发，首先考虑了一个无耗散的流体系统，即水跃前，

后能量守恒。当水跃落到平面上后，沿平面径向流动。并且假设在水跃前后，水流的切向速度和沿竖直方向速度相比于径向速度可以忽略不计，且忽略表面张力及粘滞的影响，可由动量与流量守恒：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -g \frac{\partial h}{\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ rhv \} = 0 \quad (2)$$

其中 $v(r, t)$ 是径向速度， $h(r, t)$ 是水流高度， g 为重力加速度。通过适当代数变换可得：

$$\frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \left(v^2 + \frac{1}{2} gh \right) \right) = \frac{gh^2}{2r} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} h(v^2 + gh) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rhv \left(\frac{1}{2} v^2 + gh \right) \right) = 0 \quad (4)$$

其中（3）式为描述径向方向动量的运动学方程，（4）式为径向方向能量守恒。假设流体已达到稳态，因此在忽略随时间导数项并积分后可得：

$$rhv = Q/2\pi \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + gh = Q_e/Q \quad (6)$$

其中 Q 为质量流， Q_e 为每单位质量密度的能量流。 r, h, v 均可通过以下变化无量纲化：

$$r = \tilde{r} \frac{gQ}{\pi} \left(\frac{2Q_e}{Q} \right)^{\frac{3}{8}}, \quad h = \tilde{h} \frac{1}{2g} \left(\frac{2Q_e}{Q} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v = \tilde{v} \left(\frac{2Q_e}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

将（7）式代回（5）和（6）式后，可得出以下方程：

$$\tilde{r} = \frac{1}{\tilde{v}(1 - \tilde{v}^2)} \quad (8)$$

通过求解该方程，可画出以下图像：

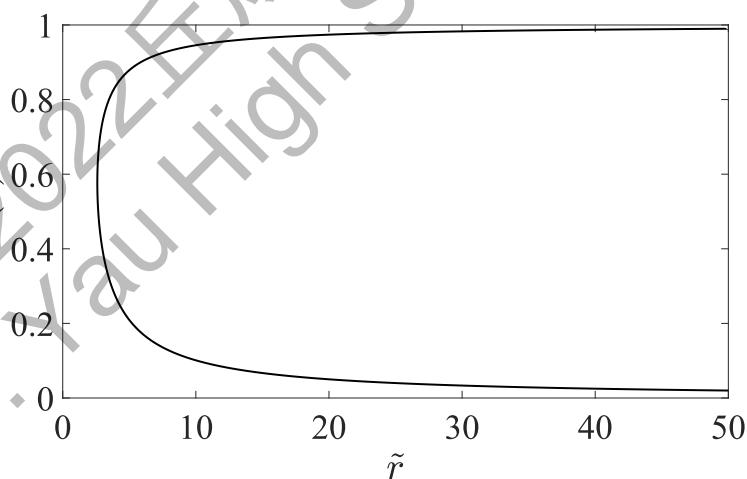


图 2. 方程（8）的解。图中上下两端近似代表实际情况中的两种水流极端情况

因而可以得出，在 r 趋于极值时，存在以下两个特征： $v \sim \text{const}$ ($h \sim 1/r$) 以及 $v \sim 1/r$ ($h \sim \text{const}$)。图中的上下两段近似分别对应了前文中半径 r 趋于极限值时的两种近似。因此，在理想流体条件下，流体的特性只会落在上下两段渐近线上，即弗劳德数 ($Fr = V/\sqrt{gh}$) $Fr > 1$ 和 $Fr < 1$ 两种情况。这两种极端情况在水跃模型中分别对应水跃前与水跃后。因此在水跃发生的位置必定为 $Fr = 1$ 。

而如图(2)所示,当取 $Fr = 1$ 时,该半径远小于常规情况下的水跃半径,故无法从该方程中得出水跃位置。又因在流量守恒与动量守恒的条件下,能量流 Q_e 在水跃前后必定不守恒,并通过等式

$$Q_{e2} - Q_{e1} = -\frac{gQ}{8\pi} \frac{(h_2 - h_1)^3}{h_1 h_2} \quad (9)$$

给出。其中角标2表示水跃后,角标1表示水跃前。但是在理想流体的层流模型中,因不存在粘滞,能量是连续耗散的。因此,并没有一个特殊位置可以指示该能量耗散发生的半径。所以我们没有办法通过这种模型来得出水跃位置。只有湍流可以造成突然的能量耗散,从而指示出水跃发生的位置,因此我们必须在模型中考虑粘滞系数 ν 。

当考虑粘滞带来的影响时,可使用不可压缩流体的纳维-斯托克斯方程来描述水流的流动,即

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{dh}{dr} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (10)$$

通过边界层近似(Boundary Layer Approximation)可得以下关系式:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

经过适当代数推导(见附录A),可得水流半径与速度的关系如下:

$$\nu' \left(\nu - \frac{1}{\nu^2 r} \right) = \frac{1}{\nu r^2} - \nu^3 r^2 \quad (12)$$

其中 $\nu(r)$ 为沿垂直于水跃方向平均,并无量纲化后的径向速度, r 为任意位置距离射流冲击点的半径。该方程数值解如下图所示。可以发现任意一组解的两端都会向(1,1)处盘旋前进,并在该点戛然而止。

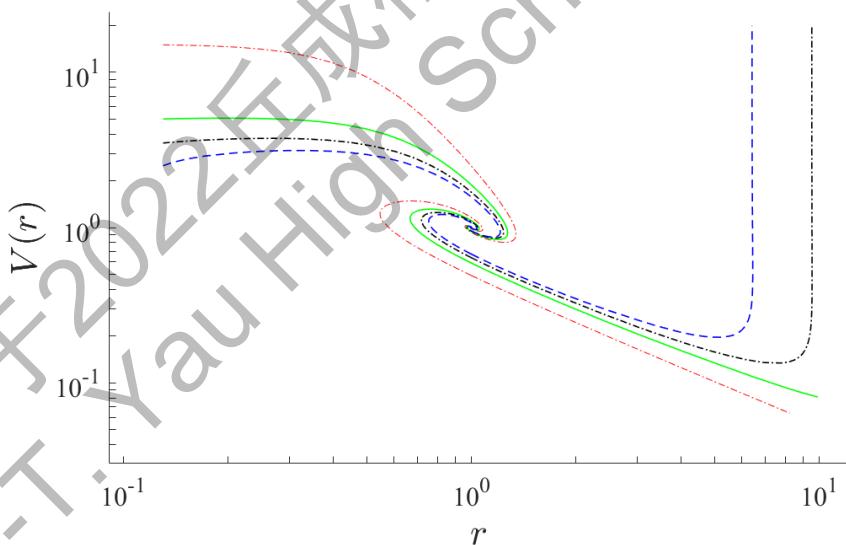


图3. 方程(12)的数值解。在这四组解中,我们均取 r_0 为0.13。在 ν_0 的取值中,红色解为15,绿色解为5,黑色解为3.5,蓝色解为2.5;该图绘制代码见附录E.1和E.2

在图上可以发现,当 r 增大到某一特定临界值时, $V(r)$ 突然趋近于无限大,不符合物理常识。在该位置 $\nu(r)$ 发散,因此为奇点。该现象出现的原因来源于方程(12)的特性,即在某一有限的 r 处,方程将不再收敛,而非解析上的谬误(见附录B)。在理论推导中,因我们采用的是无边界平面的假设,理论模型将会在某一个有限的 r 处发散,无法继续求解。但是在实际情况中,我们采取的界面有边界,

且该边界半径远小于奇点位置，所以方程（12）中奇点的存在并不会影响到该理论模型在实际情况中的应用，亦不会影响到实验中的数据采集。故，我们可以获得一个仅与流量有关的外部解，其中在外部区域液面厚度保持恒定。方程（12）的内部解同样被定义在了一个有限区间内，即从水柱冲击区到无量纲化后的 $(r, v) = (1, 1)$ 为止。由于在 $r > 1$ 时，内部解中的 $v'(r) = -\infty$ ，因此可以在内部解和外部解之间用一段冲击来连接。故在 $(1, 1)$ 处即为水跃产生的半径。

恢复量纲后，可以得出水跃半径的表达式：

$$R_j \approx \gamma = cq^{\frac{5}{8}}v^{\frac{3}{8}}g^{-\frac{1}{8}} \quad (13)$$

在抛物线速度剖面下，可近似 $c \approx 0.73$ 。

2.2 射流与界面夹角带来的水跃形变

一般情况下，我们见到的水跃现象由于是竖直下落，在冲击到如厨房水槽或卫生间地面等光滑水平平面后会形成极为对称的圆形，但如果平面粗糙程度较大，存在明显凹凸起伏的时候，水跃的对称性将被破坏，甚至会无法形成完整的水跃边界。我们也同时观察到，如果边界理想，对称性依然不佳，如果存在一定的夹角，同样会破坏对称性。根据 Kate et al. [10]的理论，当水流入射方向与界面夹角小于 25° 时，水跃的对称性会被破坏，表现为边缘不再为平滑曲线，存在夹角。所以我们同样对入射水流并非竖直或冲击界面并非水平的情况下水跃特征的改变做了一定的研究。

射流与界面存在夹角时有以下两种情况：界面与射流方向垂直，但界面与重力方向不垂直；界面与重力方向垂直，但水流入射方向与界面不垂直。在第一种情况下，加入重力带来的修正后（见附录C），可求得水跃半径表达式

$$R_j \approx 0.55r_s(G, r_0, v_0) \times q^{\frac{5}{8}}v^{\frac{3}{8}}(g \cos \theta)^{-\frac{1}{8}} \quad (14)$$

