

参赛队员姓名： 荣梓华

中学： 北京大学附属中学

省份： 北京市

国家/地区： 中国大陆

指导教师姓名： 金文力

指导教师单位： 北京大学附属中学

论文题目： 新杨氏模量测量理论和装置
及其在生物软材料中的应用

新杨氏模量测量理论和装置及其在生物软材料中的应用

荣梓华

摘要:

本文在经典 **Hertz** 接触理论的基础上, 通过量纲分析和计算仿真相结合的方法, 消除了经典理论对被测物体尺寸相对无限大的要求, 建立了适用于测量任意尺寸物体杨氏模量的修正理论, 极大地拓展了通过压入实验测量杨氏模量的方法的适用范围。同时, 基于修正理论, 发明并制作了一款低成本、易组装、高精度的杨氏模量测量装置。该测量方法和测量装置被用于探索浓度及吸热量对于常见含蛋白质软物质杨氏模量的影响。

关键词: 杨氏模量, 新接触理论, 新测量装置, 生物软材料, 压入实验

目录

摘要:	1
1.引言	3
2.理论分析	4
2.1 半空间体在边界上受法向集中力的 Boussinesq 解答	4
2.2 经典 Hertz 接触理论	5
2.3 π 定理与量纲分析对 Hertz 接触理论的修正	9
3.有限元仿真及修正系数的确定	10
3.1 有限元模型的建立	10
3.2 对于有限元仿真结果正确性的自检验	14
3.3 基于有限元仿真结果对理论修正系数的确定	16
4.测量装置的设计与制作	21
4.1 装置设计以及 SolidWork 图纸绘画	21
4.2 装置组成构建的选择与组装	22
4.3 装置测量准确性的影响因素分析	25
5.杨氏模量测量方法的验证	27
5.1 实验测量数据的准确性	27
5.2 测量数据与理论结果的适配	29
6.测量方法对于实际问题的探究	31
6.1 探究吉利丁（明胶）浓度对其杨氏模量的影响	31
6.2 蛋清吸收热量对其杨氏模量的影响	35
6.3 对实验现象的归纳总结——蛋白质的弹性受各类因素影响	39
7.总结与展望	40

1.引言

对物理产生了浓厚兴趣之后，生活中的很多现象都会引起我的思考。例如我发现生活中经常能够观察到很多有关食物软硬程度或口感的问题：1、鱼汤在冷却放凉之后会变成“鱼冻”，而随着汤的浓度和环境温度的改变会使得这种“鱼冻”吃起来的口感不一样；2、在蒸鸡蛋羹时，会听到的一个评价是鸡蛋“口感很嫩”、“熟了”，甚至是“老了”。我认为这些是非常有趣的现象，但初始我并不能找到一个具体的物理量，来描述物质的软硬程度。后来，我在中学的实验教材^[1]上学习到杨氏模量这一物理量，可以用来表征物质在弹性限度内的软硬程度，是物质的一种固有属性。因此可以用杨氏模量来定量描述食物等物质的软硬程度，即是否“熟了”或是“老了”的标准。但目前我所接触到的测量方法，如光杠杆测量法，主要是针对于相对较硬且仅能发生较小弹性变形的硬质材料的。此类方法对于相对较软，能发生较大变形和易破坏的软物质而言测量局限性较大。经过我的调研和搜索，发现科学实验室中有压痕仪^[2]、原子力显微镜（Atomic Force Microscope）^[3]等这样的高精度仪器可以用来测量软物质的杨氏模量，但其造价昂贵且不易操作，并不满足实际需要。

于是，我便想要设计一种操作简便，结构简单的实用测量方法，能够定量地测得如鱼冻或熟鸡蛋一类常见的软物质的杨氏模量，以便进行简单的分析。这涉及到软物质本身的物理性质：在拉伸时容易断裂因而不便操作，但可以被压缩，且当压头和被测软物质材料的几何尺寸都固定时，施加不同的压力会产生不同的压入深度；且在相同的压力作用下，不同的软物质对应的压入深度也不同。若能够进行压入实验的同时采集压入深度和压力的数据，并通过其计算出被压物体的杨氏模量，将是一种非常方便的方式。

为了探究上述想法的可行性，需要解决以下几个问题：（1）理论层面——用什么方法和公式处理实验数据以获得准确的杨氏模量数值？（2）装置层面——怎样实现对压入深度和压力的同时测量？怎样验证这种方法的正确性和了解其测量的精度范围？（3）实验层面——怎么样控制变量，进行科学问题的探究？因此，本文在前人研究的基础上，对测量软物质杨氏模量这一领域的方法进行了深入思考和实验验证，并探索了一些生活中物质的变化规律。

全文的结构如下：在第二节中，我总结了前人对于此类压入实验相关的理论^{[4][5][6]}，并采用量纲分析的方式拓展经典理论的适用范围。在第三节中，我介绍了有限元仿真结果对理论进行补充的过程，并最终确定了修正理论的函数形式。在第四节中，我设计并制作了用于测量软物质杨氏模量的实验装置，并对其可靠程度进行了检验。在第五节中，我整合了第二、三、四节中的主题内容，并通过具体的实物模型对我设计的测量方法的准确性进行了论述。在第六节中，我实际测量了两种生活中的软物质材料——吉利丁固体和蒸熟的鸡蛋清固体的杨氏模量，并探究了他们受浓度和吸热量的影响。本文的总结与展望在第七节中给出。

2.理论分析

2.1 半空间体在边界上受法向集中力的 Boussinesq 解答

弹性力学中的研究对象为理想弹性体，满足以下四个基本假定的物质：连续性、完全弹性、均匀性、各向同性^[7]。可以用杨氏模量与泊松比来描述这些物质的力学性质。

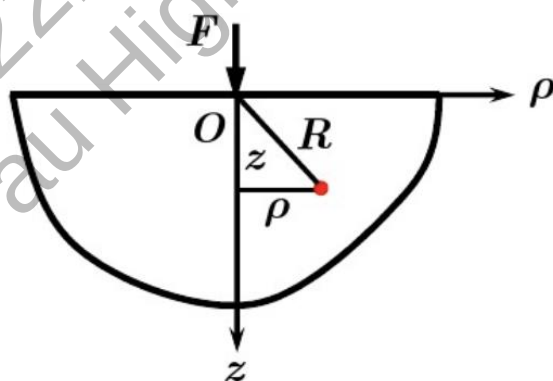


图 2.1.1 半无限大空间体在边界上受法向集中力

半无限大空间体表面受一个集中力作用是弹性力学中的一个经典问题，如图 2.1.1 所示。在满足小变形假定的前提下，Boussinesq 解答^[8]指出，水平边界任一点的沉降 η 为

$$\eta = (u_z)_{z=0} = \frac{F(1-\mu^2)}{\pi E \rho} \quad (1)$$

其中, F 为集中力的大小, E 和 μ 分别为材料的杨氏模量和泊松比, ρ 为水平面上某点到 z 轴的距离。基于边界上受法向集中力时的解答, 可以基于小变形叠加理论得到边界上受到法向分布力引起的半无限大空间体的变形。在如图 2.1.2 所示的情况中, 在半无限大空间体表面的一个圆形区域内作用有法向分布力, 圆形区域内的任一点 M 受到该分布力的作用而产生的沉降即可确定。假设圆形区域内的分布力 q 的函数表达式为

$$q = q(s, \psi) \quad (2)$$

则圆形区域内上任一点 M 受到该分布力的作用而产生的沉降 w 为

$$w = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \iint q ds d\psi \quad (3)$$

