参赛队员姓名: 王柯人

中学: 四川省成都市新都一中

省份:四川省

国家/地区:中国

指导教师姓名: 刘成礼

论文题目: <u>圆柱形物体抛掷落地的概率分布</u> <u>结果的动力学预测模型</u> 本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知,除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处,本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员: 王柯人 指导老师: 刘成礼

2022年7月30日

圆柱形物体抛掷落地的概率分布结果的动力学预测模型

作者: 王柯人

单位: 四川省成都市新都一中

邮箱: 3531176373@qq.com

物理上,硬币在地面的反复弹跳中运动趋于混乱,虽然单次抛掷结果变得不可预测,但统计上呈现随着抛掷次数增大的(两面)等概率规律。由于抛掷硬币对初始条件的不敏感性,导致了这一过程可以作为一个最简单的物理随机数发生器。事实上,将硬币落地的行为视为正反等概率这一过程实际上是忽略了侧面厚度带来的微小影响。而对于一个侧面厚度不可忽略的"圆柱形"硬币,抛掷的结果会变得更加复杂有趣。本文系统的研究了一个圆柱形骰子在抛掷落地过程中的动力学及其三面(正、反、侧)出现的可能概率。本文从牛顿经典力学,研究了硬币抛掷过程中的平动、转动等运动规律。进而,我们引入概率统计假设,从能量入手,得到了关于圆柱形物体落地结果概率的理论结果。我们从实验和数值模拟两方面检验了所给出的理论模型,结果符合良好。本文提出的抛掷模型适用范围广,可拓展于其他形状的物体的抛掷过程。本文的研究对于物理随机数产生领域,特别是如抛硬币,抛骰子这类通过碰撞来产生随机数的系统的设计与评估具有较大的实际意义。

关键词:碰撞;滑动摩擦/静摩擦;概率;随机数发生器;自由度

目录

2.理论模型	
2.1 刚体力学模型	6
2.2 概率模型	
2.2.1 概率分析	
2.2.2 概率权重&自由度	9
2.3 势能曲线分析	4 0,
2.3.1 势能曲线定性分析	11
2.3.2 势能曲线定量求解	12
2.4 碰撞过程分析	13
2.5 理论结果与讨论	
2.5.1 能量损耗系数影响	14
2.5.2 自由度	15
2.5.3 质量分布	16
2.5.3 影响能量损耗系数因素	16
2.6 理论修正	17
3.理论模拟	
3.1 模拟程序	17
3.2 模拟预测	17
4. 实验探究	
4.1 实验装置	19
4.2 参数测量	20
	20
4.4 结果分析	
5. 总结与展望	23
5. 参考文献	

1.引言

投掷硬币是一个经典的物理过程。该过程的初始条件多,有速度,角速度等三维矢量,以及 抛掷高度等因素,且都呈连续变化。同时又由于它的碰撞具有非线性特征,如硬币与地面撞击的 瞬间,变化最为随机的就是硬币的碰撞角,也就是质心与碰撞点连线与水平面夹角,由于硬币这 种质量分布较为集中的物体的转动惯量在量级上远小于质量,在碰地时冲量矩的作用下,硬币每一次碰撞角随时间或随平动速度的变化都将会非常敏感,所以在多次碰撞后,这种效应会被放大,导致硬币的抛掷结果几乎是一个不可预测的概率行为,即其本质就是一个随机数产生器。

其实生活中,经常采用抛硬币作为一种随机数发生器。传统的结果预测只关注正面、反面,而又由于硬币本身正反面的对称性,人们容易得到正反面概率各为 50%。本文将其结果的预测扩展为正面、反面和侧面,如果考虑侧面概率是对传统的二元随机数发生器的极大补充。特别的,硬币侧面落地的概率并不完全取决于硬币本身,也受地面材质等因素的影响。 这是本文的重点。

历史上对其侧面概率的研究大概分为两类。一类是对完全非弹性碰撞的研究¹¹,主要专注于对其运动姿态的分析。第二类是非完全弹性碰撞下硬币多次碰撞后的侧面概率,而这也是研究的重点及难点。对此研究对象的研究思路又可以分为三类。第一类是由决定论入手,利用碰撞方程,力图完全掌握硬币运动的全部细节^[2],但这样进行分析或迭代都无法避免使其过程复杂化,同时,H. Bondi 指出在误差可接受范围内最多只能计算 2 次碰撞^[2],这显然不能解决非完全弹性碰撞下的概率问题。第二类是寻找使结果为侧面的速度时所满足的边界条件,再由概率学公式得出概率。然而 Lluís Hernández-Navarro, Jordi Piñero 在计算概率时假设了速度均匀分布,导致最后结果缺少恢复系数的影响。第三类着重于将硬币的不同结果与正反面以及侧面的不同重力势能相联系,并且进一步发现其正好对应于硬币旋转中的三个势陷,所以基于运动中能量损失与势能的关系,完全由能量来分析过程^[4]。

笔者认为第三类方法最能体现硬币的真实物理过程,最接近物理本质,同时最易于分析。具体而言,硬币多次碰撞中速度方向变化快,不易分析,而动能则很好地把握了速度的大小,绕过了方向的讨论,极大简化了理论;同时正如这类文献中提到的,观察硬币的最终状态:正面,反面,侧面实质上是硬币的稳定状态,对应着势能的三个最低点,即势陷。而硬币的碰撞过程:不断反弹最后在稳定位置附近微振动,也恰恰可以结合动能与势能以及碰撞的能量损失来更好的说明。因此能量分析是简化该过程的重点。

综上,从 L. Mahadevan, Ee Hou Yong 对几何边界的讨论[1],再到 Kuindersma S R,Blais B S 对物理影响因素的初步讨论[4],最终启发了笔者对恢复系数,摩擦系数以及自由度进行了完全定量的讨论。过去的实验数据往往忽略了以上几点影响因素[1,3],或是将纯几何理论与实验值的误差简单归因于影响碰撞的随机性[3]。这会导致不同文献的相同形状的骰子实验数据结论相差过大,实验与理论对比没有说服力。当然 Kuindersma S R,Blais B S 的研究也不妨是一种好的思路,未来如果结合本文对恢复系数,释放高度等因素对系统的影响进行了深入分析,可以得到由恢复系数,碰撞次数等多种参数决定的硬币碰撞过程中的平均动能,从而得到均方速度与均方角速度。如果进一步假设速度满足正态分布,就可以将恢复系数等参数纳入考虑,同时还可以分析碰撞次数的影响,引入自由度概念,以完善 Kuindersma S R,Blais B S 的研究思路。

除此之外,本文以文献[5]的思路为基础,补充了单次碰撞的计算,联系接触面参数(恢复系数,摩擦系数)详细计算了能量损失率,同时再结合基础概率学知识,区分运动自由度,对

Kuindersma S R, Blais B S 的研究做出了多点修正,从而对圆柱形骰子的投掷结果建立了预测模型。本文的研究思路对于任何物体的多次碰撞都可以推广,并扩充了本领域的研究变量。特别地,本文通过计算得出了一种"绝对概率骰子",其特殊的几何边界使其侧面也具有如正反面一般的对称性,从而使其侧面概率不依赖与外在影响因素如接触面的物理因素(恢复系数,摩擦系数),这对其实际应用有巨大价值。

2.理论模型

2.1 刚体力学分析

将硬币与地面的多次碰撞问题简化为平面内的单次碰撞,自由度为 4。在初始条件已知的碰撞中,采用刚体力学进行求解。如图 1 所示,硬币的初始运动参数分别为 v_{x0} , v_{y0} , ω_0 ,末运动参数分别为: v_x , v_y , ω ,硬币的转动惯量为J,接触面恢复系数为e,摩擦系数与摩擦角分别为 μ , δ ,同时定义碰撞角 θ 为接触点与质心连线与平面夹角,质心与接触点连线长度为r。注意 δ 在计算中为负值。在碰撞时刻,物体受到的外力为地面对物体作用力和重力。因待研究问题碰撞时间极短,因而忽略重力的冲量影响,仅讨论地面对物体作用力的影响。

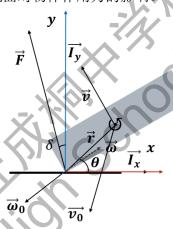


图 1 硬币碰撞时运动参数图示

在以接触面法线为y轴的坐标系中,在x,y方向上运用动量定理可以得到:

$$\begin{cases} I_y = \cos \delta \cdot I = m(v_y - v_{y0}) \\ I_x = \sin \delta \cdot I = m(v_x - v_{x0}) \end{cases}$$
 (1)