在第二种情况，界面水平但射流与界面存在非 90° 夹角时，将会形成更特殊的非对称水跃图像。不同于水跃垂直入射时时产生的环形水跃，当入射方向与平面存在夹角 $25^\circ \leq \phi < 90^\circ$ 时，水跃形状将不会呈现出标准圆形，而是一个标准椭圆。而在 $\phi < 25^\circ$ 时，水跃边界会出现明显的拐角，拐角类型与流量和入射角度直接相关。在倾斜入射的水跃现象中，水流在撞击到平面后产生的形状由图 4 给出，其中水流冲击区域可近似为一个半长轴 $r_0 / \sin \phi$ ，半短轴 r_0 的椭圆。

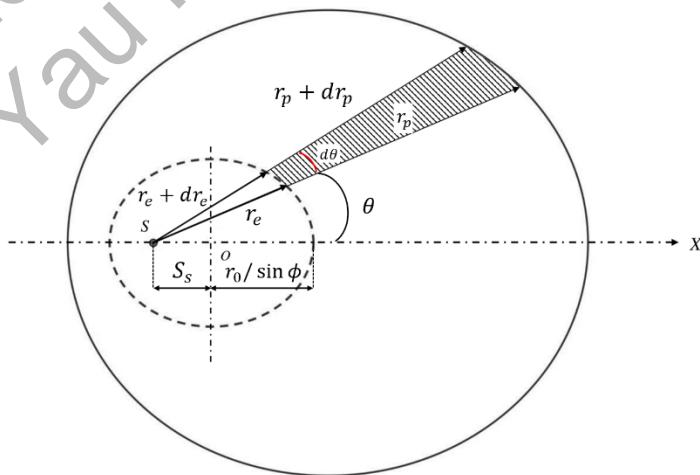


图 4. 倾斜入射时的冲击区俯视图。其中虚线区域椭圆为水柱冲击到界面时的图形，外侧实线椭圆为扩散后的水体区域，S 点为水柱的近似冲击点

在流速较小的时候，该近似成立。当流速较大时，由于受到湍流的影响，冲击区边缘会产生不稳定的振荡，从而导致有形状上的变化。假设冲击过后的水流为稳定层流，仅有发源于 S 点（冲击点）的径向而无切向流动，即阴影部分水体全部来自冲击区中 $d\theta$ 内的水流。并假设无湍流影响，忽略重力，表面张力及粘滞的影响，即可写出图 4 阴影部分的质量守恒方程，即：

$$(r_{ed}\theta) \frac{r_e}{2} (V \sin \theta) = (r_{pd}\theta) h V_r \quad (15)$$

其中 $r_e = r_e(\phi, \theta)$ 为冲击区边缘的极半径， V 为水流的入射速度， V_r 为冲击过后的水流径向速度， r_p 为平面上任意一点距离驻点 S 的径向距离。由于水流冲击前后机械能守恒， $V = V_r$ ，因此，(15) 式可变为以下形式

$$h r_p = \frac{r_e^2}{2} \sin \phi \quad (16)$$

由于 $P_x = Q \cdot V_x$ ， $Q = \pi r_0^2$ 以及 $V_x = V \cos \phi$ ，又因沿 x 方向总动量相当于水流冲击过后沿 x 方向动量之和，可得

$$\pi r_0^2 V^2 \rho \cos \phi = \int_0^{2\pi} \rho V_r^2 \cos \theta d\theta \quad (17)$$

其中 ρ 为液体密度。因此，可以由标准椭圆方程得出冲击区外沿的方程如下

$$\left(\frac{r_e}{r_0} \sin \theta \right)^2 + \left(\frac{r_e}{r_0} \cos \theta - \frac{S_s}{r_0} \right)^2 \sin^2 \phi = 1 \quad (18)$$

其中 S_s 为实际驻点与冲击区图像几何中心的距离（在图 4 中标出）。联立第 16、17 和 18 式，通过代数推导后可得到 $S_s = r_0 \cot \phi$ ，进而可求得 r_e 与 r_0 的关系如下

$$r_e(\phi, \theta) = r_0 \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \phi \cos \theta} \right) \quad (19)$$

不同于 2.1 中垂直入射时 $q = Q/2\pi$ ，当射流倾斜时，在冲击区的径向流速在极坐标系下并不对称。因此可以根据 (16) 式，(19) 式以及关系 $q = rh(\theta)V_r$ ，求得当 $r_e = r_p$ 时，即椭圆边缘在冲击区边缘，竖直方向速度完全转化为沿界面径向速度后，水流流量表达式如下：

$$q = \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{\sin^3 \phi}{(1 + \cos \phi \cos \theta)^2} \right] V \quad (20)$$

引用前文波尔研究的结论，将 (13) 式与 (20) 式合并后可得到：

$$R_j(\phi, \theta) = C \left[\frac{r_0^2}{2} \frac{\sin^3 \phi}{(1 + \cos \phi \cos \theta)^2} V \right]^{5/8} \nu^{-3/8} g^{-1/8} \quad (21)$$

当射流与界面夹角 $\phi < 25^\circ$ 时，水跃的形状将受到射流速度和角度的共同影响。当射流角度较大时，水跃的上下游两部分彼此分开；但当射流角度较小时，即小于临界角度 $\phi_{critical} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{V^2 \sin^2 \phi_n + 2gH}}{V \cos \phi_n} \right)$ 时，水跃的上游将于冲击点重合，从而影响到下游的水跃，形成类似于马赫反射的图像。其余形状的图像，同样可以通过调整入射角度和射流速度来获得。

3. 环形水跃的实验量化

本节将介绍我们搭建的实验装置，及其基本操纵与数据分析流程，并给出正射时的流量-半径关系和斜射时得到的入射角度-离心率关系，并将这些结果与理论模型对比。

3.1 实验装置

如图(5)所示，在实验中，我们使用一个可调流速的水泵（最大流量为500L/h）来控制水流的出射流量，并用一个量程60-600L/h的流量计精确记录流量值。水流通过直径14mm的管口后冲击一块圆形亚克力板，形成水跃。同 Duchesne et al. [12]的实验设置一样，因这一圆板边缘光滑，且实验中水跃半径均在圆板半径范围内，所以可暂时忽略边缘对水跃的影响。在亚克力板边缘落下的水会由塑料盆回收，并重新进入水泵循环内，以实现重复和循环的实验条件。我们使用一个铁架台和一根横向的塑料水管固定水管出口，以保证实验中的射流会垂直射向界面并且具有相同的初始速度。我们在实验时将手机固定在一个高度为1.45米的铁架上用以收集实验数据，以保证记录的数据有相同的缩放和视差。为了获取精确的流量值，我们持续调节水泵流量并在流量计上读数，直至水流稳定在目标流量附近，以便准确记录数据。

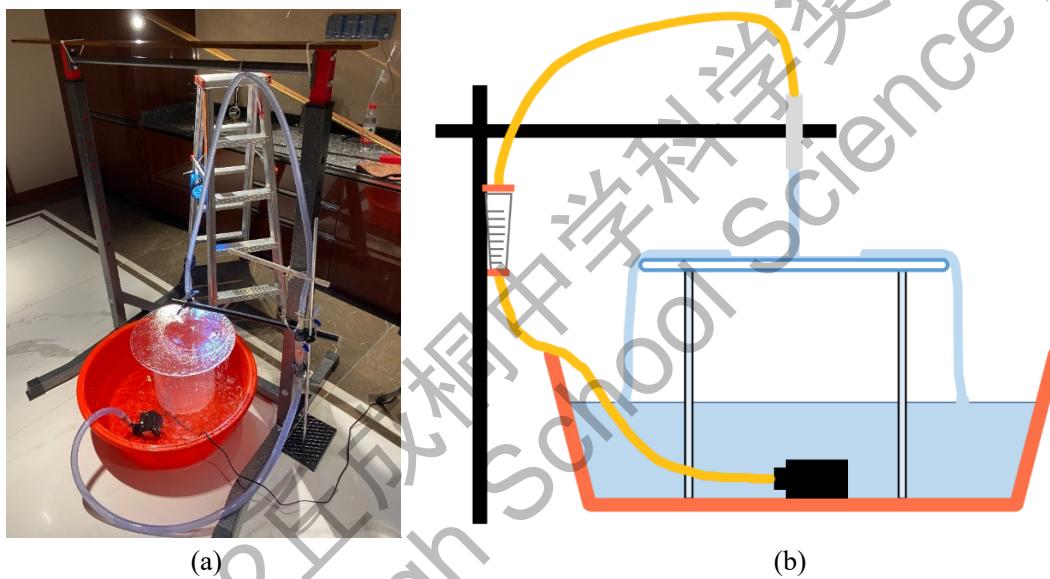


图 5. (a) 实验装置实拍图; (b) 实验装置示意图

3.2 水跃半径与流量的关系

在最简单的水流垂直入射到水平界面的条件下，Bohr et al. [9]已经研究得出了用射流性质预测水跃半径的完善的理论模型，我们亦通过实验证证了该理论的正确性。为了研究流量与水跃半径的关系，我们以20L/h的间隔调整流量。每次实验中，在流量计稳定后，记录流量数值，同时由固定在水跃正上方的相机录像记录水跃的动态面貌。为了分析水跃的具体几何，我们在视频追踪软件Tracker中对所记录的视频进行量化分析。在所得视频中，水跃的空间分布基本呈现一圆环状，即水跃高度明显变化的位置距离水流的冲击点近似相等，以下我们称这一距离为水跃半径，与前述理论分析一致。