公式(3)为 Hertz 接触理论的基础。

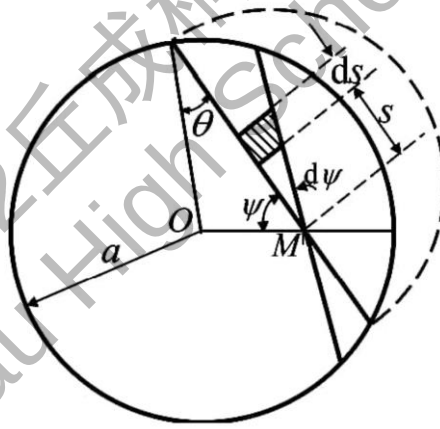


图 2.1.2 半空间体受法向分布力的情况

2.2 经典 Hertz 接触理论

Hertz 接触理论^[9]由 Hertz 于 1882 年提出, 其目的是研究两球形表面的弹性体相互挤压时候, 接触面上的力及变形的规律。在本文中所探究的方法是基于 Hertz 接触理论发展而来的, 因此首先介绍 Hertz 接触理论。

如图 2.2.1 所示，设两球体的半径分别为 R_1 、 R_2 。当无压力作用时，两球体仅在点 O 接触。

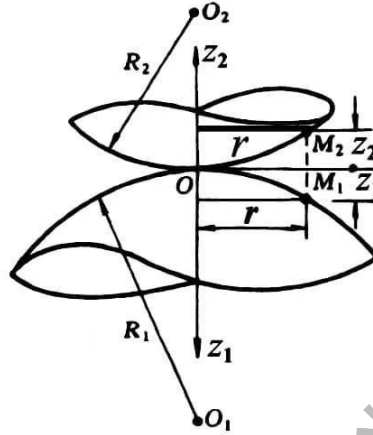


图 2.2.1 两球体的初始接触

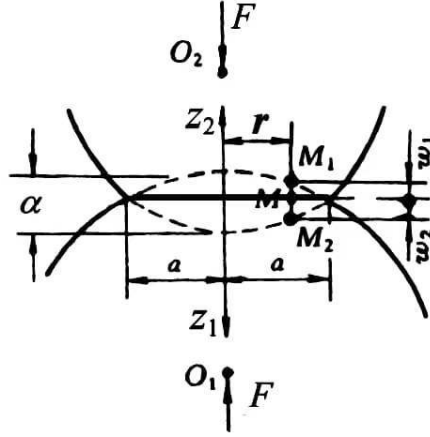
考虑两球体表面上距接触点公共法线的距离为 r 的两点 M_1 和 M_2 ，它们距公切面的距离分别为 z_1 和 z_2 ，则由勾股定理得

$$\begin{cases} z_1 = \frac{r^2}{2R_1 - z_1} \\ z_2 = \frac{r^2}{2R_2 - z_2} \end{cases} \quad (4)$$

若 M_1 、 M_2 离两球体的公切面的距离很近，则有 $R_1 \gg z_1$ ， $R_2 \gg z_2$ ，此时近似有

$$z_1 + z_2 = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} r^2 \quad (5)$$

当上述的两球体在外力 F 的作用下发生挤压时候，初始接触点 O 的周围发生局部的小变形，形成一个圆形的接触面。此时， M_1 和 M_2 两点将被压缩到接触面上的同一点 M ，如图 2.2.2 所示。


 图 2.2.2 两球体在力 F 的作用下相互挤压

假定切点 O 所处的切面在发生该局部压缩时保持静止，可以在与该平面垂直的方向上，分别向两球体球心方向建立 z_1, z_2 轴，并设点 M_1 和 M_2 在挤压前后的位移分别为 w_1 和 w_2 。在两球体上分别沿 z_1 和 z_2 轴方向 O 点的位置处的变形可以忽略，假设两球体远端在挤压前后的相对移动距离为 α ，故有

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)得

$$w_1 + w_2 = \alpha - \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} r^2 = \alpha - \beta r^2 \quad (7)$$

至此，该理论完成了关于两球体挤压前后变形的几何关系分析。接下来将对其变形与受力之间的特点进行分析。

在无限大平面的假设下，由式(3)，可以确定此时 w_1 和 w_2 分别为

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} \iint q ds d\psi \\ w_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \iint q ds d\psi \end{cases} \quad (8)$$

式中 q 即为接触面上的受力分布函数。代入式(7)，得

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \iint q ds d\psi &= \alpha - \beta r^2 \\ k_1 &= \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1}, k_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \end{aligned} \quad (9)$$

确定能够满足式(9)的分布力 q 的函数形式，以求出施加的外力大小与相对位移的关系是非常重要的，但是直接进行求解无法获得理论解。Hertz 猜测 q 的

分布满足如图 2.2.3 所示的按接触面边界的半球面式的分布。图中 q_0 表示单位面积分布力的最大值， $2a$ 即为接触面的直径。该猜测的合理性如下：

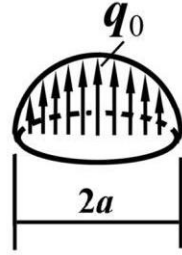


图 2.2.3 接触面上的分布力

对双重积分的里一层先进行操作。沿弦 mn 的积分得到

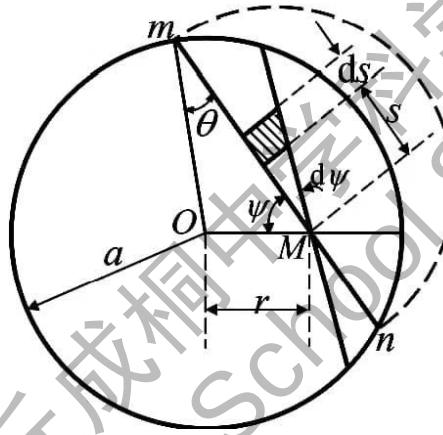


图 2.2.4 积分的弦 mn

$$\int q ds = \frac{q_0}{a} S = \frac{\pi q_0}{2a} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) \quad (10)$$

这是因为在此猜想下，沿弦 mn 的压力变化规律应为图 2.2.4 中虚线所示的半圆，而压力分布的比例尺因子应为 q_0/a 。故 S 为该半圆形的面积。而后的极坐标积分可得

$$(k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2 \quad (11)$$

比较等式两边各次数项的系数，即可得到

$$\begin{cases} \alpha = (k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{2a} a^2 \\ \beta = (k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} \end{cases} \quad (12)$$

以上结果对任意的变量 r 均满足，故关于 q 分布方式的猜想是正确的。两球间的压力为 F ，故

$$F = \frac{q_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 \quad (13)$$

联立式(7)，(12)，(13)可得

$$\alpha = \left[\frac{9\pi^2 F^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16R_1 R_2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

本文所探究的实际问题是半球形压头与平面间的接触作用，因此可以将上述模型中的一个球体退化为平面，即其半径 R_2 趋近于无限大，而另一个球体近似为刚体，有

$$E_1 \rightarrow \infty, k_1 = 0 \quad (15)$$

此式仍存在的一球体的半径为 $R = R_1$ ，无限大平面体的杨氏模量为 E ，泊松比为 μ 。则式(14)可以改写为

$$F = \frac{4E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{R} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (16)$$