其中*I*为接触力(支持力与摩擦力合力)的冲量。同时以质心为转动瞬心,运用角动量定理得到:

$$\cos(\theta + \delta) \cdot rI = J(\omega_0 - \omega) \tag{2}$$

实验发现,撞击后物体普遍具有一个水平速度,于是使得作用力向接触面法线方向倾斜。倾斜原因可能因摩擦力所致,也可能由于接触面具体形变导致,下面我们讨论摩擦力的影响。

在存在摩擦的情况,由于摩擦力总是趋向于减小物体在接触面间切向方向的相对速度且趋向于保持其无切向相对速度,所以在实际的碰撞过程中,摩擦力的引入可能会出现多过程分析。

具体来说,由于刚体在旋转,所以与地面接触的位置,即撞击点P的速度由质心速度与旋转产生的线速度合成,最终可能会有切向的初速度 v_{PY0} 。当处于某一特殊的撞击初始条件下时,在

撞击过程可能出现临界时间点: t', 此时切向速度变化到0。在此之后,摩擦力就会保持撞击点无切向速度的状态直到碰撞结束。

如果假设摩擦力的方向始终不变,大小正比与正压力,为滑动摩擦力,对物体撞击点施加切向方向的力。那么,如果最后水平方向的末速度与初速度方向不同,就表明在碰撞中存在临界点,摩擦力不一定方向不变,存在静摩擦力;反之,如果水平方向的速度变化量不大,初末速度方向相同,就可以用滑动摩擦力描述碰撞过程。关于临界点的理论分析见附录。下面计算较为简单的滑动摩擦情况。

$$e = -\frac{\omega r \cdot \cos \theta - v_y}{\omega_0 r \cdot \cos \theta - v_{y_0}}$$

$$\tan \delta = \mu$$
(3)

联立(1)(2)(3)(4)式,可解得:

$$\begin{cases}
\omega = \frac{\cos \delta \cdot J \omega_0 - \cos(\theta + \delta) \cdot mr(ev_{Py_0})}{\cos \delta \cdot J + \cos \theta \cdot \cos(\theta + \delta) \cdot mr^2} \\
v_x = v_{x0} + \tan \delta (v_y - v_{y0}) \\
v_y = -ev_{Py_0} - \omega r \cos \theta
\end{cases} \tag{5}$$

$$v_{Py0} = \omega_0 r \cdot \cos \theta + v_{y0} \tag{6}$$

此结果的成立条件是:

$$(v_{x0} - \sin\theta \cdot \omega_0)(v_x - \sin\theta \cdot \omega) > 0 \tag{7}$$

关于临界点的理论分析见附录。由于考虑摩擦时的多过程计算结果过于复杂,因此本文仍采用单一过程的摩擦理论。该理论要求碰撞后碰撞点水平速度变化不大,即要求水平冲量较小,所以仅在摩擦系数较小时,即 $|\delta|$ 《1时才近似成立。进一步化简(5)式得:

$$\begin{cases} v_{y} = -\frac{ek^{2}\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}v_{y0} - r\frac{(1+e)k^{2}\cos\theta\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\omega_{0} \\ \omega = -\frac{er\cos(\theta+\delta)}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}v_{0} + \frac{k^{2}\cos\delta-er^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\omega_{0} \end{cases} \\ v_{x} = v_{x0} + \tan\delta\left(\left(-\frac{ek^{2}\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)} + 1\right)v_{y0} - r\frac{(1+e)k^{2}\cos\theta\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\omega_{0}\right) \end{cases}$$
(14)

2.2 概率分析

2.2.1 能量分析

在2.1 节中通过计算得出了在接触角已知时初末运动的参数关系。考虑到硬币的多次碰撞本质上是能量的多次损失,才导致了硬币抛掷的最终结果。所以,因速度的损耗所导致的能量的损耗过程是本文接下来理论分析的重点。然而,在多次碰撞过程中,接触角不断发生改变,同时速度具有正负,难以具体分析大小。故本节将利用速度的平方项来研究该过程中的能量变化。将(14)式两边同时平方得:

$$\begin{cases} v_{y}^{2} = \left(\frac{ek^{2}\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\right)^{2}v_{y0}^{2} + \left(r\frac{(1+e)k^{2}\cos\theta\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\right)^{2}\omega_{0}^{2} + 2\sim v_{y0}\cdot\omega_{0} \\ \omega^{2} = \left(\frac{er\cos(\theta+\delta)}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\right)^{2}v_{y0}^{2} + \left(\frac{k^{2}\cos\delta-er^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\right)^{2}\omega_{0}^{2} - 2\sim v_{y0}\cdot\omega_{0} \\ v_{x}^{2} = v_{x0}^{2} + \tan^{2}\delta\left(\left(-\frac{ek^{2}\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)} + 1\right)^{2}v_{y0}^{2} + \left(r\frac{(1+e)k^{2}\cos\theta\cos\delta}{k^{2}\cos\delta+r^{2}\cos\theta\cos(\theta+\delta)}\right)^{2}\omega_{0}^{2}\right) + \mathcal{Z}\mathcal{J}\mathcal{J} \end{cases}$$

$$(15)$$

此时平方项恒为正,对应能量,但产生了复杂的交叉项。不过注意到角速度在一次抛掷的多次碰撞或多次抛掷的多次碰撞过程中具有对称性,即物体在重力场中运动时,在转动方向上具有对称性,故角速度平均值为 0:同理,在水平面内水平速度也具有对称性(各向同性),其平均值也为 0:

$$\overline{\omega}_0 = 0, \overline{v_{x0}} = 0 \tag{16}$$

因此对参数求平均值可以消掉所有交叉项。将能量表达式代入(15)式:

$$\begin{cases} E_{ky} = \frac{1}{2} m v_y^2 \\ E_{kx} = \frac{1}{2} m v_x^2 \\ E_r = \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 \end{cases}$$
 (17)

虽然能量不是矢量,但是本文中能量代指速度分量的大小,有水平竖直之分。其中 E_{ky} , E_{kx} , E_r 分别是竖直方向速度具有的平动动能(以后简称竖直动能),水平动能,转动动能。在对系数求平均后, E_{ky} , E_r 之间将存在线性关系: (平均过程在 2.2.2 节详细说明)。而对于 E_{kx} 的讨论,将在 2.4 节说明。它们之间满足关系:

$$\begin{cases}
\overline{E_{ky}} = \overline{a}\overline{E_{ky0}} + \overline{b}\overline{E_{r0}} \\
\overline{E_r} = \overline{c}\overline{E_{ky0}} + \overline{d}\overline{E_{r0}}
\end{cases}$$
(18)

其中系数a, b, c, d都是关于 θ 的函数:

$$\begin{cases} a = \left(\frac{e\varepsilon^{2}\cos\delta}{\varepsilon^{2}\cos\delta + \cos\theta\cos(\theta + \delta)}\right)^{2}, b = \left(\frac{(1 + e)\varepsilon\cos\theta\cos\delta}{\varepsilon^{2}\cos\delta + \cos\theta\cos(\theta + \delta)}\right)^{2} \\ c = \left(\frac{e\varepsilon\cos(\theta + \delta)}{\varepsilon^{2}\cos\delta + \cos\theta\cos(\theta + \delta)}\right)^{2}, d = \left(\frac{\varepsilon^{2}\cos\delta - e\cos\theta\cos(\theta + \delta)}{\varepsilon^{2}\cos\delta + \cos\theta\cos(\theta + \delta)}\right)^{2} \\ \varepsilon = \frac{k}{r} \end{cases}$$
(19)

当物体为实心圆柱体时有:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12R^2 + 4h^2}{12R^2 + 3h^2}}$$

$$R > h, \quad \varepsilon \approx \frac{1}{2}$$
(20)

从能量转化方程(18)式可以发现, E_{ky} , E_r 两种能量间相互耦合,在碰撞中互相转化。猜测其具有等价性,因此再次对所有系数平均,有

$$o = \frac{(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})}{4} \tag{21}$$

其中o代指部分能量转化率,是计算过程中的中间量。将能量转化写成递推关系,最后(18) 式化为: $(n\epsilon N^*)$

$$\overline{E_{kyn}} = o(\overline{E_{kyn+1}} + \overline{E_{rn+1}})$$
(22)

$$\overline{E_{rn}} = o(\overline{E_{kyn+1}} + \overline{E_{rn+1}}) \tag{23}$$

将(23)式迭代并反复代入(22)式得:

 $\overline{E_{kyn}} = o(\overline{E_{kyn+1}} + o(\overline{E_{kyn+2}} + o(\overline{E_{kyn+3}} + \cdots))) = o\overline{E_{kyn+1}} + o^2\overline{E_{kyn+2}} + o^2\overline{E_{kyn+3}} + \cdots (24)$ $\stackrel{\text{def}}{=} n \to n+1$:

$$o \times \overline{E_{kyn+1}} = o \times \left(o\overline{E_{kyn+2}} + o^2\overline{E_{kyn+3}} + o^2\overline{E_{kyn+4}} + \cdots\right) \tag{25}$$

将(25)式代入(24)式,由于0<1,而 $n\to\infty$,所以 $0^n\to 0$ 可以得到:

$$\frac{\overline{E_{kyn}}}{\overline{E_{kyn+1}}} = 2o \tag{26}$$

由此定义竖直能量损失率λ为两次碰撞前后竖直能量之比,即为:

$$\lambda = 2o = \frac{(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})}{2} \tag{27}$$

此为线性表达式,对系数a,b,c,d分别求平均不影响结果。

2.2.1.1 能量修正

由于前文考虑的属于滑动摩擦力,所以其做负功,增大能量损耗。然而,当实际考查(19)式中a,b,c,d函数值时,发现当 δ 增大时,在 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,a,b,c,d同时增大。这不符合摩擦力是耗散力的本质,其原因是没有考虑 δ 随运动趋势的 $^{+}/_{-}$ 变化。因此,考虑到硬币运动时关于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 显然具有对称性,2.2.2 节中对于系数a,b,c,d求平均时会将系数 $a(\theta),b(\theta),c(\theta),d(\theta)$ 关于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称,即 $\theta \to \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right|$ 。

2.2.2 概率权重及自由度分析

在多次抛掷的多次碰撞中,硬币的落地碰撞角是随机分布的,但不一定是均匀分布。由于硬币直立,底面与地面二面角为 $\frac{\pi}{2}$,而碰撞角此时并不为 $\frac{\pi}{2}$ 。设 θ' 为取向角(圆柱体底面与地面夹角)。由于取向角更能体现硬币的旋转状态,所以设概率权重函数 $P_0(\theta')$ 是关于 θ' 的函数(由对称性知函数一定关于 $\theta'=\frac{\pi}{2}$ 对称,因为硬币的旋转关于其直立对称)。由于硬币旋转时,撞击点(接触点)的位置会发生突变,取向角与碰撞角有以下对应关系:

$$\begin{cases} \theta' = \theta - \alpha, \theta' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \theta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \theta' = \theta + \alpha, \theta' \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \to \theta \in \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \pi - \alpha\right) \end{cases}$$
(28)

当 θ' 取遍 $(0,\pi)$, θ 会发生突变。由于 θ 范围关于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 具有对称性,所以不妨计算各系数在 $\theta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 区域的平均值:

$$\begin{cases}
\overline{x_i} = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} x_i \left(\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \right) \cdot P_0^2(\theta') d\theta, (x_i = a, b, c, d) \\
\theta' = \theta - \alpha
\end{cases}$$
(29)

未知的概率权重 P_0 应为(14)式线性方程的权重,在对(19)式进行平方时,权重函数应同时平方。

而对于对 P_0 的推导,需要对圆柱体的运动做规定。下面按刚体自由度(DOF)的不同将圆柱体的运动分为平面平行运动和自由运动。由于圆柱体的取向是连续变化的,所以应当利用几何概型计算概率,不同的运动情况对应着不同的概型。

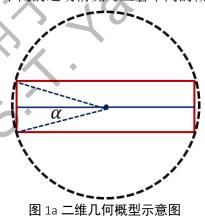




图 2b 三维几何概型示意图

图 2 不同自由度下几何概型示意图

2.2.2.1 平面平行运动

当圆柱体在理想平整接触面上碰撞,且释放时初角速度方向随机,或无初角速度时,其运动"限制"在平面内。如图 2a 所示, α 是侧面所对圆心角的 1/2,R 为圆柱体半径,h 为圆柱体直径,根据几何关系有:

$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{h}{2R})\tag{30}$$

此时,圆柱体的取向分布在圆上,取向在一定范围内的概率正比于所对圆心角或弧长。显然侧面区域对应角度为 α 。因此落在侧面区域的概率 p_{α} 可表示为:

$$p_e = \frac{4\alpha}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{h}{2R}\right), \text{ DOF} = 3$$
 (31)

2.2.2.2 自由运动

除以上理想接触面或特定释放操作外,其他情况,如接触面不完全平整,释放初角速度方向任意,贾尼别科夫定理的影响等都会导致圆柱体在碰撞过程中在空间自由运动。此时圆柱体取向对应在球面上,如图 2b 所示,取向在一定范围的概率正比于所对立体角或球面面积(即对二维情况进行合理外推):

$$p_e = \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{(2R)^2 + h^2}}, \text{DOF} = 6$$
 (32)

以上两种不同运动情况所对应的不同概型,表面上会影响侧面区域概率大小,本质上是影响了概率分布,产生了不同概率权重。而由于前文的理论分析中的参数都是建立在圆柱体碰撞截面上的,即包含撞击点的最大截面,所以需要在此截面上再考虑不同概型的概率权重分布。

2.2.2.3 权重讨论

在单次抛掷的连续碰撞过程中,实验发现,由于低高度下前后两次碰撞的相关性较大,所以碰撞随机性弱,受低高度释放的"初始条件"的影响较大。而本文所求得概率,实为多次抛掷多次结果中的概率,所以在多次抛掷中,每次到达低高度的"初始条件"都不同,且目前已有研究表明无上述 2 种取向分布外的其它取向分布,所以本文对碰撞时的取向分析是比较严谨的。除此之外,对于多次碰撞过程中的速度,角速度等目前还没有深入研究,对此文献^[3]中对其的假设一一均匀分布与实际情况不符。

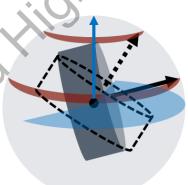


图 3 自由运动截面角度分布

透明蓝色平面为进动平面,红色为章动角一定时进动的范围。

现在讨论截面上的角度分布。平面平行运动显然在截面上取向是均匀分布的,所以碰撞角就 是在其上均匀分布。而自由运动时,可以引入欧拉角章动角与进动角来描述三维取向。如图 4 所 示,章动角为θ′。在章动角一定时,不同进动角在对应截面上是等效的,所以章动角概率分布与 所对红色球面面积沿6′的变化相同,即碰撞角概率不是均匀分布的,在赤道附近概率较大。简单计算,自由运动时,碰撞角的概率权重是呈正弦函数型。

$$\begin{cases}
P(\theta') \propto 1, \text{DOF} = 3 \\
P(\theta') \propto \sin\theta', \text{DOF} = 6
\end{cases}$$
(33)

由概率归一性可得(29)式中 $P_0(\theta')$:

$$\begin{cases} P_0(\theta') = \frac{2}{\pi}, \text{DOF} = 3\\ P_0(\theta') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\theta', \text{DOF} = 6 \end{cases}$$
(34)

2.3 势能曲线

2.3.1 势能曲线定性分析

在上述理论分析的基础上,本文从碰撞过程能量关系入手,计算最终碰撞结果的概率。据实验现象,本研究将连续碰撞分为强碰撞和微碰撞,如图 4 所示。

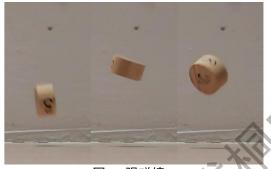


图 4a 强碰撞



图 4b 微碰撞

图 4 不同碰撞方式的实物照片

强碰撞使圆柱体弹起并足以旋转后重新落地;而微碰撞发生在圆柱体多次碰撞损失能量后, 在地面附近振动,此时抛掷结果已经确定,所以微碰撞不改变抛掷结果。

为方便说明,本文将圆柱体多次碰撞的过程类比为小球在曲线上运动的过程,如图 5 所示。

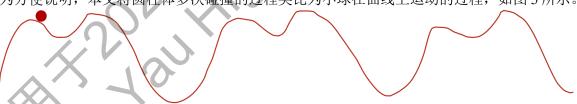


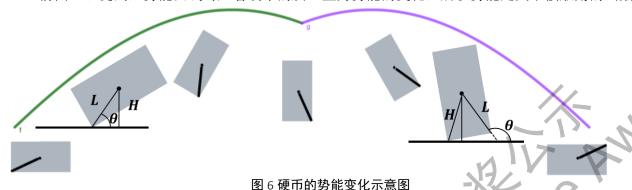
图 5 类比碰撞过程示意图

该曲线的高度对应着圆柱体的质心重力势能大小,而水平位置对应着不同的接触角。可以预见到:曲线的两种凹陷处分别对应着圆柱体的两种稳态(稳定平衡点),也就是最终结果——正反侧面。当圆柱体多次碰撞时,每次碰撞都具有一定动能,势能和碰撞角;对应着一个在曲线确定位置上的具有动能的小球。