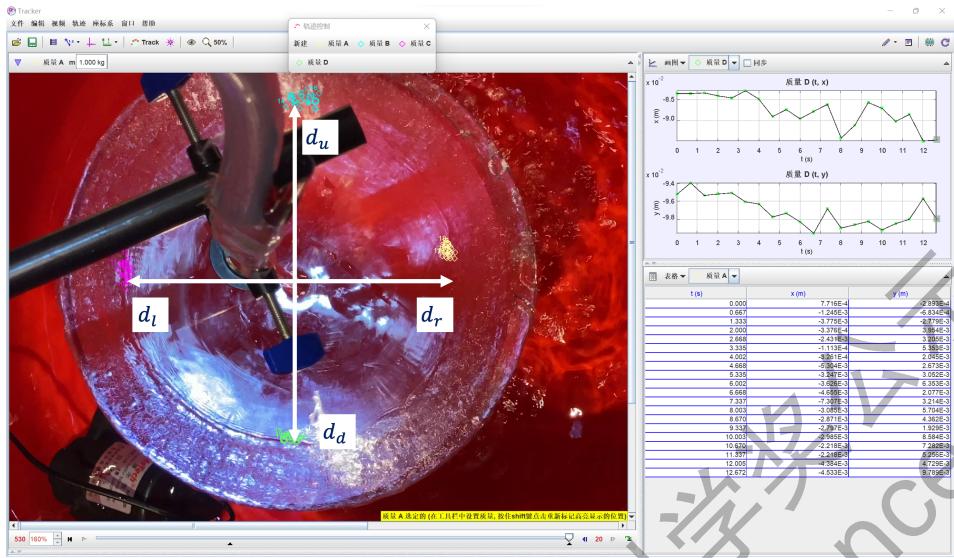


图 6. Tracker 的数据分析界面。图中标出了 d_u, d_d, d_l, d_r ; 为了使每个方向的数据尽可能的准确, 我们在每个方向附近较为清晰的水跃边界采集数据点

为了更准确的得到这一水跃半径, 我们以 0.66 秒间隔导出水跃上、下、左、右边界距离水跃中心的距离, 分别定义为 d_u, d_d, d_l, d_r , 如图 6 所示。并在这四个方向的边界各记录 10 组数据, $d_\alpha^{(i)}, (i = 1, 2 \dots 10, \alpha = u, d, l, r)$ 。在对每个流量的 40 组数据取平均, 及得到实验测量的水跃半径为

$$r = \frac{\sum_{\alpha=u,d,l,r} \sum_{i=1}^{10} d_\alpha^{(i)}}{40} \quad (22)$$

并采用三倍方差

$$SE = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i - r)^2} \quad (23)$$

为误差值后, 我们以黄色实心方点将实验结果绘如得到图 7 中。

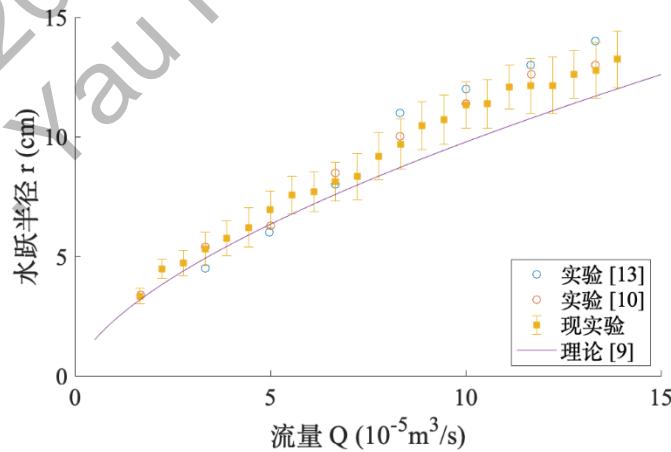


图 7. 水跃半径随流量变化曲线. 图中, 黄色实心方点为本次实验数据, 误差棒对应实验中的三倍均方差。作为对比, 蓝色空心圈和红色空心圈, 分别为 Arakeri & Rao[13] 和 Kate et al. [10] 得到的类似实验设定下的实验结果。Bohr et al. [9] 的理论模型给出的理论结果以紫色实线标出

如图 7 所示，我们的实验结果在误差范围内与玻尔给出的理论预言基本一致。可以看到，在低流速区域，本次实验和玻尔的理论结果符合非常良好，也与此前的两组实验结果较为接近。但在高流速区域，我们注意到水跃半径的涨落较大，这可能是由于高流速导致的雷诺数上升使得此时的水跃边缘出现了湍流，从而导致水跃边缘的动态涨落较大，因此具有较大的半径起伏。这个现象会在第 4.2 节中详细分析。同时我们也注意到，高流速区域的半径平均值较理论预测有明显偏大，这可能是因为此时的水跃半径相比于实验中所用圆盘半径以不可忽略，理论中无限大平面的假设不再适用。在后续实验中，我们会进一步探索这一可能的边缘效应对水跃半径变化的影响（详见 5.2 小节）。

3.3 斜射情况下的椭圆水跃

在搭建实验器材时，我们发现水跃入射的角度对水跃形状和水跃半径也有显著影响。若亚克力板圆盘并非水平放置，垂直入射时水跃会成椭圆形。因此我们设计斜射实验来调查入射角度对于水跃形状的影响。

由于我们观察到当射流与界面夹角越接近 0° 时，水跃形状越偏离标准圆形，因此我们采用椭圆离心率作为水跃畸形程度的指标。在实验中，我们将水流倾斜，射入水平的表面上，并观察水跃边界长短轴数据以计算和以往理论的复合程度。受制于冲击平面的大小，我们在实验中设定的最小入射角度为 60° 。在 60° 到 90° 范围内，我们以 3° 为间隔收集了 10 组椭圆长短轴的数据。在每次实验中，我们将水管出口固定，并使用表达式

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{V^2 \sin \phi^2 + 2gH}}{V \cos \phi} \quad (24)$$

通过实验装置几何参数和水跃入射角度反解得到需要的管口角度。其中 θ 为水流入射方向与水平面的夹角， ϕ 为管口角度与水平面的夹角， V 为水流流速， g 为重力常数， H 为水跃管口高度。对 10 个入射角度分别通过 (24) 式处理即可得到实验使用的管口角度。在每个角度下由固定在水跃正上方的相机录像记录水跃的动态形貌。

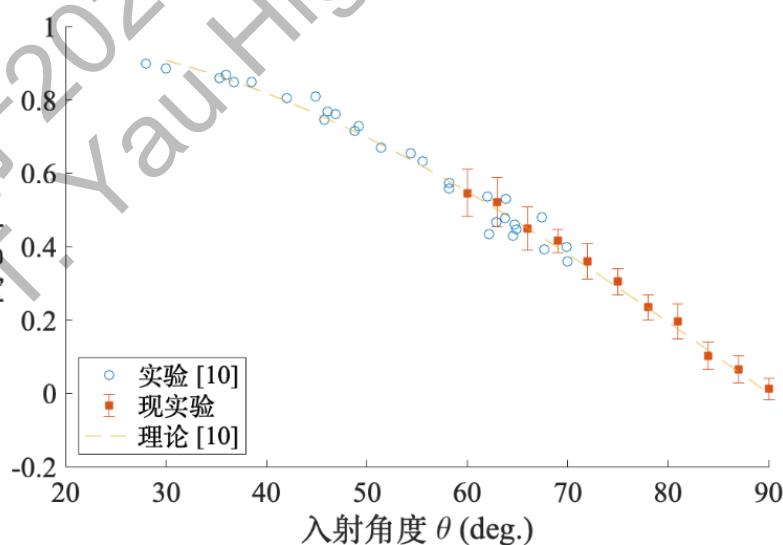


图 8. 椭圆水跃的离心率与入射角度的关系。图中橘色方点为本研究得到的实验值（误差棒为 10 次实验的均方差），黄色虚线为 Kate et al. [10] 给出的理论值，蓝色点为 Kate et al. [10] 得到的的实验结果

我们在亚克力板上画出一个两边各 30 厘米长的十字校准，并最后用 Tracker 得到每个角度下的长轴与短轴之比，用以下公式计算出椭圆的离心率

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}} \quad (25)$$

图 8 给出了斜射情况下椭圆水跃离心率随入射角度的关系。从图 8 中可以看到，我们的实验和前人的数据与理论吻合较好，且扩大了前人实验的数据区间，验证了水跃在入射角接近 90° 时同样遵循着 Kate et al. [10] 提出的理论关系。在入射角接近 90° 时，离心率接近 0，表明此时的水跃为环形水跃。实验中在入射角度越来越小时，水跃形状也会越来越偏离标准的椭圆。在入射半径小于 25° 时水跃会形成新的几何边界，这也是第 4 节要探讨的内容。

4. 非光滑水跃与非稳定水跃

本节将在第 3 节的基础上，进一步研究更广泛的参数区间中的各种有趣的水跃现象，以展示各种现象的图像且定性分析这些现象出现的原因来进行探究。并且尽可能建立特殊情况下的水跃与前面规则水跃之间的关系，给出导致其不规则的参数范围。