式(16)即为经典 Hertz 理论描述球形压头和无限大半空间体之间相互挤压的结论。通过测定球形压头和无限大的被压物体间的压入深度和压力间的关系，即可测定被压物体的杨氏模量。

2.3 π 定理与量纲分析对 Hertz 接触理论的修正

在上一节介绍的经典 Hertz 接触理论中，被压的物体相对球形压头，可以视为一个无限大的半空间体。在测定材料的杨氏模量的具体实验中，多采用价格昂贵的仪器（例如原子力显微镜）和及其微小的压头来满足被压物体相对无限大的条件，这就需要极高分辨率的力及位移传感器。如果被压物体的尺寸相对于压头而言并不满足无限大的假设，采用 Hertz 接触理论得的结果会有很大偏差。因此，本节旨在根据实际情况，即依据测物体的实际尺寸，对 Hertz 接触理论进行修正，以便能够得到适用范围更广的接触理论。

本节所使用的修正方法是基于 π 定理的量纲分析法^[10]。 π 定理由

Beckingham 在 1914 年提出，它指出，对于存在 n 个物理量（设为 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ）

和单位制中有 m 个基本量 ($n > m$) 的某一物理问题, 可以组成 $n - m$ 个独立的无量纲量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ 。

那么, 对于存在的物理定律可以表示为

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0 \quad (17)$$

则必存在其对应的无量纲表达形式

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \dots, \pi_{n-m}) \quad (18)$$

在本文中, 主要考虑被测物体为一个标准的圆柱体。因此, 该物理问题的具体物理量有 6 个。分别为: 半球体压头的压入深度 η , 半球体压头 (即理论中的球体) 半径 R , 被压圆柱体半径 r , 被压圆柱体 H , 压力 F , 以及杨氏模量 E 。而单位制中的基本单位有两个, 分别为: 力 (单位: 牛顿) 和位移 (单位: 米)。因此, 根据 π 定理可以构建四个独立的无量纲量, 其关系为

$$\begin{aligned} \frac{F}{ER^2} &= \Phi(x, y, z) \\ x &= \frac{\eta}{R}, y = \frac{R}{r}, z = \frac{R}{H} \end{aligned} \quad (19)$$

但是, π 定理无法给出更为具体的函数表达形式。因此后文 3.3 节将在有限元仿真结果和 Hertz 接触理论的基础上, 进一步猜测具体的函数形式, 并对其合理性进行证明。

3.有限元仿真及修正系数的确定

3.1 有限元模型的建立

本节旨在通过计算机有限元软件中的仿真, 间接地了解现实情况。在这种方式下, 既为前述的理论与后续的实验提供了更详实的支撑, 同时省去了进行大量真实实验的不便与其中可能出现的误差。

本文均采用 Abaqus 仿真软件^[11]对该问题进行建模分析。值得注意的是, 由于 Abaqus 本身并不存在单位规定, 所以在仿真时采用的单位制为: 长度单位为毫米 (mm), 杨氏模量单位为兆帕 (MPa), 力的单位为牛顿 (N)。

在几何建模部分，将压头建模为半径为 15mm 的半球体，被压物体建模为半径为 45mm、高度 60mm 的圆柱形。为了方便后面的网格划分，将两个部件（Part）沿对称轴进行了分割。此后将这两个部件进行装配（Assembly），半球体压头的球面和圆柱体的上表面相切，有且仅有一个交点（交点为圆柱体上表面的圆心位置处），装配后如图 3.1.1 所示。

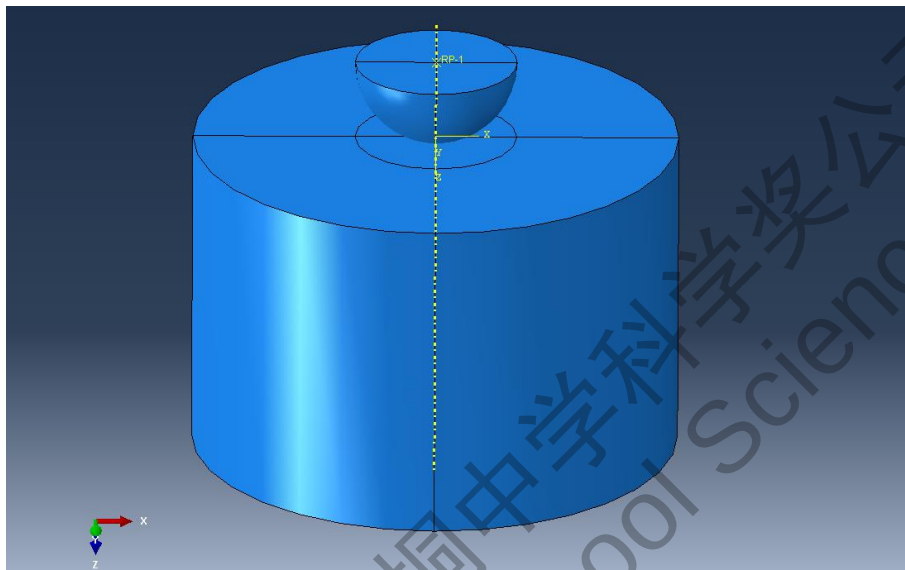


图 3.1.1 半球体压头及被压圆柱体的装配

为了分析刚硬的压头和软物质之间的接触作用，设置半球体压头的杨氏模量为 20000MPa，被压圆柱体的杨氏模量为 1MPa。对于生物软材料大多具有变形时体积不变的性质，因此被压圆柱体的泊松比设置为 0.49。

为了描述半球体压头的半球面和被压圆柱体上表面之间的相互作用，在定义接触（Interaction）时，选择“面面接触”模式，规定圆柱上的接触面为主面，球体上的接触面为从面，如图 3.1.2 所示。考虑到半球体压头和被压物体之间无摩擦，法向接触属性设置为硬接触（"Hard" Contact），切向接触属性设置为无摩擦接触（Frictionless）。

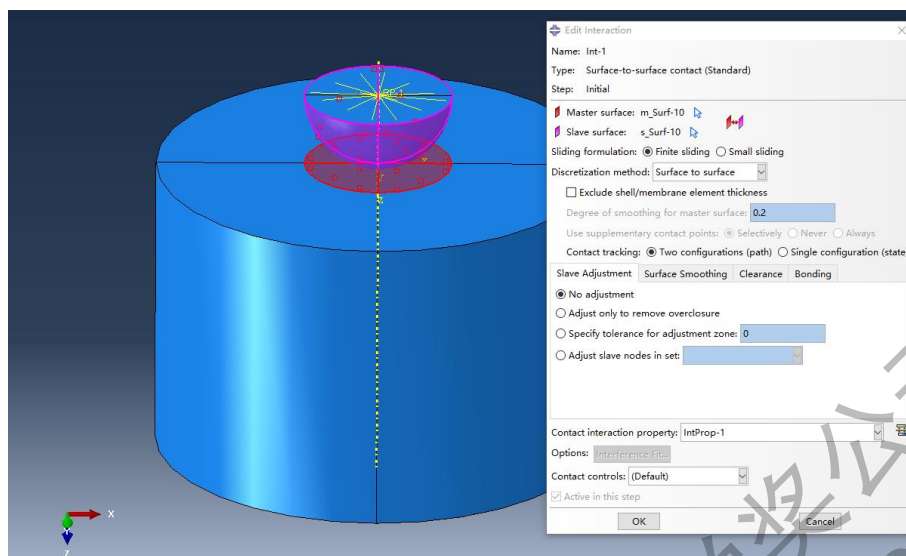


图 3.1.2 接触面设置

为了仿真半球体压头通过位移加载压入圆柱形被压物体的过程，载荷模块（Load）中分别设置了两个部件的边界条件。其中，圆柱的下表面与侧面设置为完全固定的边界条件（Encaster），如图 3.1.3 所示；建立参考点 $RP-1$ 与半球体压头相绑定，通过参考点 $RP-1$ 给半球体被施加了法向向下的 4mm 的位移加载（Displacement），同时限制压头的其他 5 个移动自由度如图 3.1.4 所示。