对结果进行定性分析可知,当动能较大时,小球可以从曲线凹陷处逃逸,这就像一个强碰撞,让小球重新落回曲线上时,具有不同的位置(接触角),然后重新循环。同时每次碰撞会损失一部分能量,所以在多次碰撞后,当小球落回曲线上一定位置时,可能动能不足以使其逃逸,于是它便会陷入不同的势陷中,做多次微碰撞,最后稳定在一种结果上。进一步地,本文进行定量分析,以得到两种结果的概率计算公式。

2.3.2 势能曲线定量求解

前面已经提到,势能曲线对应着硬币的质心重力势能的变化,所以势能是关于接触角的函数。



如图 6 所示,势能是在不同的碰撞角范围的分段函数。将碰撞点与质心连线简称为"连线",

长度L。可以预见到,曲线具有对称性,且最大值对应着连线垂直于接触面,而以硬币直立为界, 当 $\theta \in \left(\alpha,\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 时,设H是连线L在竖直方向的投影: $H=L\sin\theta$;而当转过临界角度 $\alpha+\frac{\pi}{2}$,H仍是投影,不过角度大小突变为 $(\theta-2\alpha)$,故 $H=L\sin(\theta-2\alpha)$,设硬币重力为G。综上,曲线方程为:

$$V = \begin{cases} GL \sin \theta, \theta \in \left(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ GL \sin(\theta - 2\alpha), \theta \in \left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \alpha + \pi\right) \\ \dots \end{cases}$$
(35)

2.3.2.1 平均势能曲线

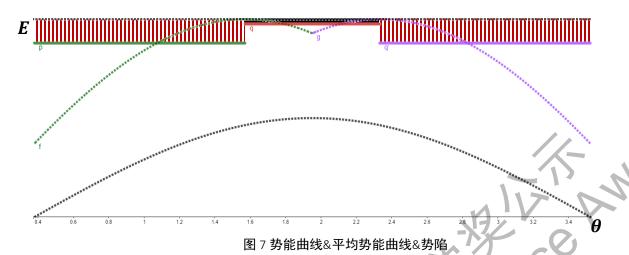
定义当圆柱体动能大于与当前势能与势能最大值GL的差时,圆柱体会做一个强碰撞,并在下一次落地时按权重随机它的接触角。然而,在已知概率权重分布但碰撞角的具体大小未知的情况下,本文将势能简化为平均值,而逃逸能量也为平均值。由于侧面势陷与正反面势陷分别对应侧面稳定结果与正反面稳定结果,所以以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 为界,在碰撞角权重下,两个部分(正反面和侧面)对应逃逸所需的平均最小动能是:

$$\begin{cases} E_h = GL \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) P_1(\theta) d\theta \\ E_e = GL \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) P_2(\theta) d\theta \end{cases}$$
(36)

其中 $P_1(\theta)$, $P_2(\theta)$ 对应着不同角度范围内的概率权重,由归一化条件可得:

$$\begin{cases}
P_{1}(\theta) = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\frac{\pi}{\int_{0}^{2} \alpha} \sin \theta \, d\theta} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{1 - \sin \alpha} \\
P_{2}(\theta) = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\frac{\pi}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \alpha} \sin \theta \, d\theta} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha}, \text{DOF} = 6
\end{cases}$$
(37)

$$\begin{cases} P_1(\theta) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha}, \text{DOF} = 3 \\ P_2(\theta) = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$
(38)



横轴是碰撞角,纵轴是势能(因为后文只需要相对大小所以无具体值)。绿色虚线与紫色虚线分别是以 $\theta' = \frac{\pi}{2}$ 为界的势能变化连续曲线,灰色线为概率权重(未成比例),实线是加权平均后分离的势能值,阴影部分高度即为平均逃逸能量。

2.4 碰撞过程分析

由于圆柱体的势能是重力势能,而当圆柱体在一个高度下落时,落地时会具有一个能量: E,然后发生碰撞。设碰撞次数为n。

由于虽然硬币的势能对应于竖直方向位移,即竖直方向速度才会造成势能的改变,但是在竖直动能、水平动能、转动动能之间,竖直动能与转动动能之间存在密切的转化关系,且在硬币稳定后两者同时为 0,二者应视为整体;而在有摩擦时,以上两者能量损耗加大,同时水平动能的转化单向依赖于以上两者,且在硬币稳定后不一定为 0(稳定后的滚动),可以理解为它最后"偷走"了系统的能量,所以不属于整体。所以能量E指竖直动能与转动动能,可以利用(27)式说明能量损耗。

虽然碰撞是离散的,能量是不连续的,但是在多次抛掷的多次碰撞之中,能量E可以取到连续的值,所以E可以看作连续变化,也等价于碰撞次数n取连续的实数。这样在多次碰撞之后,能量一定可以损失到一个关键值: $[E_h, E_e]_{max}$,即平均逃逸能量中的较大者。

现在讨论两者的相对大小: 当圆柱体较扁时,明显正反面势能更低,那么平均逃逸能量更大; 反之亦然。不过注意到由于截面的碰撞角分布不一定均匀,所以自由度对其相对大小有较大影响。 DOF=3 时,截面为正方形,即2R=h时, $E_h=E_e$; DOF=6时,经计算得 $^{2R}/_h\approx 1.33$ 时, $E_h=E_e$ 。下面针对 E_h 和 E_e 不同大小关系下的情况分别进行讨论。

2.4.1 $E_h > E_e$ 的情况 ^[2]

对常见的扁圆柱体(如硬币等)进一步分析碰撞过程。当动能损失到关键值 E_h 时,我们认为,一旦圆柱体落入平均势能函数的深势陷内,它便不能逃逸,然后继续微碰撞损失能量直到稳定。前文已经计算落在每个区域内的概率。但是这样不便于具体计算正反面概率,所以换一种研究思路,求解侧面概率。

因为一旦落入深势陷,即正反面势陷,那么圆柱体最终就不会稳定在侧面。那么如果圆柱体 在之后每一次落地时,取向都是侧面,那么直到能量损失到无法逃逸浅势陷,即侧面势陷,会发 生n次碰撞:

$$\lambda^{n-1}E_h = E_e \tag{39}$$

此时的概率为:

$$P_e = p_e^n \tag{40}$$

这样圆柱体不会稳定在正反面,并会最终稳定在侧面。注意到(34)、(35)式中的GL已被约去。

2.4.2*E_b* < *E_e*的情况

当圆柱体较厚时,分析类似,不过此时的能量关键值为侧面逃逸能量,仿照(39)式计算可以得到正反面概率为:

$$\begin{cases} \lambda^{n-1} E_e = E_h \\ P_h = (1 - p_e)^n \end{cases}$$
 (41)

而由概率归一性可得侧面概率: $P_e = 1 - P_h$

2.4.3 $E_h = E_e$ 的情况

此种情况被称之为"绝对概率骰子",其特殊的几何边界 $^{2R}/_h \approx 1.33$ 使得 $n \equiv 1$,概率与 λ ,即恢复系数/摩擦系数等物理/接触面因素无关,这与[7]的模拟数据相符合。由(30)式、(39)式、(40)式得到此时侧面概率为:

$$P_e' \approx 0.60 \tag{42}$$

2.5 理论结果分析与讨论

本理论预测模型针对与圆柱形物体的不同释放条件,且将摩擦力大小、运动自由度和几何参数考虑在内。其中(19)、(20)、(27)、(29)、(30)、(36)式共同给出了硬币的普遍运动规律,涉及能量损失和势能曲线; (39)、(40)、(41)式通过碰撞过程的具体分析,给出了侧面概率计算公式[2]; (31)、(34)、(38)式给出了DOF = 3时特殊的权重函数; (32)、(34)、(37)式给出了DOF = 6时特殊的权重函数;结合以上14式,就可以由 $^{2R}/_h$, $_k$, $_e$, $_\delta$ 计算硬币侧面概率 $_e$.下面定性地讨论理论模型中的一些细节。