4.1 非光滑水跃

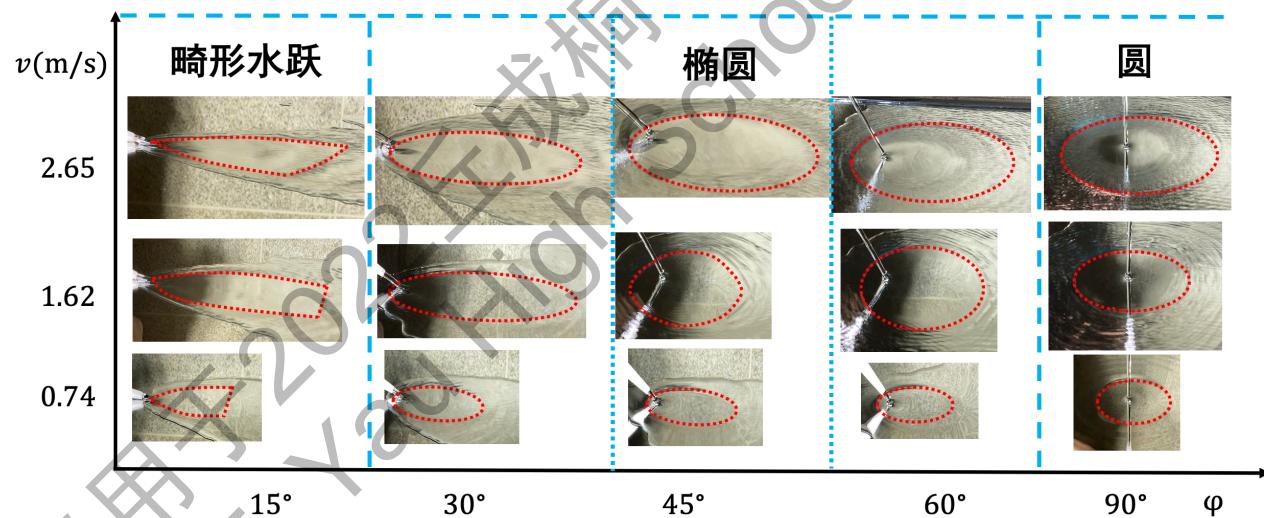


图 9. 水跃几何随着速度和入射角度的变化。图中横轴为水跃入射角度与平面的夹角，纵轴为入射水柱的初速度。图中每个角度和速度下的水跃都被一个固定机位的相机拍摄，水跃边界用红线标出。图中红蓝渐变区域对应入射角小于 25° 的畸形水跃

在 3.3 中，我们给出在斜射大角度参数区间的实验证，发现其与理论拟合良好。但在角度较小，如 Kate et al. [10] 给出的 25° 时，水跃边缘的平滑性和闭合性将被破坏，其形状与入射角度与流速的关系如图 9 所示。实验使用了一面长约 2 米，宽约 0.5 米的长方形镜子作为入射界面，并使用一个 100W 照明灯打亮背景，以达成尽可能好的成像效果。冲击平面的水柱由一个 7mm 直径的管口喷出。在实验中通过调整流量以改变入射速度，通过改变管口角度以改变入射角度。为了更好的描述水跃形态在入射

角度和速度改变时的连续变化，这里使用五个不同的入射角度（ 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° ）和三个不同的入射速度（ 0.74 m/s ， 1.62 m/s ， 2.65 m/s ），后者通过入射流量和管口直径计算得出。因实验器材限制，在更大流量下垂直入射的水跃不再是标准圆形，因此实验中采取的最大流速为 2.65 m/s 。

在 $\phi > 25^\circ$ 时，当入射角度越接近垂直，水跃则越接近圆形。水跃大小随着流量但增加而增加，也符合理论预测。和 Kate et al. [10]的理论结果类似，在入射角度较小时并不是标准的椭圆。例如在 45° 角，以 1.62 m/s 速度入射时，水跃远端和近端都产生了类似畸形水跃中的锐角端点。

而在 $\phi < 25^\circ$ 时，水跃形状更加难以预测。当流速逐步增加时，水跃从在 0.74 m/s 入射的“纸飞机”型逐步转换为了以 2.65 m/s 速度入射时的“鱼”形，如图 10 (b) 所示。这也与 Kate et al. [10]的实验结果保持一致。观察水跃随流速的变化可知水跃形状在流速增大是有从“纸飞机”形向着“鱼”形的过渡。在此过程中，距离入射远端的两个直角随着流速增加逐渐靠近，角度越来越大直至合成一个锐角。这一水跃从垂直入射时弧形的光滑边界到尖锐的棱角的转变也可以在不同的表面几何中看到。同时我们发现流速大，入射角度小时水跃边界会愈发模糊，高度跃升越来越小。



图 10. (a) “纸飞机”型水跃（入射角为 15° , 射流流速为 0.93 m/s ）；(b) “鱼”形水跃（入射角为 25° , 射流流速为 2.2 m/s ）

4.2 非稳定水跃

在第 3.2 节进行水跃半径和流量关系的实验中，可以发现在流量越大时水跃半径的涨落也越大。这一涨落并非是测量误差，而是因为水跃的边界本身具有不稳定性。实际水跃半径外部的湍流会导致水跃半径涨落，而因为流量越大时水跃过后的流速也越大，越容易产生湍流，所以会出现流量增加半径涨落变大的现象（如图 11）。

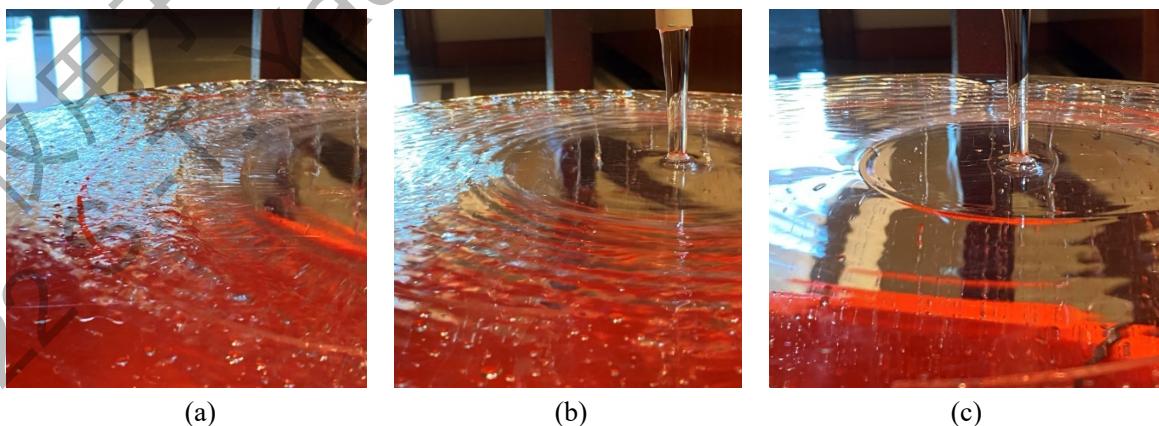


图 11. (a) 流量为 200 L/h 时的水跃边界；(b) 流量为 100 L/h 时的水跃边界；(c) 流量为 50 L/h 时的水跃边界。可以发现流量较低时水跃后为层 1 流，流量较高时水跃后为湍流

水跃的湍流-层流过渡常常用雷诺数 $Re = ud/\nu$ 表示，其中 u, d, ν 分别为流体速度，流体的特征长度和运动黏度系数，带入水跃参数并简化后可得

$$Re = \frac{\nu h}{\nu} = \frac{Q}{2\pi r\nu} \quad (26)$$

如果要解释水跃内外层流和湍流的过度以产生的不稳定性，在水跃前后的雷诺数必定是不连续的。而按照式 (26) 的计算，水跃前后雷诺数接近，且远远达不到湍流判定的标准。因此在水跃前后的湍流判定不能通过流量守恒带入雷诺数的表达式。

5. 冲击界面的材料与几何性质对水跃的影响

在前文的理论分析中，一个基本假设就是所有平面都是光滑、平整的。前人所做的实验大部分也在探索这些理想情况下的水跃，而没有对不同边界条件的分析。本节将会通过尝试不同的冲击界面的材料、不同的界面半径和不同的曲面变化来探索水跃在这些非理想情况下的行为。

5.1 粗糙表面的水跃

在前面的理论分析中，一个基本假设就是所有平面都是光滑、平整的。但在自然界中，该假设过于理想，因此我们需要对更多样的界面性质进行分析。在调研文献后，我们发现此前该方向的实验均关注光滑表面和界面的粗糙程度对水跃参数的影响[14]。由此我们猜测，表面的粗糙程度或许对水跃的形成条件，水跃边界和水跃的稳定性有一定影响。如图 12，我们取两种较为典型的石材进行分析，一种是整体无高度起伏，但局部有颗粒状的高度参差。另一种整体有平缓高度起伏，但界面光滑，无局部高度变化。基于此，我们把上述实验的亚克力表面换为一块高度起伏较平缓，总高低差在 2mm 内的石材，并在 360L/h 的流量条件下观察水跃形状。比起光滑的亚克力板，该粗糙表面的水跃边缘在通常条件下并不明显，不便于记录。因此，我们使用强光反射以凸显水跃位置，并把相机以 25° 倾角拍摄水跃表面，间隔 5 秒拍摄照片记录（每条颜色用红黄蓝绿黑中的一个标出）。在图 13 中，我们从所得的照片中挑选了五组水跃边缘的曲线进行对比：



图 12. 左为整体高度起伏小，局部高度起伏大的石材；右为有小幅度整体高度起伏，但表面光滑的石材。本节会分别对两种石材进行实验

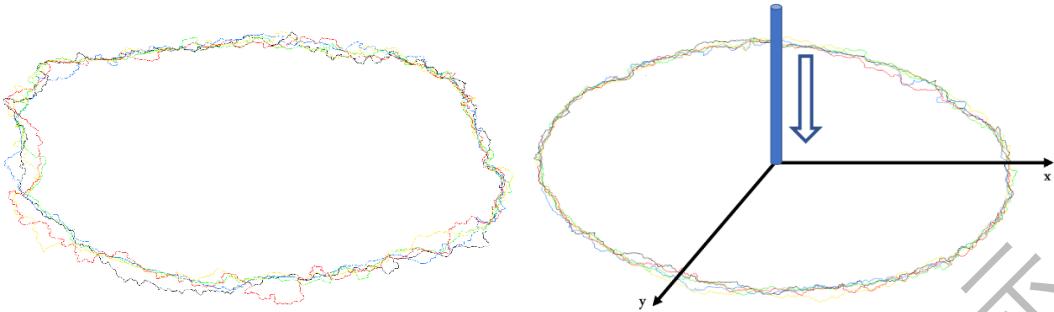


图 13. 左为光滑的石材表面的水跃边界。图中不同的闭合曲线代表单次实验中不同时刻采样得到的结果。本实验所用的水流流量为 360L/h。右为光滑玻璃板上的水跃边界