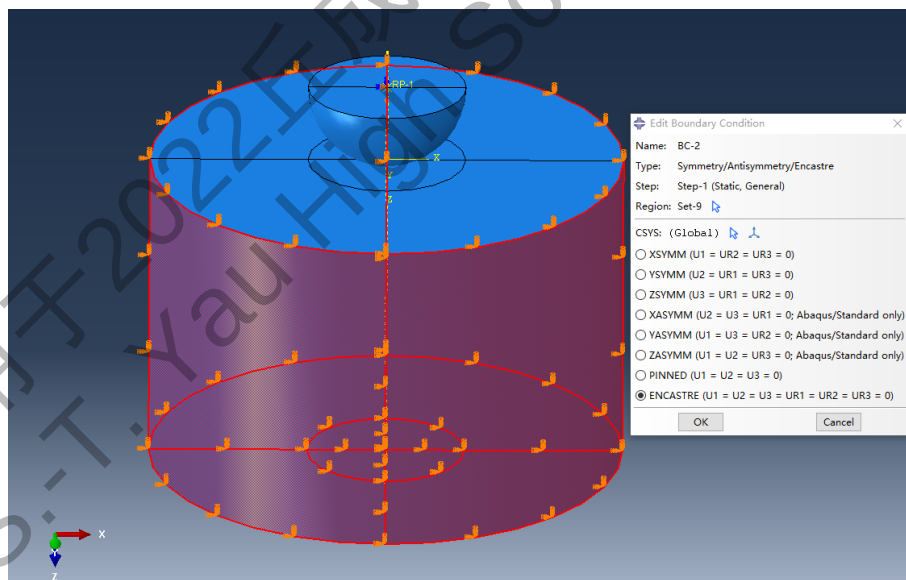


图 3.1.3 被压圆柱体的约束

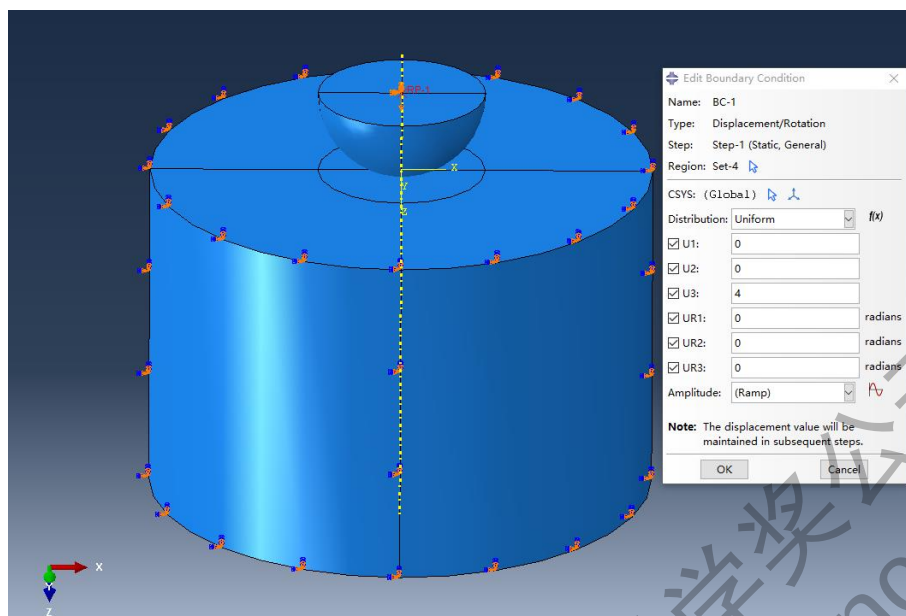


图 3.1.4 半球体压头的位移载荷

在设置完载荷后，需要对每个部件进行网格划分（Mesh）。为了获得准确结果的同时节省算力，被压圆柱体靠近接触区域的网格被划分地更加密集。划分后两部件地网格如图 3.1.5 所示（其中被压圆柱体共计 124800 个网格）。

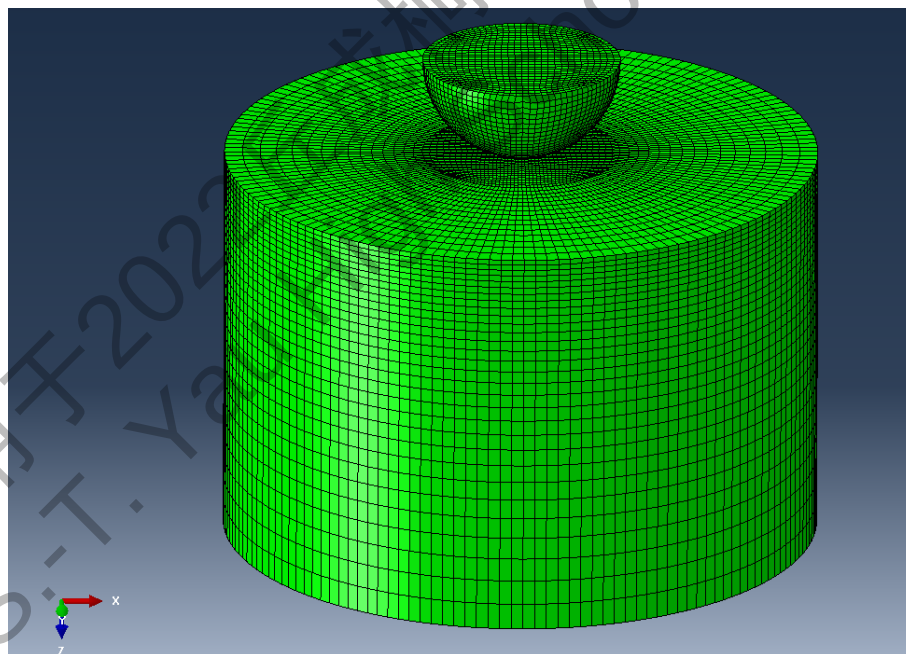


图 3.1.5 网格划分

将上述模型提交计算后，可以得到如图 3.1.6 所示的最终压入结果。图中 U 表示位移的大小， $U3$ 即为 z 方向上的位移大小。输出压入过程中压入深度和压力间的关系如图 3.1.7 所示。