2.5.1 能量损耗系数影响

对于扁圆柱,其体 $E_h > E_e$

$$P_e = p_e^{\left(\log_{\lambda} \frac{E_e}{E_h} + 1\right)}$$

当能量损耗减少, 能量损耗系数增大时,

$$\lambda \uparrow \Rightarrow log_{\lambda} \frac{E_{e}}{E_{m}} \uparrow (\frac{E_{e}}{E_{m}} < 1) \Rightarrow (p_{e} \downarrow)^{\left(log_{\lambda} \frac{E_{e}}{E_{n}} + 1\right)} (p_{e} < 1) \downarrow \downarrow$$

同理对千厚圆柱体, 其 $E_{k} < E_{k}$

$$\begin{split} P_e &= 1 - (1 - p_e)^{\left(log_{\lambda} \frac{E_h}{E_e} + 1\right)} \\ \lambda \uparrow \Rightarrow log_{\lambda} \frac{E_h}{E_e} \uparrow \left(\frac{E_h}{E_e} < 1\right) \Rightarrow \left((1 - p_e) \uparrow\right)^{\left(log_{\lambda} \frac{E_e}{E_n} + 1\right)} ((1 - p_e) < 1) \uparrow \downarrow \end{split}$$

结论:对于扁圆柱体,自由度的下降会导致侧面概率显著下降。而厚圆柱体尚不明确。而随着释放高度的增加,自由度必会变大,所以概率变大。

2.5.2 自由度

自由度是本研究的一个重点。在低自由度下,侧面权重降低, p_e 减小。权重函数的改变会导致能量系数a, b, c, d改变。经过计算(可见 4.2.2),自由度越高, λ 变小,侧面概率越大。

2.5.3 质量分布

除了几何参数影响质量分布外,空心圆柱体同样在不影响对称性的情况下,轻微增加了能量 损耗,结合 2.6.1 可以定性说明其对侧面概率的影响。以DOF = 6为例,由于 λ 与 ϵ 的单调关系不明 显,所以利用软件做出了图 8,从而可以得到:

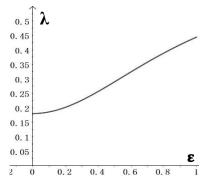


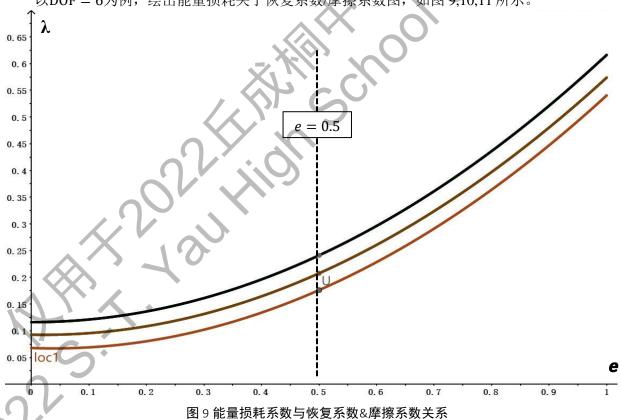
图 8 能量损耗系数λ与ε呈正相关

空心
$$\Rightarrow \frac{J}{m} \uparrow \Rightarrow \varepsilon \uparrow \Rightarrow \lambda \uparrow$$

即空心导致侧面概率减小。

2.5.4 影响能量损耗系数因素

以DOF = 6为例,绘出能量损耗关于恢复系数/摩擦系数图,如图 9,10,11 所示。



》图 9 中从上到下分别是 $\mu = 0,0.5,1$ 时,能量损耗系数随恢复系数的变化,呈正相关。恢复系数的影响在e = 0.5后变得显著.

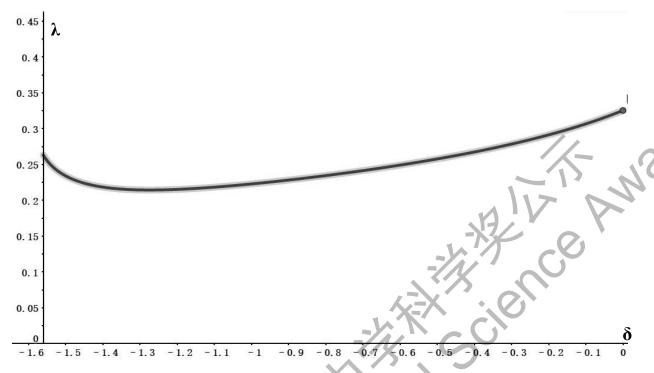


图 10 能量损耗系数关于摩擦角的函数

图 10 中,e=0.6, R/h=5,因为计算精度限制,摩擦角不能取到 $-\frac{\pi}{2}$,图中 $\delta\in(-1.56,0)$ 。在摩擦系数较大时 $(\mu\gg1)$,发现能量损失系数反常增大(图 11)。这恰与 Kane 难题的能量守恒问题相照应。解决方法是采用临界点讨论另列方程。但是由于分段过于复杂,所以在本次研究中,着重于摩擦系数较小的情况。

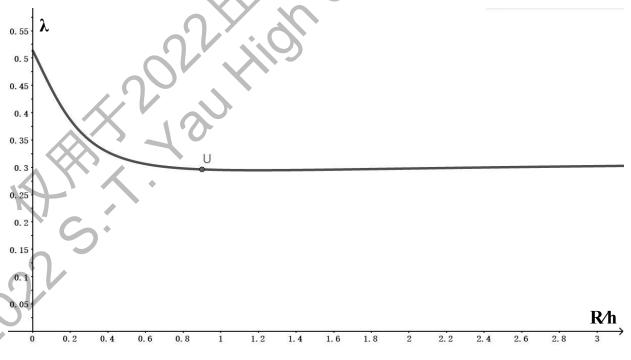


图 11 能量损耗系数的几何影响因素

图 11 中,e=0.6,在R/h很小时,能量损耗系数急速增大,能量损耗减少。而在R/h>0.5后,R/h的影响可以忽略。

2.6 理论修正

2.6.1 刚体模型误差

理论中将圆柱体考虑为绝对刚体在一般实际情况中都适用。但是若圆柱体与接触面任一是不可忽略形变的软体,那么理论需要修正。

考虑大形变带来 2 个影响:接触力的方向偏差和碰撞时间延长。理论中已经提及到接触力的偏离可以由形变引起,而形变的动态变化过于复杂。假设前者影响不大。后者主要带来重力的冲量影响。

定性分析重力的影响,发现重力总是倾向于使圆柱体"躺平",也就是使其势能降低,放大 θ 在 α , π – α 附近的概率权重,最后会导致逃逸能量 E_h 增大,减小侧面概率。

2.6.2 贾尼别科夫定理

贾尼别科夫定理是指有三个转动主轴的物体在空间自由旋转时沿其中等大小的转动主轴转动 是不稳定的^[3]。

对于实验情况下的圆柱体不可能完全对称,设三个转动主轴为 I_1 , I_2 , I_3 ,所以一定有 $I_1 > I_2 > I_3$,即圆柱体存在一个中心轴 I_2 。当转动沿 I_2 时角速度方向会发生大的改变,造成更大的随机性。在初始静止释放时,体现在圆柱体的取向在空中会发生改变,运动不会是平面平行运动。

实验中圆柱体受随机碰撞和空气阻力等扰动影响,转动不可能不绕中间轴,因此不存在理论计算中假设自由度为绝对为 3 的情况。此定理指出不同的释放方式的差距较小,都会随着碰撞次数与运动时间的增加而趋于最大自由度/最大随机。4.2.2.3 节会通过实验验证抛掷初始条件与高度对侧面概率的影响。

值得注意的是, 贾尼别科夫定理通过使圆柱体在空中运动中发生其他维度的旋转显著增加自由度, 区别于其他在碰撞过程中增加自由度因素。

3.理论模拟

3.1 模拟程序

由于抛掷骰子是一个统计学问题,所以几乎所有现象结论都建立在大量实验次数下,因此利用计算机程序模拟为最佳选择。本文选择 Python 的 pybullet 模块的模拟程序来初步分析现象。但由于 pybullet 模拟精度不高,所以没有将模拟结果与理论进行定量对比。