两图对比后，可发现石材表面的水跃稳定性比玻璃板表面水跃稳定性要差许多，并且石材表面上的水跃形状不再是光滑表面上的圆形，而是不规则状。在同一流量下，石材表面上形成的水跃边界还是和光滑表面上的水跃边界有着相似的平均半径。因此我们可猜想，在高度缓慢变化的表面上的高度变化会使水跃产生局部形变，但整体影响在水跃半径趋近于无限时可忽略。

在另一块表面更加粗糙的石材上的实验表明，即使是在高度起伏更为剧烈的表面上仍然可以形成水跃，如图 14(a)。我们猜想其原因是水跃在无论缓慢高度变化或剧烈高度变化下都具有稳定形态。在高度变化缓慢时，水跃局部性质与斜面水跃的形式类似；而在高度剧烈变化时，水流会在小高度下脱离石材表面，下落的水流在重新接触石材表面时会再产生新的水跃。我们将这种现象称之为“阶梯形水跃”。如图 14(b)，我们看到水流在离开玻璃板并重新接触地面时可再形成水跃。这两种机制的结合使得水跃可出现在有剧烈高度变化的表面上。

因此，我们发现表面光滑不是形成水跃的必要条件。水跃可以产生于从高度变化缓慢到高度变化剧烈的各种表面上，并在该流量出现的环形水跃基础上做不规则形变，其形变幅度取决于表面几何。这种水跃现象的普遍性主要来自斜面水跃和阶梯形水跃的结合。



图 14. 不同表面上的水跃。(a) 粗糙石材上的水跃；(b) 阶梯状水跃，水流离开玻璃板后重新形成水跃

5.2 表面有限尺寸的影响

3.2 节提出本次实验与前人实验的差别可能是使用了不同半径的圆盘，因此水跃半径在和边界半径对比不可忽略时可能会受到边界条件的影响。因此，我们在本节的实验中采取一个半径为 13cm 的圆盘，一个半径为 20cm 的玻璃圆盘作为对比以调查有限表面半径对水跃半径的影响。在实验中，我

们对于 60-300 L/h 之间的 7 个流量分别使用两个圆盘作为冲击平面，并在每个流量下分别采集 40 个数据点，通过和 3.2 一样的方式进行数据分析，可得图 15：

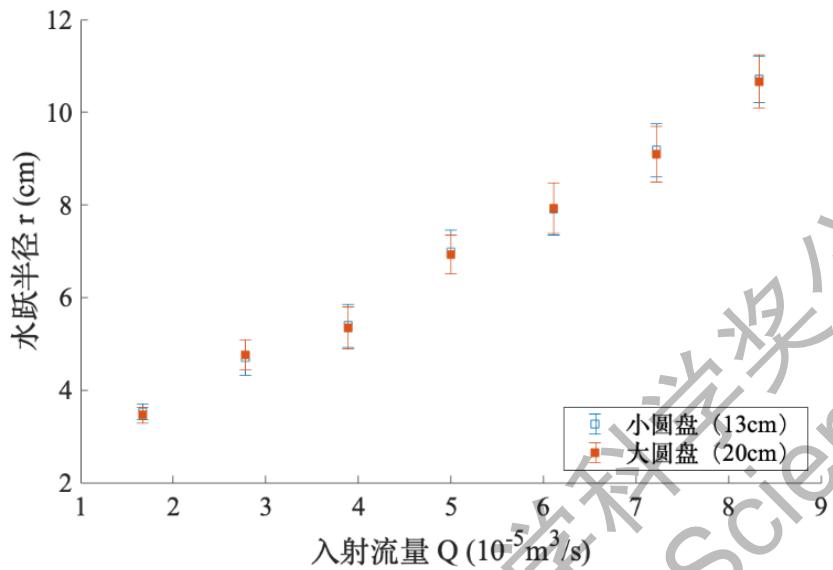


图 15. 不同边界半径下水跃半径和流量的关系。红色方点代表在边界半径为 20cm 时的水跃半径，蓝色方点代表在边界半径为 13cm 时的水跃半径；可以看到水跃的位置和涨落在两个边界半径下几乎完全一致

观察图 15 结果可得两个平面上的水跃数值极其接近，即使在环形水跃半径非常接近表面半径时在两个平面上的半径仍然接近。因此在实验中冲击平面的有限边界时可忽略的，使用玻璃圆盘的效果近似于使用无限平面。这也符合波尔对于水跃极值的分析[9]，即边界半径对水跃半径的影响可忽略不计。因此本节从实验角度佐证了波尔对于水跃边界条件的描述。

在水跃半径逼近平面半径时，我们可以看到（图 16（a））此时环形水跃后的湍流相较水跃半径远小于圆盘半径时的形态（图 16（b））类似，因此也佐证了这两者的边界条件对水跃的性质影响不大。

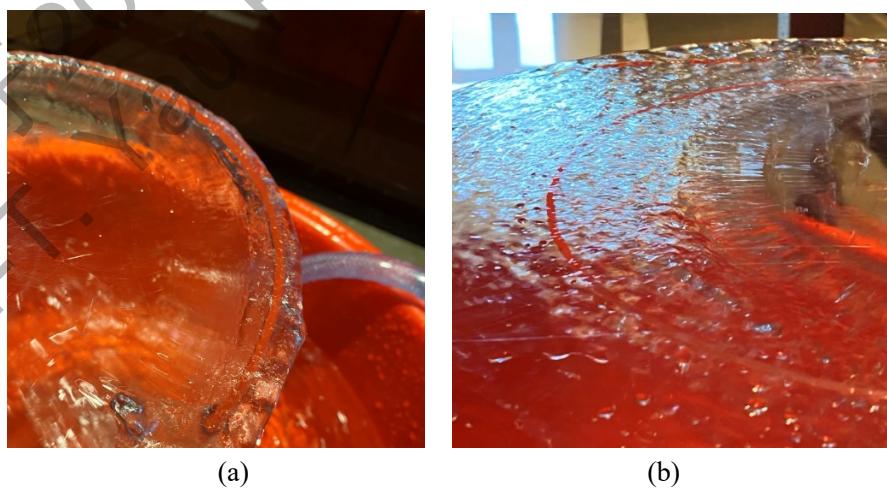


图 16. (a) 水跃半径接近平面半径时的边界形态；(b) 水跃半径远小于平面半径时的边界形态；两图对比可看出两者在水跃前后的形态类似

在水跃半径远超平面半径时，我们发现此时整个平面都由类似水跃内部的层流覆盖，且不会形成水跃（见图 17）。若对应此前对数值解的分析，现在径向速度随半径的变化应当也遵循水跃内部解的形式。

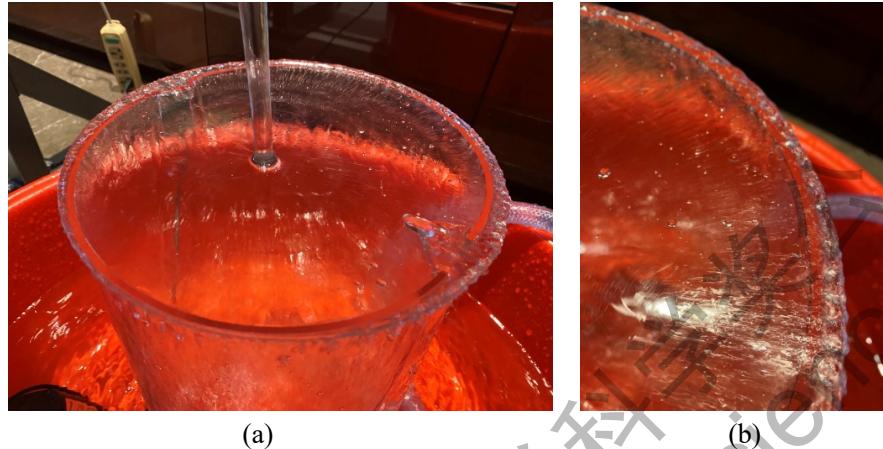


图 17. (a) 水跃半径大于圆盘半径时的整体水跃形态；(b) 同情况下的局部形态；图中看到的边缘处并不存在湍流，看起来像是湍流的部分其实是水流流下边界后因表面粘滞而顺着圆盘向内流动的水流

5.3 弯曲表面的水跃

在研究本课题过程中，我们偶然在浴室注意到，当射流冲击不锈钢管时，也能出现局域的环形水跃现象。有趣的是，不锈钢管的表面是弯曲而非平直，在射流与其呈现夹角时，会展示出一些与前述水平表面水跃现象不一样的特征。为了进一步探究这一问题，我们使用一个由单面胶固定的塑料薄膜控制水跃表面的弯曲程度，以观察水跃冲击的界面的弯曲特征对水跃行为的影响。

在实验中，我们构造了几种典型的弯曲表面（表面的弯曲结构由图 18 中子图的网格曲面给出）。这些表面可分为两种特质的组合：水跃在表面的高度峰值上还是山坡上；整体是否有单个方向的高度变化还是有多个方向的高度变化。