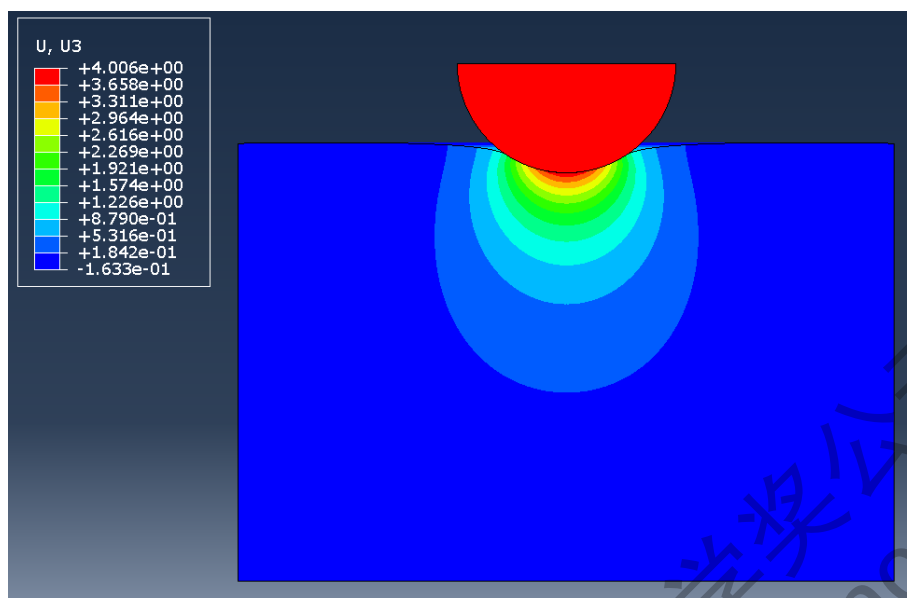


图 3.1.6 有限元仿真结果

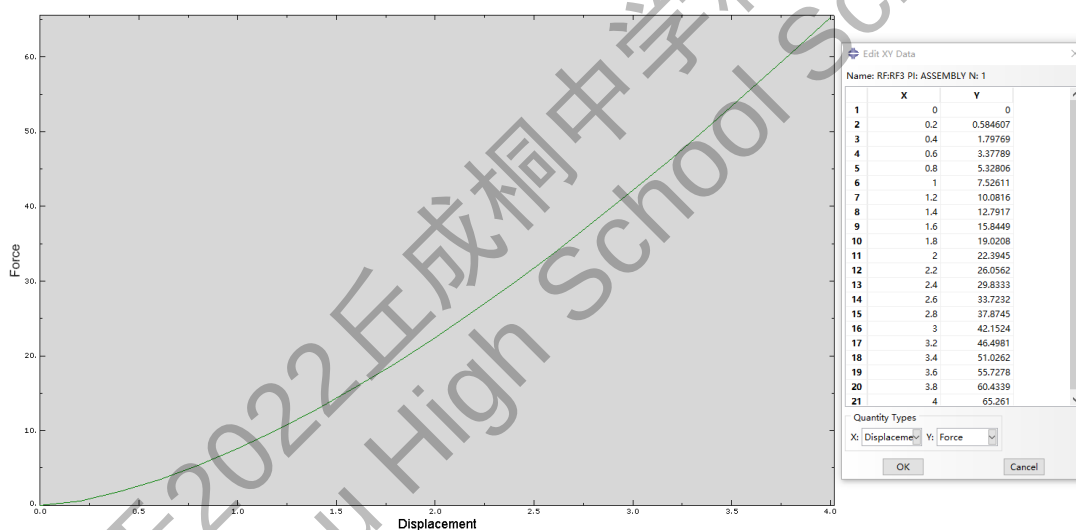


图 3.1.7 仿真结果的压入深度和压力的具体数值

上述有限元建模分析过程作为后续分析的基础。

3.2 对于有限元仿真结果正确性的自检验

此部分将说明网格密度及被压物体的模量对计算结果的影响。

对于有限元仿真，足够密集的网格才能保证计算结果的收敛性，为了分析上述计算结果的收敛性，将圆柱形被压物体的网格进一步加密。加密前共计 124800 个网格，加密后共计 400000 个网格，如图 3.2.1 所示。

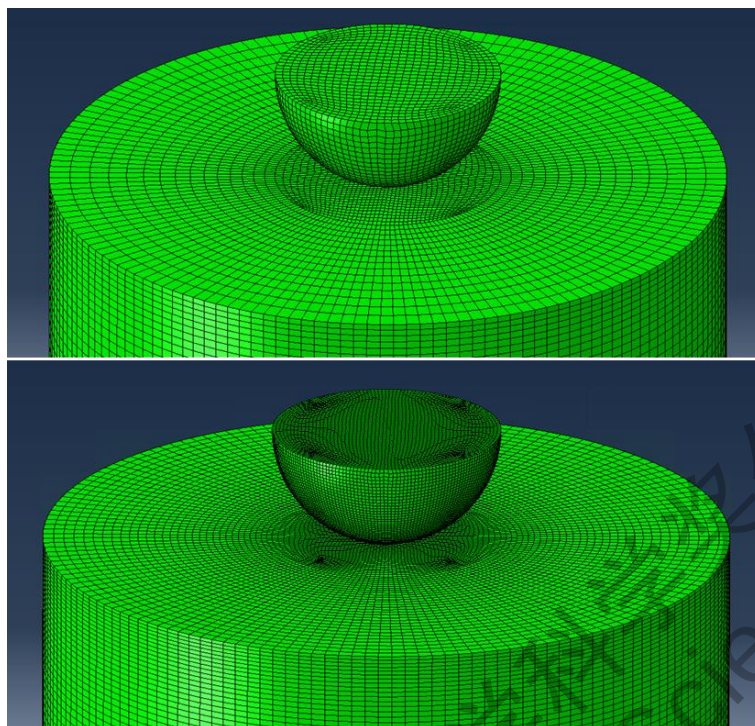


图 3.2.1 加密前后的网格对比

计算加密网格前后的压入深度和压力之间的关系如图 3.2.2 所示，可以发现加密网格前后的计算结果非常相近，即此前的网格密度已经可以得到收敛性较好的计算结果。

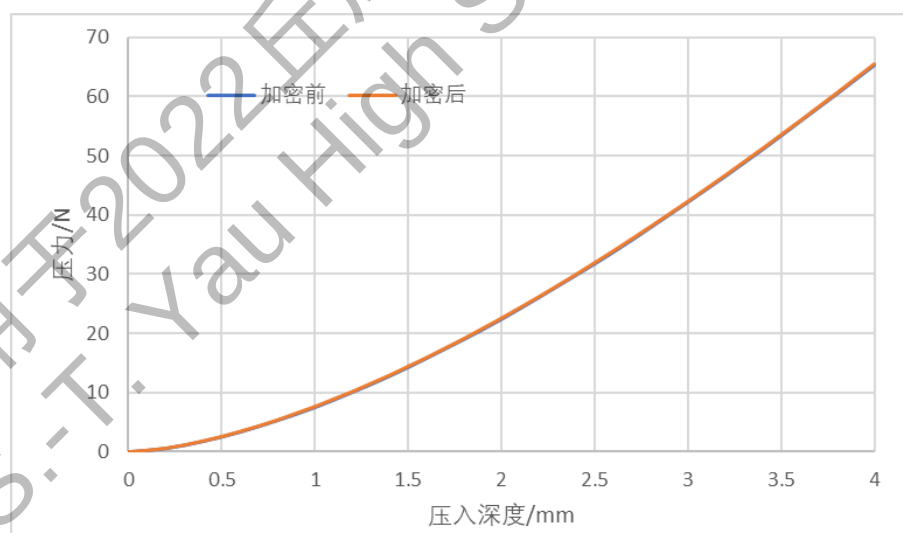


图 3.2.2 加密网格前后压入深度和压力间关系

仅改变上述模型中的被压物体的杨氏模量，通过量纲分析理论，仅需要对已有计算结果中不同压入深度对应的压力进行同比例修改即可。为了验证这一分析，我将上述模型中被压圆柱体的杨氏模量由 1MPa 更改为了 0.72MPa，计