3.2 模拟预测

除了对理论中恢复系数、摩擦系数、几何边界的研究,我还研究了初始释放高度对概率的影响。释放高度是之前的文献中都进行忽略的影响因素,但是本文发现无论模拟或实验侧面概率都会受其较大影响,所以进行了定性研究。

3.2.1 释放高度影响

采用 pybullet 编写程序时,每一组实验都是同时在初始取向随机的情况下静止释放 1000 个骰子,并经过一定时间,当硬币落地稳定后,统计正面、反面、侧面的个数及计算概率,并依次改变抛掷条件、恢复系数等,作出了侧面概率随参数的变化图。为了模拟后文实验中手释放的抖动,

并增大模拟结果的随机性,模拟中所有释放高度都为平均高度,有 10% 随机值。如图 14 所示为侧面概率随释放高度的变化。H 表示释放高度(单位为 pybullet 中的单位长度)

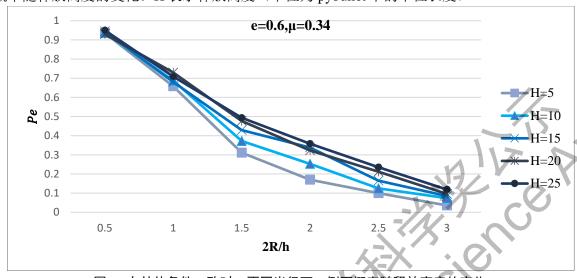


图 12 在其他条件一致时,不同半径下,侧面概率随释放高度的变化

如图 12 所示,初始释放高度对侧面概率有较大影响。同时,随着高度增加,概率逐渐增大,并趋于定值。这在 2.5.1 节中有所预言,后续 4.2.2.3 节中也有验证。本文将其理解为它是通过影响强碰撞次数来影响碰撞中取向的概率权重的。高度的连续变化使自由度,或是概率权重连续的变化。这种连续性是理论分析没有定量考虑的。因此在后续模拟中,选择较大高度来排除高度影响。

注意,最左边的点重叠是由于模拟时设置厚度固定,改变了直径,而直径较小时圆柱体整体较小,因而相对来说释放高度很高,造成一个稳定的概率,这也印证了理论分析的结果。

3.2.2 恢复系数的影响

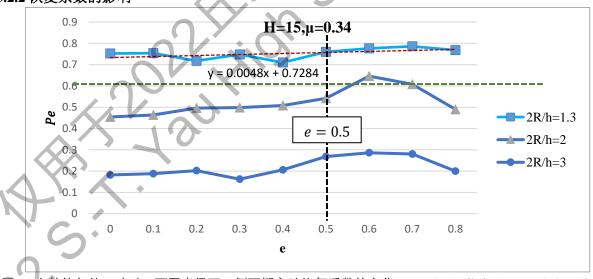


图 13 在其他条件一致时,不同半径下,侧面概率随恢复系数的变化(红色虚线为拟合线,绿色虚线为"绝对概率骰子"理论预言概率)

图 13 绘制方法与图 12 一致。如图 13 所示,恢复系数对概率有较小影响。特别地,当 $\frac{2R}{h}$ = 1.33,也就是理论预言的"绝对概率骰子"(侧面与正反面势能相等),恢复系数确实对其几乎无

影响。然而,具体概率有 15%的误差(绿色是其理论曲线 0.60);而其他几何的圆柱体在e=0.5 附近概率会有较大的变化,也在之前的 2.5.4 节能量损耗曲线中有所体现。这两点印证了理论分析。

3.2.3 摩擦系数的影响

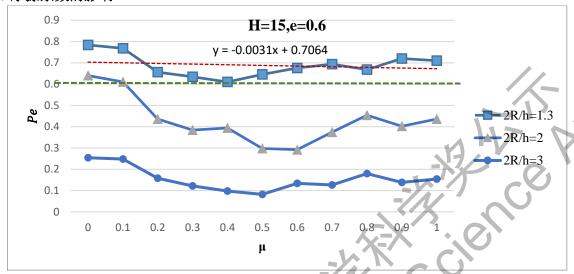
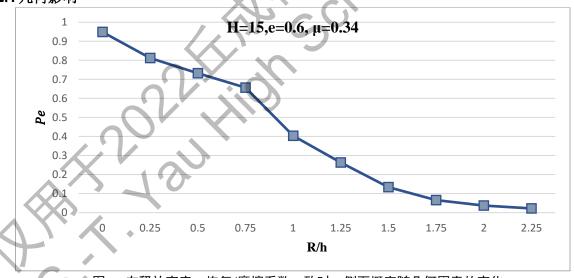


图 14 在其他条件一致时,不同半径下,侧面概率随摩擦系数的变化(红色虚线为拟合线,绿色虚线为"绝对概率骰子"理论预言概率)

图 14 绘制方法与图 12 一致。摩擦系数对概率普遍有中等影响,且与概率呈负相关,符合理论的定性分析。同时,其对"绝对概率骰子"影响较小,也与理论 2.4.3 的预言相符。

3.2.4 几何影响



◆图 15 在释放高度、恢复/摩擦系数一致时,侧面概率随几何因素的变化

图 15 绘制方法与图 12 一致。自然地,侧面概率与半径负相关,且可以发现图像在两端十分接近 1 和 0,呈现出 S 状曲线。这与 4.3.1.2 的理论图像相符。

综上,通过模拟预测,对理论进行了定性验证。

4.实验探究

实验中主要研究关键变量: 抛掷方式(运动自由度),释放高度,骰子几何参数,摩擦系数,恢复系数与侧面概率的关系。

4.1 实验装置

本研究通过3D打印机打印了ABS材质的3种不同几何参数的实心圆柱体,一个空心圆柱体,同时购买了4种实心木质圆柱体,并自己加工得到了8个不同厚度,相似半径的木质圆柱体,它们的几何参数表1所示。

表格 1 圆柱体几何参数

2R/h						
木质骰子	1.9/0.55	1.9/0.8	1.8/1	1.8/1.5	1.8/2	2.0/2.6
3D 打印骰子			1.8/1		N	

接触面分别利用普通陶瓷板、瑜伽垫来调节恢复系数,摩擦系数。

4.2 接触面参数测量

4.2.1 恢复系数

实验中分别在旋转较小时测量了静止释放时弹跳质心高度与初始高度之比,取最大值开方后得到恢复系数,如表 2 所示。

表格 2 初测接触面间恢复系数值

接触面	学校地板/木头	瓷砖/木头	瓷砖/ABS 塑料	瑜伽垫/木头
恢复系数	0.6	0.6	0.7	0.7

4.2.2 摩擦系数

因为本研究中的碰撞是点面接触,所以采用力学方法测量碰撞点接触面的静摩擦因素: 因此绕*P*点的力矩平衡:

$$GL \cdot \cos \theta = N \cdot b \tag{43}$$

根据质心静力平衡:

$$\mu G = f = N \tag{44}$$

实验中,将圆柱体斜靠在光滑竖直面上,缓慢移动竖直面,直到圆柱体滑动时,通过测量b的最小值,即可测出 μ ,如表 3 所示。

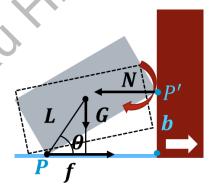


图 16 摩擦力的力学测量方法图示

蓝点P,P'为接触点;黑粗线为硬币受力;虚线为硬币转动示意图。

表格 3 接触面摩擦系数计算值

接触面	瓷砖/木头	瓷砖/ABS 塑料	瑜伽垫/木头

摩擦系数	0.33	0.33	1.45

4.3 实验数据与结果分析

因为初始条件机器难以施加,所以在自由度 3 的情况用手使圆柱体静止释放。而自由度为 6 时将圆柱体在手掌摇动后上抛,使其具有一个三维随机取向和初始小角速度。如表 4 所示为不同初始条件下的实验数据汇总,更详尽数据见附录。