如图 18 (a) 所示，眼状水跃有关于两个垂直轴的对称性。不难想象，若沿着曲面弯曲的方向逐渐将曲面展开为平直，眼状水跃会恢复到垂直冲击平面所成的环形水跃，即 3.2 节讨论的情况。在弯曲情况下，水会沿着眼角（水跃边缘的不连续夹角）的轴向两侧向势能降低的方向流动。从现象上来说，冲击平面的弯曲导致了水跃对称性的破缺，同时使得原本光滑连续的边界出现了不连续。以目前的理论，我们无法解释这一现象，留待此后从模拟和理论分析的角度进一步研究。

图 18 (b) 中的水跃为鱼形，在靠近高地时水跃成椭圆，在低处左右两边水跃汇聚在一起，形成两股水流。在两股水流会合处，两个水流交汇形成了一个锐角交叉。在这个交错上，左方的水流高于右方的水流，因此左方的弧形边缘一直延续到了层流区以外。同眼状水跃类似，在曲面上水跃朝着势能低的方向延伸，形成了和眼状水跃相似的尖角。但与眼状水跃不同，在使得薄膜中央有一个前后方向的梯度后，水跃朝前向延伸而不是侧向。我们猜测这是因为前后方向的梯度大于左右方向的梯度，因此水跃如同山坡上的小球一样也会选择梯度最低的方向前进。

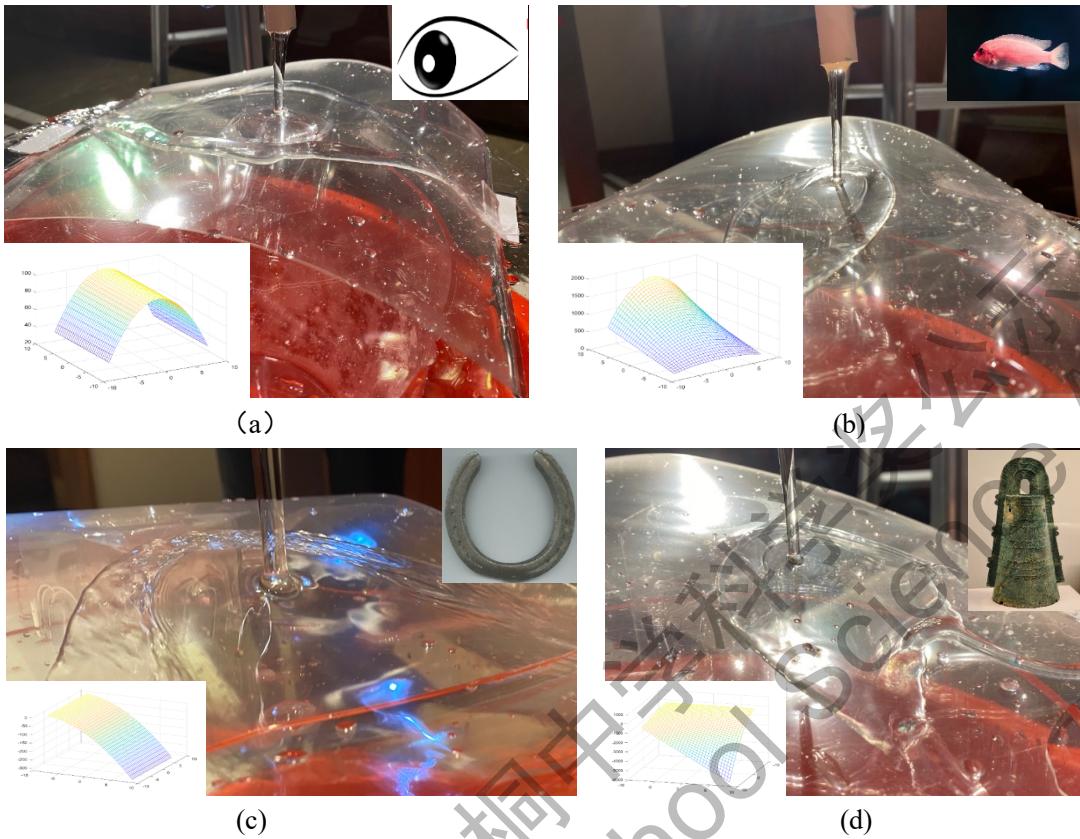


图 18. 弯曲表面水跃的典型情况. (a) 眼状水跃, (b) 鱼状水跃; (c) 马蹄铁状水跃 (d) 锋状水跃。子图展示了冲击界面弯曲几何的示意，子图中水跃形状类比物的示意图源于：眼图[15]; 马蹄铁[16]; 鱼[17]; 锋[18]

上面提到两种虽然水跃边缘有不连续但是封闭的。我们还观察到了曲面上不封闭的水跃，例如：图 18 (c) 中的水跃为抛物型，并未完全闭合且形成了左右两缕水流的边界现象。该水跃可以类比为水流斜射形成椭圆的现象，因为重力作用导致环形水跃朝势能低的方向偏移，产生了一个不完全的椭圆。我们猜想使用垂直入射到倾斜平面的理论进行简化也能得到相似的结果。该形状与鱼型相似，但因为只有一个方向上的高度变化且变化更为缓和，该水跃并未闭合，而是将边界延伸到了曲面之外。该图中水跃过后水流的边缘也值得注意。在表面张力和重力的共同作用下，水流形成了内外两条抛物型的边界。除了水跃的几何形态，外部的边界形态也可作为研究选题，且能帮助确定内部水跃的边界条件。

图 18 (d) 中的右下水跃为锋形，它的上方形如椭圆水跃，下方产生了两条关于斜方向对称的拱形水跃，形成了三个锐角，在水跃后归为三条水流流出。它的对称性和平面的对称性类似，都是关于斜向对称。水跃的上半部分可近似为垂直入射到倾斜平面的情况。在下方，同之前的水跃类似，锋型水跃在圆形的基础上朝着三个势能低的方向拉伸，在高度更低的前方和右方都形成了尖锐的端点。

基于以上三个水跃现象，我们猜想在曲面上水跃尖角与在水跃过后流出的水流直接相关。眼状水跃的水流在水跃后汇聚成两股，流向两边，也在两边形成了尖角；鱼状水跃的水流只有一股，且从正中央留下，而尖角恰好也在中央水流的位置；锋状水跃有多个流出的水流，且每个水流都对应着一个尖角。进一步的，我们猜测尖角的大小是与水跃形态的自然曲率有关。例如在眼状和鱼状水跃中水流

都靠近椭圆都长轴，曲率较大，因此尖角角度也小。而在铎状水跃中水跃整体更接近圆形，曲率较小，因此形成的尖角角度也较小。

在后续的理论研究中，如能进一步给出尖角与流出水流的关联，那能对曲面下的水跃现象做出更完善的解释。我们猜想实际水跃的形态可以通过几个作用共同推出：1) 在不考虑流出水流的不均匀分布的情况下求出水跃在曲面上的变形；2) 通过考虑重力和表面张力推导出流出水流的分布状态；3) 通过流出水流的分布对水跃形态进行修正。因此对于综合情况下流出水流和水跃夹角的关系的实验或理论研究是很有价值的。

6. 总结与展望

本文系统的研究了水跃这一在重力影响下流体冲击固体界面时产生的不连续流动导致的冲击液面层出现的高度突变现象。理论上，根据前人的研究，我们分析了水跃产生的物理机制，并从流体的基本方程出发，基于若干理想假设，给出了对称情况下的环形水跃半径与冲击液体流量的正相关关系。

我们搭建了基于水循环的系统的水跃实验平台，该平台能实现高度、流量可连续调节的水跃实验。通过连续记录一段时间内水跃的动态变化，我们对得到的水跃半径-流量关系进行了定量检验。我们的实验结果与前人的实验结果趋势一致，与波尔小组的理论预言符合。值得一提的是，我们的实验参数划分精度更高，同时通过视频逐帧分析的办法给出了水跃半径的动态震荡范围。随着流量的增加，水跃半径的震荡也在增加，这是由于边界流从层流到湍流的过渡导致的。

当射流与平面的冲击角不是 90° 时，水跃现象会从对称的环形变成椭圆形。此时，椭圆的离心率会由冲击角度决定。在接近垂直的入射情况下，我们实验上量化了椭圆水跃离心率与冲击角的关系，并验证了此前对这一问题的理论研究。实验结果较大程度上扩展了此前对这一问题实验研究的流量区间。随着射流与冲击平面夹角的进一步减小，水跃的边界开始偏离椭圆出现类似鱼形、飞机形等特殊形状，且在流速较大角度更小时水跃边界会愈加模糊。我们给出了实验上观察到的水跃几何随流速、入射角变化的二维相图。这给斜射情况下丰富的水跃行为做了一个直观的总结。

上述研究与此前这一领域的理论和实验研究一样，均是在平面较光滑、近似无限大等理想条件下进行的。然而，实验中我们观察到的现象启发我们，冲击平面的材质（粗糙程度）、几何特征（尺寸、弯曲与否）对水跃也可能会有较大程度的影响。我们接着开始在实验中改变冲击平面的物理特征来对这一问题进行研究。

(1) 在探究表面材质和几何对水跃形状的影响的实验中，我们采用了两种较为典型的石材进行实验，发现在界面有与水跃外水流同量级的小颗粒高度起伏的石材和有缓慢高度起伏的石材上都可以形成完整水跃，不过和环形水跃有不规则偏差。因此我们的实验确定，界面光滑、平整不是水跃形成的必然条件，各种幅度高度变化都可以产生水跃的形变。我们进一步推测，在各种表面上的产生水跃现象由斜面水跃和阶梯状水跃的共同作用产生。另外，粗糙石材上的水跃半径涨落比光滑玻璃圆盘上的水跃半径涨落更大，说明在水跃过后的湍流的稳定性会受表面几何的影响。