算得到不同压入深度对应的压力结果如图 3.2.3 所示，可发现压力也发生了相同倍数的变化。

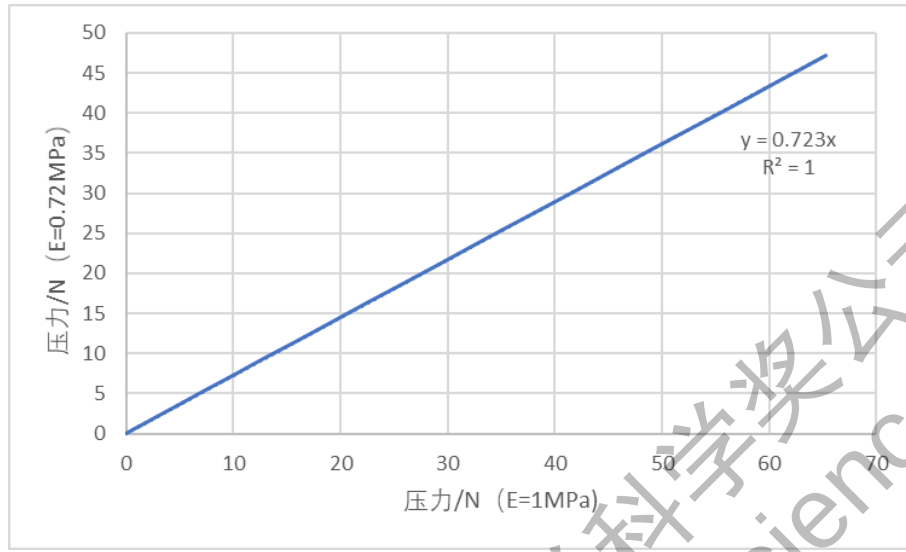


图 3.2.3 不同模量计算得到的压力关系

3.3 基于有限元仿真结果对理论修正系数的确定

在完成上述的基本仿真分析后，通过修改各被压物体的几何参数重新计算，即可得到如 2.3 中所述不同被压物体参数模型的结果。在保持压头半径 $R=15\text{mm}$ 不变的同时，将被压圆柱体的高度 H 和圆柱半径 r 进行更改，分别计算了 H 的 8 个取值（30, 35, 40, 45, 60, 75, 90, 120。单位：mm）和 r 的 8 个取值（30, 35, 40, 45, 60, 80, 100, 120。单位：mm）的组合共 64 种情况。根据上述的计算结果，可以确定修正函数的具体形式，下面将进行具体说明。

首先，当被压圆柱体的尺寸远大于半球体压头时，被压圆柱体可以被视为半无限大空间体，此时有

$$y \rightarrow 0, z \rightarrow 0, \frac{F}{ER^2} = \Phi(x, 0, 0) \quad (20)$$

此时压入深度和压力之间的关系，Hertz 接触理论表明压力与压入深度 η 的 $3/2$ 次方成正比。从仿真结果可以看出，当被压圆柱体的与半球体压头尺寸相近时候，发现无论如何改变被压圆柱体的几何参数，正比例关系始终成立，如图 3.3.1 所示。

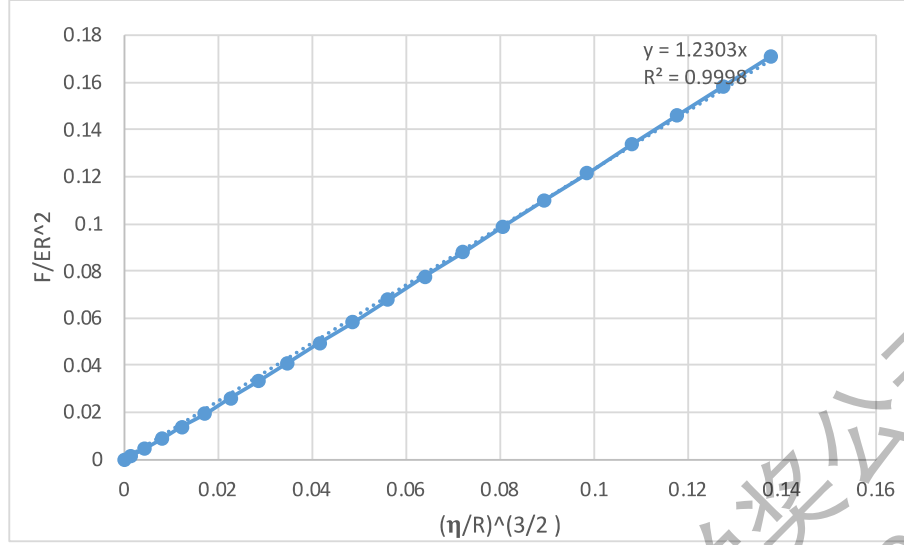


图 3.3.1 无量纲压入深度和压力关系 ($H=60\text{mm}$, $r=40\text{mm}$)

在上文所设的四个无量纲量中，只有 x 与受到的外力有关。由此不妨猜测，修正函数中有关 x 的表达式是独立于另外两者的，即

$$\Phi(x, y, z) = f(x)g(y, z) \quad (21)$$

根据 Hertz 接触理论，有

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= f_{\text{Hertz}}\left(\frac{\eta}{R}\right)k(y, z) \\ &= \frac{4}{3(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\eta}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot k(y, z) \end{aligned} \quad (22)$$

其中 k 定义为修正系数，联立式(19)，并为与 2.2 中统一形式用 α 改写 η ，有

$$F = \frac{4k(y, z)E\sqrt{R}}{3(1-\mu^2)} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (23)$$

可以发现，其与式(16)的形式非常相似。这同时表明，这种修正方式能够简单地给出一项修正系数，不需要进行额外的计算。即通过原理论测量得到的杨氏模量 E' 与实际的杨氏模量 E 满足

$$E' = k(y, z) \cdot E \quad (24)$$

令图 3.3.1 所示的正比关系的斜率为 $g(y, z)$ ，代入式(23)便可得

$$k(y, z) = \frac{g(y, z)}{4E\sqrt{R}} 3(1-\mu^2) \quad (25)$$

通过式(25)处理上述 64 组仿真结果, 当被压圆柱体的半径 r 和高度 H 改变时对应的修正系数 k , 如表 3.3.1 所示。可以发现, 随着被压圆柱体的尺寸接近丫头的尺寸, 修正系数越来越大, 即经典 Hertz 接触理论的偏差越来越大。当 $y=z=0.5$ 时, 修正系数达到了 1.41, 即仍采用经典 Hertz 理论计算杨氏模量会出现 41% 的偏差。这也说明了修正理论的重要性。

k		$z=R/H$							
		0.13	0.17	0.20	0.25	0.33	0.38	0.43	0.50
$y=R/r$	0.13	1.02	1.03	1.04	1.06	1.10	1.12	1.15	1.19
	0.15	1.03	1.04	1.05	1.06	1.10	1.12	1.15	1.19
	0.19	1.06	1.06	1.07	1.08	1.11	1.13	1.16	1.20
	0.25	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.15	1.17	1.21
	0.33	1.16	1.18	1.18	1.19	1.21	1.21	1.23	1.25
	0.38	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.28
	0.43	1.24	1.26	1.27	1.28	1.30	1.31	1.32	1.33
	0.50	1.30	1.32	1.34	1.35	1.38	1.39	1.40	1.41