表格 4 不同初始条件下的实验数据

释放	释放高	2.R				P_e		实验	/	自变量	<u>.</u>					
方式	度/cm	$\frac{2R}{h}$ /cm	μ	е	理论 DOF=6	实 验	理论 DOF=3	次数	A	B	C	#				
	10		0.33		0.288	0.21	0.187	149			释放	1				
		1 0/1	0.33	0.7	0.288	0.29	0.187	127			释放高度	2				
		1.8/1	1.45		*0.327	0.64	0.211	174	e, μ			3				
					0.313	0.32	0.218	161				4				
		1.9/0.55		X	0.027	0.03	0.014	127				5				
	40	1.9/0.8		Z.	0.136	0.13	0.084	276		几何		6				
摇动		1.8/1.5			<i>\</i> ''				0.705	0.61	0.548	242		何		7
揺动上抛		1.8/2	\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\		0.911	0.75	0.789	112				8				
		2.0/2.6			0.960	0.87	0.891	115				9				
		10	0.34	0.6		0.32		161				10				
	5	, ~				0.20		243			亚又	11				
19	10					0.26		251			释放方式&释放	12				
	C20 *	1.8/1			0.330	0.30	0.218	139			式&释	13				
	80					0.34		115			放高度	14				
(平面向	5					0.19		151			<i>,</i> ×	15				
面释向放	10					0.26		121				16				

20			0.27	180		17
40			0.34	131		18
80			0.34	153		19

4.3.1 结果分析

4.3.1.1 摩擦系数影响

由于实验材料恢复系数差别较小,所以实验能一定程度确认存在摩擦系数对概率存在较大影响。同时摩擦增大了能量损耗,从而减少了侧面概率,这印证了理论的定性分析。然而由于理论不包含摩擦系数过大的情况,因此误差很大。

4.3.1.2 几何影响

几何影响是最显著且最重要的。理论曲线和实验的对比如图 17 所示:

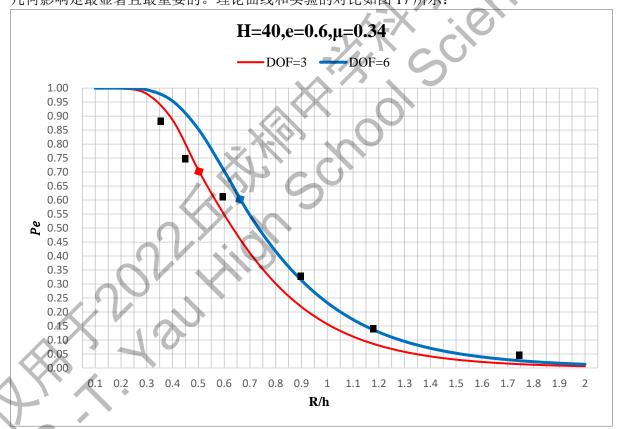


图 17 在不同自由度下的几何因素影响

黑色的正方形为实验数据;曲线上的同色点为"绝对概率骰子";红线与蓝线分别是在接触面参数如实验时,DOF=3和 DOF=6的理论值。

图 17 可以看出,实验数据整体在蓝线与红线之间,同时随着硬币厚度的增加,也就是越右边的实验数据越接近红线;反之则接近蓝线。而在实验中由于释放高度不能太高(木质硬币有损伤),所以不能完全说明 DOF=6 的情况。然而,由于硬币DOF ϵ [3,6],所以图中有两种自由度下

的理论概率,实验值因在红线与蓝线之间。同时考虑硬币在厚度增加时变大,相对来说释放高度变小,所以较厚的硬币实验值会更接近于DOF = 3的理论值。

4.3.1.3 释放高度与释放方式影响

释放高度的影响和模拟相符,概率最后趋于定值。如图 18 所示(注意横轴未成比例):

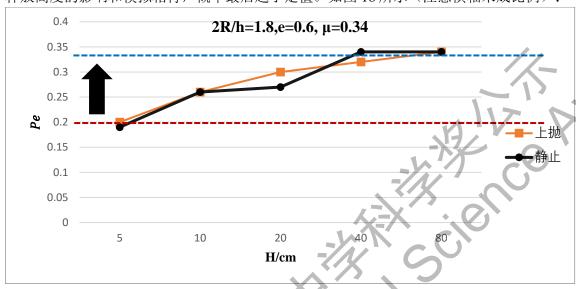


图 18 释放高度/释放方式的影响/对比

蓝色虚线对应与DOF = 6时的理论概率;红色虚线对应DOF = 3时的理论概率。前者对应释放高度高时的高随机度;后者对应释放高度低时的低随机度。

由图 18 可以发现,实验达到最大概率所需的相对高度小于模拟。这是因为实验地面误差,和理论修正的贾尼别科夫定理造成了实验中碰撞更为混乱,相同碰撞次数,随机性更强。

虽然理论值恰对应于高低高度下的侧面概率,但是,释放方式影响并不大。这可能因为当摇动上抛时,虽然看上去已经达到了最大自由度,但是没有大的初始角速度,角速度仍不够"随机"。综上可以总结为,不同的初始释放方式会影响圆柱体如何达到最大随机状态,其包括取向,线速度,角速度的特定权重分布,目前我只解决了理论需要的取向的权重分布。

4.3.1.4 空心/实心对概率影响

表格 5 空心/实心硬币概率对比 $2R/h = 1.8, e = 0.6, \mu = 0.34$

质量分布	侧面	侧面概率	次数
实心	143	39.2%	365
空心	88	34.9%	270

为探究理论中质量分布的影响,实验中使用 3D 打印的空心 ABS 扁圆柱体与实心同材料扁圆柱体对比实验,结果如表 5 所示。可以发现,空心圆柱体的侧面着地概率有所减小,这验证了前文理论分析 2.5.3 节的结果。

5. 总结与展望

本研究理论推导过程简洁明了。运用牛顿力学来严格分析运动参数的相互关系,再运用统计学得到了多次碰撞中的平均运动参数,最后从能量的角度入手,分析简化碰撞过程,得出概率计算公式,且和实验符合良好。同时本文顺带计算了物体碰撞的摩擦特殊解(见附录)。理论创造性的结合了圆柱体运动概率权重,有助于分析不同初始释放条件的影响,包含变量丰富,影响趋势与实验相符。本研究的模拟和实验都说明了恢复系数,摩擦系数这两个物理因素对该系统有本质上的影响,这一点在前人研究过程中常常忽略、或归咎于"随机性"^[4]。这主要与统计误差及实验误差难以区分,以及实际中恢复系数,摩擦系数等物理量变化幅度不如几何因素大有关。另外,本文创新性的提出了"绝对概率骰子",并与实验相符。

但同时,推导过程统计部分不够严谨,具体推导平均能量损失系数、平均逃逸能量不严谨。 理论结果十分复杂,简化前几乎无解析解。变量依存关系不明显。在 R 较小,即圆柱体稍细长时, 理论符合程度下降。原因尚未明确。由于长的圆柱体在实验中较大,所以误差可能由碰撞次数少, 即运动自由度过小造成。

实验部分,较严格的控制了释放高度,并与理论相对应。但是实验中释放方式由手控制,不严谨。虽然仍与理论符合较好但是无法在释放方式方面进行更细化的研究。

未来,研究可以从以下几个方面入手、完善:

- 1. 通过化简完善单次碰撞的临界点讨论来引入完整的摩擦系数的影响。预期会得到一个复杂的分段函数。模拟得到的摩擦系数影响本就复杂,有很大的研究空间。注意到临界点取决于具体的取向、线速度、角速度,一方面可以继续采用平均的思想找到平均量加以解决;另一方面可以学习 Lluís Hernández-Navarro, Jordi Piñero 的方法¹⁴¹,通过更严谨的方法数形结合。
- 2. 细化恢复系数的研究。猜测其可能与物体形状,碰撞强度(速度)、取向等有关,可以在本文基础上引入更多的修正,权重。可以通过拟合,或者实验,或相关有限元模拟来获得。
- 3. 完善对初始条件的讨论。可以从取向,速度,高度三方面入手,设计精密实验仪器来控制。可能得到更多随机性的细节,包括初始角速度的影响。通过调整初始条件,纪录概率变化与稳定,可以获得关于碰撞过程中各物理量概率分布的问题。
- 4. 通过模拟还可获得更多数据。如 2.2.2.3 节提到的速度概率分布、系统本身对初始条件的敏感度(这一点由于现实中干扰因素过多只能在模拟中实现)。
- 5. 释放高度影响的内部机理还有待进一步探究。不能简单的用"随机性"对其概括,更应该区别不同物理量的随机、不同物理过程(自由落体,碰撞…)的随机、不同权重的随机。建议结合上文方法探究

6. 参考文献

- [1] L. Mahadevan, Ee Hou Yong. Probability, physics, and the coin toss. Physics Today 64, 7, 66 (2011).
 - [2] H. Bondi, European Journal of Physics 14, 136 (1993).
- [3] Lluís Hernández-Navarro, Jordi Piñero. Exact edge landing probability for the bouncing coin toss and the three-sided die problem. arXiv:2103.10927 [physics.class-ph],2021.
- [4] Kuindersma S R , Blais B S . Teaching Bayesian Model Comparison With the Three-Sided Coin[J]. American Statistician, 2007, 61(3):239-244.
 - [5]刘延柱. 再论 Kane 难题[J]. 力学与实践, 2013(3):3.
- [6] Ashbaugh M S, Chicone C C, Cushman R H. The twisting tennis racket[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 1991, 3(1):67-85.
 - [7] D. B. Murray and S. W. Teare, Physical Review E 48,2547 (1993).