(2) 我们采用两种不同半径的圆盘，观测界面半径对水跃半径的可能影响。我们看到，即使在水跃半径非常接近圆盘半径时边界条件的影响也微乎其微，小圆盘与大圆盘表现基本一致。据我们所知，这一结果首次在实验上佐证了波尔在文献[9]中提到的“环形水跃对边界条件影响不敏感”这一结论。然而，极端情况下，如果某一流量对应的水跃半径（无限大平面假设下）超出了所承接圆盘的半径，我们实验上发现整个圆盘都会被层流覆盖，不会形成水跃。

(3) 为了对表面的几何弯曲对水跃形状建立初步认识，我们通过改变界面的左右对称性和前后对称性制作了四种有代表性的曲面，并观察了在不同流量下这些表明上的水跃边界。我们发现水跃均保持了界面的对称性，并会产生如同在斜射实验下出现的锐角边缘。我们猜测这些尖角和水跃后的流出水流直接相关，因此可通过考虑重力和表面张力的相互作用得到描述这些水流的理论模型，进而量化尖角的位置和角度。这些水跃对于界面曲率的变化和流速的变化非常敏感，我们猜测这是由于水跃后流出的水流受表面张力和界面条件共同影响，进而会大幅改变水跃的边界条件。

总的来说，本文在前人对于水跃问题的研究基础上拓展了环形水跃的实验发现，观察到了水跃在不同表面，不同高差，不同边界下的新现象。这些现象在已有的理论框架下还不能定量解释。我们期待后续关于水跃的理论能结合非欧几何，有限元模拟等方式对这些有趣现象做进一步的研究。

参考文献

- [1]. Y. Brechet and Z. Néda, American Journal Of Physics 67, (1999).
- [2]. M. Mossa, Environmental Fluid Mechanics 21, (2020).
- [3]. Y. Cengel and J. Cimbala, *Fluid Mechanics*, 3rd ed. (McGraw-Hill Education, New York, NY, 2018).
- [4]. Y. Zhou, J. Wu, F. Ma and S. Qian, KSCE Journal Of Civil Engineering 25, (2021).
- [5]. T. Al-Husseini, A. Ghawi and A. Ali, Journal Of Water Process Engineering 30, (2019).
- [6]. G. Jannes, R. Piquet, P. Maïssa, C. Mathis and G. Rousseaux, Physical Review E 83, (2011).
- [7]. G. Volovik, Journal Of Experimental And Theoretical Physics Letters 82, (2005).
- [8]. J. Bhattacharjee and A. Ray, Physical Review Fluids 6, (2021).
- [9]. T. Bohr, P. Dimon and V. Putkaradze, Journal Of Fluid Mechanics 254, (1993).
- [10]. R. KATE, P. DAS and S. CHAKRABORTY, Journal Of Fluid Mechanics 573, (2007).
- [11]. R. Kate, P. Das and S. Chakraborty, Physical Review E 75, (2007).
- [12]. A. Duchesne, L. Lebon and L. Limat, EPL (Europhysics Letters) 107, (2014).
- [13]. J. Arakeri and K. Achuth Rao, Journal Of The Indian Institute Of Science 76, (1996).
- [14]. E. Soukhtanlou, A. Teymourtash and M. Mahpeykar, Journal Of Applied Fluid Mechanics 11, (2018).
- [15]. A. Puente, *Eye. Ojo* (2011).
- [16]. Fonzy, *Horseshoe* (2003).
- [17]. P. Czerwinski, *Pink Pet Fish Photo* (2018).
- [18]. S. Jiro, 滋賀県野洲市 大岩山遺跡出土 裂縫襍文銅鐸 (2016).

致谢

在某日洗手时，本文作者在水池中注意到了一个明显的凹陷，并后续在浴室和冲洗地板时看到了相似的由水流冲击平面产生的高度跃升现象，这一简单条件下产生的常见现象令作者十分好奇。在进行初步试验和线上调查后，作者了解到这个现象名为“环形水跃”。2021年9月，在与指导老师交流讨论后，本文作者开始继续对这一现象及背后的物理机制进行系统研究。在本文研究阶段，作者在老师的指导下学习了数据分析软件的使用的基础上开展了实验设计，对环形水跃在不同流量和不同角度下的行为开展定量实验。在留意到水跃的边界条件在理论求解和实验过程中都有对水跃参数的影响后，作者把调查重心转移到了不同表面几何、表面性质对水跃的影响，以此确定了本文的研究重点。

在此作者衷心感谢万水英老师对选题、理论分析和实验设计思路的指导意见。作者还要感谢家人、朋友在实验器材选购和组装上的技术性支持。本文的两位作者在完成论文的过程中充分配合，张宸主要负责文献调研和理论总结，也共同完成了实验阶段的数据采集，Sunny 主要负责实验设计、数据采集、处理和画图工作。两位同学一起完成了全文的撰写、修订和最后校对。在论文撰写过程中，张宸负责第一、二节与附录的写作，Sunny 负责第三至六节的写作。最后诚挚感谢所有老师、家人在过程中写作中对作者提供的支持与鼓励。

附录

附录 A 垂直入射下平面上水跃模型推导

在环形水跃中，纳维-斯托克斯方程组存在边界条件如下：

$$u(r, 0) = 0, \quad w(r, 0) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h(r)} = 0, \quad r \int_0^{h(r)} u(r, z) dz = q \quad (\text{A.2})$$

其中 $u(r, z)$ 为径向速度， $w(r, z)$ 为法向速度， $q = Q/2\pi$ 。变量 u, w, r, z 可以通过以下变换无量纲化：

$$u = \alpha \tilde{u}, \quad w = \beta \tilde{w}, \quad r = \gamma \tilde{r}, \quad z = \delta \tilde{z} \quad (\text{A.3})$$

其中 $\alpha = q^{\frac{1}{8}} v^{\frac{1}{8}} g^{\frac{3}{8}}$, $\beta = q^{-\frac{1}{4}} v^{\frac{3}{4}} g^{\frac{1}{4}}$, $\gamma = q^{\frac{5}{8}} v^{-\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{8}}$, $\delta = q^{\frac{1}{4}} v^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{4}}$ 。那么忽略掉波浪号后，现在运动方程可以表述为以下形式：

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dh}{dr} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.5})$$

将 (A.2) 式和 (A.3) 式积分，并通过以下关系 $\int_0^h w \frac{\partial u}{\partial z} dz = h' u^2 \Big|_{z=h} + \int_0^h u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) dz$ ，可得出：

$$\overline{u \frac{\partial u}{\partial r}} = -\frac{dh}{dr} - \frac{1}{h} \overline{\frac{\partial u}{\partial z}} \Big|_{z=0} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{u} rh = 1 \quad (\text{A.7})$$

后根据波尔的文章，做出了变量假设 $\overline{\frac{\partial}{\partial r} u^2} = c_1 \frac{\partial}{\partial r} v^2$ 以及 $\overline{\frac{\partial u}{\partial z}} \Big|_{z=0} = c_2 \frac{v}{h}$ 。其中平均符号代表该物理量沿垂直于平面方向的平均值。玻尔随后对该变换的合理性进行了证明（见附录 D），随后可对 v, r, h 做出以下变化： $v \rightarrow c_1^{-\frac{1}{2}} c_2^{\frac{1}{8}} v$, $r \rightarrow c_1^{\frac{1}{2}} c_2^{-\frac{3}{8}} r$, $h \rightarrow c_2^{\frac{1}{4}} h$ 。从而可以将 (12) 与 (13) 式变为：

$$vv' + h' = -\frac{v}{h^2} \quad (\text{A.8})$$

$$vhr = 1 \quad (\text{A.9})$$

随后便可通过 (A.6) 及 (A.7) 式得出水跃半径关于速度的微分方程，即

$$v' \left(v - \frac{1}{v^2 r} \right) = \frac{1}{vr^2} - v^3 r^2 \quad (\text{A.10})$$

附录 B 奇点性质分析

从图像中可以发现，(11) 式的数值解在 $r \rightarrow \infty$ 的时候并没有理论解。这种情况乍一看不符合常理，但其实对结果并无显著影响，也不会使理论和实验因此有任何偏差。

(11) 式的数值解可由对以下两式求解得到：

$$\frac{dr}{ds} = v^3 r^2 - r, \quad \frac{dv}{ds} = v - v^5 r^4 \quad (\text{B.1})$$

设 $v = y/r$ ，则 (B.1) 可变为：

$$\frac{dr}{ds} = \frac{y^3}{r} - r, \quad \frac{dy}{ds} = -y^5 + \frac{y^4}{r^2} \quad (\text{B.2})$$

由于外部解区域的 r 值普遍较大，可以做 $r \rightarrow \infty$ 的近似，因此可以忽略（B.2）式中带 $1/r$ 和 $1/r^2$ 的项，从而得到两个独立的方程，并可通过这两个方程解得 $r = r_0 e^{-s}$ 和 $y = (4s + y_0^{-4})^{-1/4}$ ，进而合并为水跃外部解的近似解：

$$v = (1/r)[(r_0 v_0)^{-4} - 4\log(r/r_0)]^{-1/4} \quad (\text{B.3})$$

该方程同样会在一个有限的 $r_s = r_0 e^{\frac{1}{4}(r_0 v_0)^{-4}}$ 处发散，在该半径处同样有：

$$v = (1/r)[4\log(r_s/r)]^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{B.4})$$