表 3.3.1 k 随 y 和 z 的变化情况

在此处, 便需要使用有限元仿真计算所得的大量结果, 来拟合出修正系数的具体形式。这里采取泰勒展开的方式, 将表达式用无穷多项式的前几项表达。由于 y, z 本身应当比较小, 可以只取到展开式的二次项而只产生非常小的误差。即把函数在 $y=z=0$ 处展开

$$k(y, z) = p_{00} + p_{10}y + p_{01}z + p_{20}y^2 + p_{02}z^2 + p_{11}y \cdot z \quad (26)$$

使用 Matlab 软件对 y, z 不同的 64 组有限元仿真结果进行多元函数线性拟合, 取到二次项可以得到如下结果。

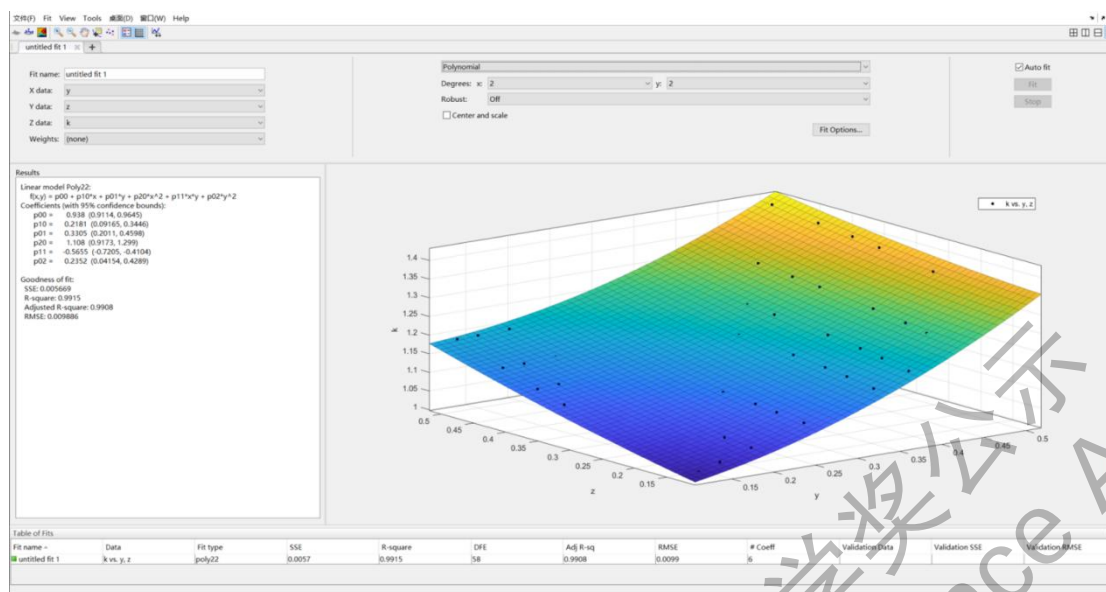
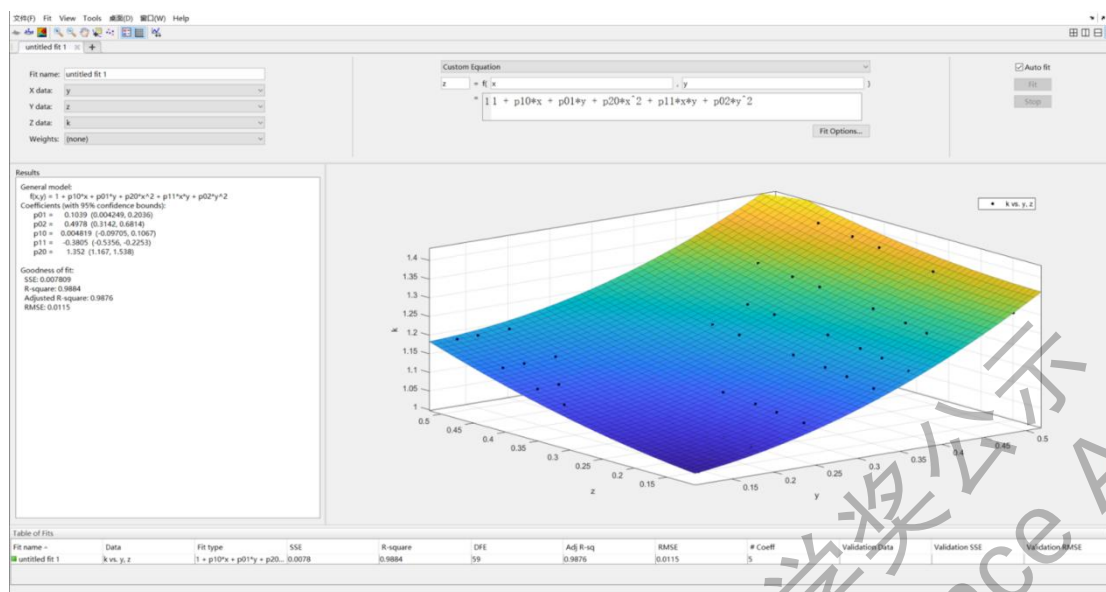


图 3.3.2 初始的多项式拟合

在此处，由于进行了完全无量纲化的操作， p_{00} 这一项其实是确定的。即在 y, z 均为 0 时，即被压圆柱体相对于半球体压头而言是无限大体，修正后的理论可以退化为 Hertz 接触理论， p_{00} 作为修正系数的唯一一项，也自然等于 1。

从拟合结果中可以发现，1 并不在原始的 p_{00} 的置信区间内，但是已经非常接近了。我猜测，这是因为在某些 y, z 的取值范围计算的跨度太大了，或者 Abacus 仿真软件本身计算精度不足够。

受计算机算力的限制，将 p_{00} 直接代为 1 后再进行拟合。这一改变依然可以有效的减小杨氏模量的测量误差，因为，在原始情况下，Hertz 接触理论是一定正确的。换言之，所有关于 p_{00} 项的计算误差主要由于有限元分析结果引起的。另外，此时拟合结果的相关性依旧是很高的，证明这应该是一种更方便，且依然可靠的拟合方式。

图 3.3.3 P_{00} 固定为 1 时的拟合结果

值得注意的是，在图 3.3.3 中的 x 和 y 分别表示本文定义的无量纲数 y 和 z 。观察拟合结果可以发现，两个一次项系数，即 $p10$ 和 $p01$ ，都是较为接近 0 的。这表明，两个无量纲数的一次项对结果的影响是较小的。由于本节旨在找出一个实用的修正形式，所以简便性是非常需要考虑的。所以，我删去了拟合函数中的这两项，在大大简化形式的情况下，依然可以得到相关性非常高的拟合结果，如下图所示。