致谢

本文选题来源于 IYPT2021 Problem7.Three-Sided Dice, 在参赛过程中笔者入选国家集训队,同时此题也激发了笔者对抛硬币这一日常小事的深入思考, 最终让笔者完成了本文的研究。理论由笔者独立完成。指导老师刘成礼为学校物理教师, 无偿修改了论文格式, 并无偿提供了 3D 打印机, 切割机等设备, 协助笔者制作了实验骰子。在研究过程中, 感谢笔者母亲协助完成了实验部分的部分内容以及感谢母亲对我研究的支持。

附录

理论特殊解补充

2.1.1 临界点讨论:

若存在临界点,那么在时间 $0\sim t'$ 内,摩擦力仍是滑动摩擦力,并假设t'时刻硬币的运动参数分别为: v'_{Px0} , v'_{x} , ω' ,它们同样满足(1)、(2)、(4)式的关系。而由于此时碰撞尚未结束,所以不能使用恢复系数联系始末速度。又由于临界点的特殊性,即撞击点速度切向为0,可得:

$$v'_{Px0} = v'_x - \omega' \sin \theta = 0 \tag{8}$$

由此可解得:

$$\begin{cases} \omega' = \frac{\cos(\theta + \delta) \cdot mrv_{xO} - \sin \delta \cdot J\omega_0}{\cos(\theta + \delta) \sin \theta \cdot mr^2 - \sin \delta \cdot J} \\ v'_x = \omega' r \sin \delta \\ v'_y = v_{y0} + \frac{v'_x - v_{x0}}{\tan \delta} \end{cases}$$
(9)

在时间 $t'\sim t$ 内,接触点一直保持无切向速度。由于此时摩擦力不再是滑动摩擦力,因此摩擦力与支持力不再成正比,方程 δ 成为未知量。为了简化计算,将(1)式进行代数变换可得:

$$\cos \delta = \frac{m(v_y' - v_{y_0})}{I'}$$

$$\sin \delta = \frac{m(v_x' - v_{x_0})}{I'}$$

$$(\cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta) \cdot rI' = J(\omega' - \omega_0)$$
(10)

这样代入(9)式可以消去δ,得到:

$$\left(\cos\theta \cdot m(v_y' - v_{y0}) - \sin\theta \cdot m(v_x' - v_{x0})\right) = \frac{I}{r}(\omega' - \omega_0) \tag{11}$$

再结合临界点条件与恢复系数定义,可得:

$$\begin{cases} v_{x} - \omega \sin \theta = 0\\ e = -\frac{\omega r \cdot \cos \theta + v_{y}}{\omega_{0} r \cdot \cos \theta + v_{y_{0}}} \end{cases}$$
(12)

可以解出碰撞后硬币的运动参数为:

$$\begin{cases}
\omega = \frac{J\omega' - \cos\theta \cdot mr(ev_{Px0} + v_y') + \sin\theta \cdot mrv_x'}{J - \cos^2\theta \cdot mr^2 - \sin^2\theta \cdot mr^2} \\
v_x = \omega r \sin\theta \\
v_y = -ev_{Py0} - \omega r \cos\theta
\end{cases}$$
(13)

综上,(5)式和(13)式给出了两种情况下硬币的末速度与末角速度。该解以 $(v_{x0}-\sin\theta\cdot\omega_0)(v_x-\sin\theta\cdot\omega)$ 的正负值为界而分为 2 段。

```
Mathmatica 代码文件:
             DOF=6
            R = 2.0
            e = 0.6
            \delta = -0.32
            \alpha = ArcTan[1/(2R)]
            \varepsilon = 1/2 * Sqrt[(12R^2+4)/(12R^2+3)]
            a = \text{NIntegrate}[((e^*\epsilon^2 * \text{Cos}[\delta] * \text{Sin}[x - \alpha]) / (\text{Cos}[\text{Abs}[x - \text{Pi}/2]] * \text{Cos}[\text{Abs}[x - \text{Pi}/2] + \delta] + \epsilon^2 * \text{Cos}[\delta]))^2, \{x \in \mathbb{N} \}
\alpha, \alpha+0.5*Pi\}]
            b=NIntegrate[((\epsilon*(e + 1)*Cos[Abs[x - Pi/2]]*(Cos[\delta])*Sin[x - \alpha])/
                         (Cos[Abs[x - Pi/2]]*Cos[Abs[x - Pi/2] + \delta] + \epsilon^2*(Cos[\delta])))^2, \{x, \alpha, \alpha + 0.5*Pi\}
            c=NIntegrate[(Sin[x-\alpha]^*(\epsilon^*e^*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]]^*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]] + Cos[\delta])
\epsilon^2)\(\(^2\),\{\(x,\alpha\),\(\alpha\+0.5*\)Pi\}\]
            d=NIntegrate[(Sin[x-\alpha]^*(Cos[\delta]\epsilon^{2})-e*Cos[Abs[x-Pi/2]]^*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]))
Pi/2]*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]] + Cos[\delta]* \epsilon^2))^(2),{x,\alpha, \alpha+0.5*Pi}]
            \gamma=2(a+b+c+d)/Pi
            E1 = NIntegrate[((1 - Sin[x])*Sin[x - \alpha])/(1 - Sin[\alpha]), {x, \alpha, Pi/2}]
            E2 = NIntegrate[((1 - Sin[x])*Sin[x - \alpha])/Sin[\alpha], \{x, Pi/2, \alpha + Pi/2\}]
            p1=1-(1-Sin[α])^(Log[γ,E1/E2]+1);
            p2=(Sin[\alpha])^(Log[\gamma,E2/E1]+1);
            DOF=3
            R = 0.9
            e = 0.7
            \delta = -0.32
            \alpha = ArcTan[1/(2R)]
            \varepsilon = 1/2 * Sqrt[(12R^2+4)/(12R^2+3)]
            \alpha + 0.5*Pi
            b = NIntegrate[((\epsilon*(e + 1)*Cos[Abs[x - Pi/2]]*(Cos[\delta]))/
                         (Cos[Abs[x - Pi/2]]*Cos[Abs[x - Pi/2] + \delta] + \epsilon^2*(Cos[\delta])))^2, \{x, \alpha, \alpha + 0.5*Pi\}
            c=NIntegrate[((\epsilon*e *Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]]*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]] +Cos[\delta]* \epsilon^2))^(2),{x,\alpha,
\alpha + 0.5*Pi
            d=NIntegrate[((Cos[\delta]\epsilon^{2}-e*Cos[Abs[x-Pi/2]]*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]]*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]]*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]]*Cos[\delta+Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(Cos[Abs[x-Pi/2]])/(C
Pi/2]] +Cos[\delta]* \epsilon^2))^(2),{x,\alpha, \alpha+0.5*Pi}]
            \gamma = (a+b+c+d)/Pi
            E1 = NIntegrate[((1 - Sin[x]))/(Pi/2-\alpha), {x, \alpha, Pi/2}]
            E2 = NIntegrate[((1 - Sin[x]))/\alpha, \{x, Pi/2, \alpha + Pi/2\}]
            p1=1-(1-Sin[\alpha])^{(Log[\gamma,E1/E2]+1)};
            p2=(Sin[\alpha])^{(Log[\gamma,E2/E1]+1)};
```

表格 6 实验详细数据

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
正面	63	40	32	50	62	56	53	14	4	56	95	99	59	37	63	41	63	51	50
反面	55	50	31	59	61	53	48	15	11	53	100	86	39	38	58	48	68	36	51
侧面	31	37	111	52	4	52	138	79	100	52	48	66	41	40	29	32	49	44	52
总数	149	127	174	161	127	161	239	108	115	161	243	251	139	115	151	121	180	131	153