其中 r_0 为定义的水体竖直方向速度开始不占主导时的半径位置，即水跃现象的起始位置。将 r_s 取值带入（B.4）后，因水跃前后速度存在关系 $v_1 = \frac{1}{4v_2^2 r} [1 + (1 + 8v_2^3 r)^{\frac{1}{2}}]$ ，其中 v_1, v_2 分别代表水跃前和水跃后速度，可求得：

$$r_s \approx e^{\frac{1}{4}v_2^4} \quad (\text{B.5})$$

可见，只有当 r_s 有极大的变化时，水跃后速度才会有细微的改变。也就是说，该奇点的位置并不会对水跃有显著影响。无论 r_0 和 v_0 取值如何，奇点位置均远大于一般实验中使用的平面边界，因此该奇点位置对于实验也并无显著影响。

附录 C 垂直入射倾斜平面水跃模型推导

在求解倾斜界面条件下水跃半径，首先需要在运动方程中加入重力方向的修正：

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \cos \theta \frac{dh}{dr} - g \sin \theta + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.2})$$

其中 θ 为水流射出方向与竖直方向夹角。并定义常数 c_3 和 c_4 如下所示：

$$2u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u^2 + \frac{h'}{h} u^2|_{z=h} = -c_3 \left(G + \frac{dh}{dr} \right) - \frac{c_3}{c_4} \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} \quad (\text{D.3})$$

而后需要在变量 u, w, r, z 的无量纲化过程中加入重力方向的无量纲常数修正：

$$u = \alpha \tilde{u}, w = \beta \tilde{w}, r = \gamma \tilde{r}, z = \delta \tilde{z} \quad (\text{D.4})$$

其 中 $\alpha = \left(c_1^{-\frac{1}{2}} c_2^{\frac{1}{8}} \right) q^{\frac{1}{8}} v^{\frac{1}{8}} (g \cos \theta)^{\frac{3}{8}}$ ， $\beta = q^{-\frac{1}{4}} v^{\frac{3}{4}} (g \cos \theta)^{\frac{1}{4}}$ ， $\gamma = \left(c_1^{\frac{1}{2}} c_2^{-\frac{3}{8}} \right) q^{\frac{5}{8}} v^{-\frac{3}{8}} (g \cos \theta)^{-\frac{1}{8}}$ ， $\delta = \left(c_2^{\frac{1}{4}} \right) q^{\frac{1}{4}} v^{\frac{1}{4}} (g \cos \theta)^{-\frac{1}{4}}$ 。并且新定义一个重力的无量纲量 $G = \left(c_3^{\frac{1}{2}} c_4^{-\frac{5}{8}} \right) q^{\frac{3}{8}} v^{-\frac{5}{8}} (g \cos \theta)^{\frac{1}{8}} \tan \theta$ 。

接下来对 $u(r, z)$ 进一步拆解为 $u(r, z) = v(r) f'(z/h(r))$ ，其中 $v = \bar{u}$ ， f 为描述水膜垂直方向结构的函数。从而可以构建出带重力参数的 v 关于 r 的微分方程用于求解水跃半径：

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v - v^5 r^4 - G v^2 r^2}{v^3 r^2 - r}$$

最后通过实验近似出 r_s 与 r_j 之间的线性关系，并得出最后的水跃半径表达式

$$R_j \simeq 0.55 r_s (G, r_0, v_0) \times q^{\frac{5}{8}} v^{-\frac{3}{8}} (g \cos \theta)^{-\frac{1}{8}} \quad (\text{D.5})$$

附录 D 对于垂直方向取平均速度合理性证明

设流函数 $\Psi(r, z)$ 为 $u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$, $w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$, 可解出线性化后的边界层方程 $\frac{dh}{dr} = \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3}$, 从而可得出一个仅关于 $h(r)$ 的微分方程 $h'h^3 = -3/r$, 并可解得

$$h = (c - 12 \log r)^{1/4} \quad (\text{C.1})$$

其中 c 为常数。故 Ψ 的解为:

$$\Psi = \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right) \quad (\text{C.2})$$

如果忽略常数项, 式 (C.1) 与式 (B.4) 完全一样。且与式 (B.4) 中 v 的同样会在有限的 r 处发散, 因此可证明方程 (12) 并不存在近似解。故是否在垂直于平面方向取平均速度并不会影响最后的数值结果。

附录 E 数值模拟代码

E.1 流速-半径数值解模拟函数

```
function plt = VR_Numerical_Solve(r0, v0, Ln)
    hold on
    function dyds = ODE(~,y)
        dyds = zeros(2,1);
        dyds(1) = sgn * (y(2).^3 .* y(1).^2 - y(1));
        dyds(2) = sgn * (y(2) - y(1).^4 .* y(2).^5);
    end
    tspan = [0 100];
    sgn = 1;
    [~,Y] = ode45(@ODE, tspan, [r0 v0]);
    plot(log(Y(:,1)), log(Y(:,2)), Ln);

    cut = find(Y(:,1)>1,1);
    disp(cut);
    grad = (Y(cut, 2) - Y(cut-1, 2)) / (Y(cut, 1) - Y(cut-1, 1));
    v1 = Y(cut-1, 2) + (1 - Y(cut-1, 1)) * grad;
    v2 = (1 + sqrt(1 + 8 * v1.^3)) / (4 * v1.^2);
    [~,Y] = ode45(@ODE, tspan, [(1+le-4) v2]);
    plot(log(Y(:,1)), log(Y(:,2)), Ln);
    sgn = -0.1;
    [~,Y] = ode45(@ODE, tspan, [(1+le-4) v2]);
    cutR = find(Y(:, 1) > 10, 1) - 1;
    cutV = find(Y(:, 2) > 20, 1) - 1;
    if (isempty(cutV))
        if (isempty(cutR))
            cut = size(Y, 1);
        else
            cut = cutR;
        end
    else
        if (isempty(cutR))
            cut = cutV;
        else
            cut = min(cutV, cutR);
        end
    end
    plt = plot(log(Y(1:cut,1)), log(Y(1:cut,2)), Ln);
end
```

E.2 流速-半径图像绘制程序

```
close all
hold on
a = VR_Numerical_Solve(0.13,15, 'r-.');
b = VR_Numerical_Solve(0.13,5, 'g');
c = VR_Numerical_Solve(0.13,3.5, 'k-.');
d = VR_Numerical_Solve(0.13,2.5, 'b--');

ratio = 1.618;
Width = 20;
ylabel('$V(r)$','interpreter','latex')
xlabel('$r$','interpreter','latex')
set(gca, 'FontName','Times New Roman')
set(gcf,'unit','centimeters','position',[10,10,Width,Width/ratio])

xlim([-2.4 2.5])
tk = [0.1:0.1:0.9 1:10];
xticks(log(tk));
lbs = strings([1 19]);
lbs(1) = "10^{-1}";
lbs(10) = "10^0";
lbs(19) = "10^1";
xticklabels(lbs);
xtickangle(0);
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 16;
ax.XLabel.FontSize = 22;

ylim([-3.5 3.2])
tk = [0.04:0.01:0.09 tk 20];
yticks(log(tk));
lbs = strings([1 26]);
lbs(7) = "10^{-1}";
lbs(16) = "10^0";
lbs(25) = "10^1";
yticklabels(lbs);
ax.YAxis.FontSize = 16;
ax.YLabel.FontSize = 22;

for i = 1:9
    ax.Children(i).LineWidth = 0.8;
end
```



E.3 高度-半径数值解模拟函数

```
function RH = HR_Numerical_Solve(r0, v0, Ln, mkGraph)
    function dyds = ODE(~,y)
        dyds = zeros(2,1);
        dyds(1) = sgn * ( y(2).^3 .* y(1).^2 - y(1) );
        dyds(2) = sgn * ( y(2) - y(1).^4 .* y(2).^5 );
    end
    tspan = [0 100];
    sgn = 1;
    [~,Y] = ode45(@ODE, tspan, [r0 v0]);
    cut = find(Y(:,1)>1,1);

    grad = (Y(cut, 2) - Y(cut-1, 2)) / (Y(cut, 1) - Y(cut-1, 1));
    v1 = Y(cut-1, 2) + (1 - Y(cut-1, 1)) * grad;
    v2 = (1+sqrt(1+8*v1.^3)) / (4*v1.^2);

    Y = [Y(1:(cut-1), :); [1-1e-6 v1]];
    R = Y(:,1);
    V = Y(:,2);
    if (mkGraph)
        hold on
        plot(R, 1 ./ (R .* V), Ln);
    end

    sgn = -0.01;
    [~,Y] = ode45(@ODE, tspan, [(1+1e-4) v2]);
    cut = find(Y(:, 1) > 2, 1);
    Y = Y(1:(cut-1), :);
    if (mkGraph)
        plot(Y(:,1), 1 ./ (Y(:,1) .* Y(:,2)), Ln);
    end
    R = [R; Y(:,1)];
    V = [V; Y(:,2)];
    RH = cat(2, R, 1./(R .* V));
end
```

E.4 高度-半径图像绘制程序

```
close all
hold on
HR_Numerical_Solve(0.13,50, 'k', true);
HR_Numerical_Solve(0.13,10, 'r', true);
HR_Numerical_Solve(0.13,5, 'g', true);
HR_Numerical_Solve(0.13,2.5, 'b', true);

ratio = 1.618;
Width = 20;
ylabel('$h(r)$','interpreter','latex')
xlabel('$r$','interpreter','latex')
set(gca, 'FontName','Times New Roman')
set(gcf,'unit','centimeters','position',[10,10,Width,Width/ratio])
```