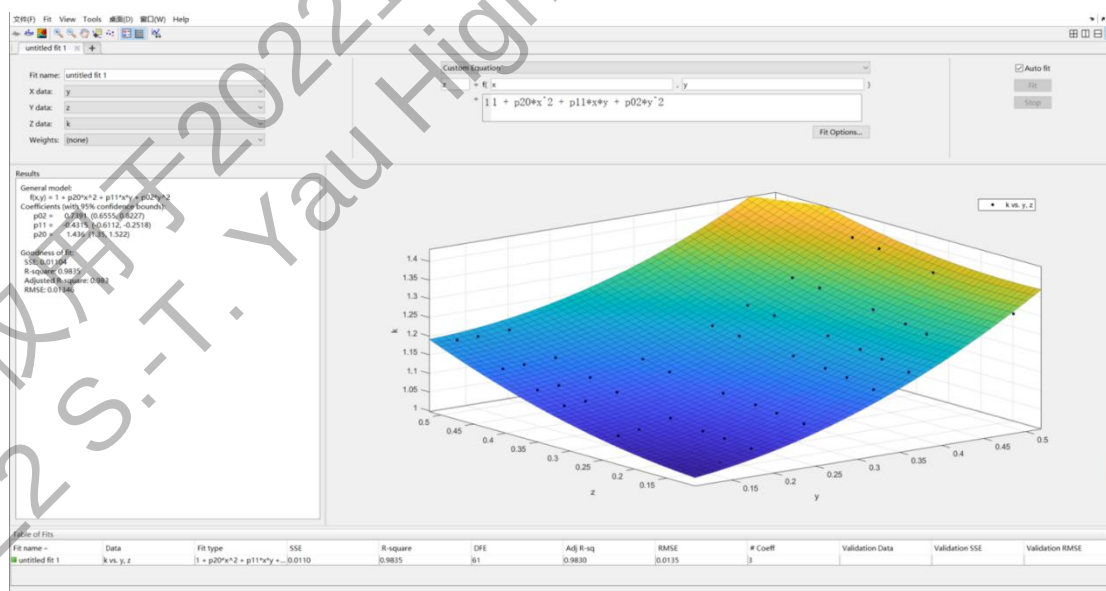


图 3.3.4 最后确定的修正函数拟合结果

这个结果表明，本节在 π 定理的基础上确定的修正函数形式是合理的，并且拥有较小的误差。另外，修正系数 $k(y, z)$ 并不会随着被压圆柱体的杨氏模量的改变而改变，仅仅依赖于被压圆柱体的几何尺寸。修正后得到的压入深度和压力之间的关系为

$$F = \frac{4\sqrt{R}}{3(1-\mu^2)} E' \alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{R}}{3(1-\mu^2)} (1+1.436y^2 - 0.4315yz + 0.7391z^2) E \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (27)$$

因此可以根据实际测量的压入深度和压力曲线，通过该修正理论确定得到任意尺寸被压圆柱体的杨氏模量：

$$E = \frac{3(1-\mu^2)}{4\sqrt{R}} \cdot \frac{F}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+1.436y^2 - 0.4315yz + 0.7391z^2)} \quad (28)$$

4. 测量装置的设计与制作

4.1 装置设计以及 SolidWork 图纸绘画

基于上述修正理论，通过实验获得半球形压头压入被压圆柱体过程中的压入深度及压力，即可确定被压圆柱体材料的杨氏模量。因此，一个可以同时测量压入深度和压力的实验装置是非常重要的。而满足上述需求的装置在市场上很难找到，因此，我设计了一款低成本、易组装、高精度的实验装置。

该装置大约分为三部分：用于测量压入深度的部分，测量力的部分，以及固定前两者的支架。具体设计上，为了测量压入深度，我采用了丝杠滑台，通过旋转丝杠可以精准控制滑台的位移；同时将高精度的商用压力传感器与滑台固定在一起，用于测量压力大小；为了方便测量，我又设计了金属支架，将前两部分在竖直平面内组装起来。该装置的整体设计如图 4.1.1 所示。

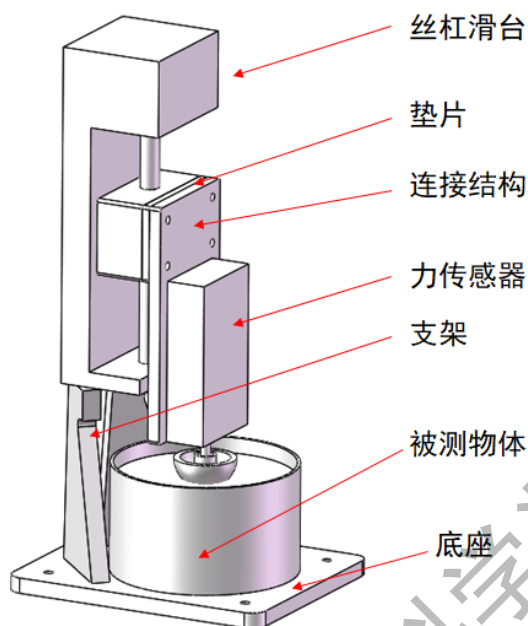


图 4.1.1 装置设计图

该装置在工作时，可以通过顶部旋钮控制滑台下降的距离，同时力传感器反映出不同压入深度时候的压力大小。至于压入深度的具体数值，可以通过测量丝杠的旋转角度来确定。

4.2 装置组成构建的选择与组装

为了保证丝杠滑台的高精度，我从淘宝上购买了 GGP 开放式双光轴滚珠丝杆直线模组导轨铝传动滑台，如图 4.2.1 所示。该丝杠滑台的导程为 4mm，即丝杠旋转 360°，滑台移动 4mm；有效行程为 100mm，即滑台的最大移动距离为 100mm，其精度和移动范围均复合实验需求。



图 4.2.1 丝杠滑台

同样为了保证压力的准确测量，我在淘宝上购买了两个数显推拉力计，型号为 ZMF-5 和 ZMF-50，二者的量程分别为 5N 与 50N，数显推拉力计如图 4.2.2 所示。因此，在测量不同软硬程度的物质杨氏模量时，可以选择不同的力传感器。



图 4.2.2 数显推拉力计与其配件（并不使用附带配件）

基于上述理论，需要力传感器的端头连接半球形压头，但所购买的力传感器的端头长度及附带的压头配件不满足装配及设计需要。因此需要额外购买了加长螺杆来延伸力传感器的端头长度，并采用 3D 打印的方式制作了多个尺寸的半球形压头。为了便于半球形压头与力传感器端头的连接，半球形压头设计如图 4.2.3 所示。

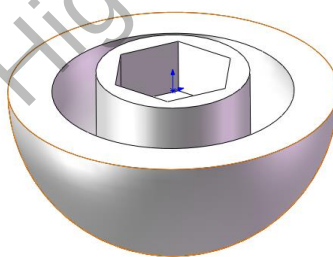


图 4.2.3 半球压头设计图

为了将上述部件组装起来，我制作了支架等连接结构。这些连接结构是在 Solidwork 中画图后，通过机加工的方式用铝合金制作的。支架等连接机构的设计如图 4.2.4 所示。上述结构之间均采用标准型号的螺栓进行装配。

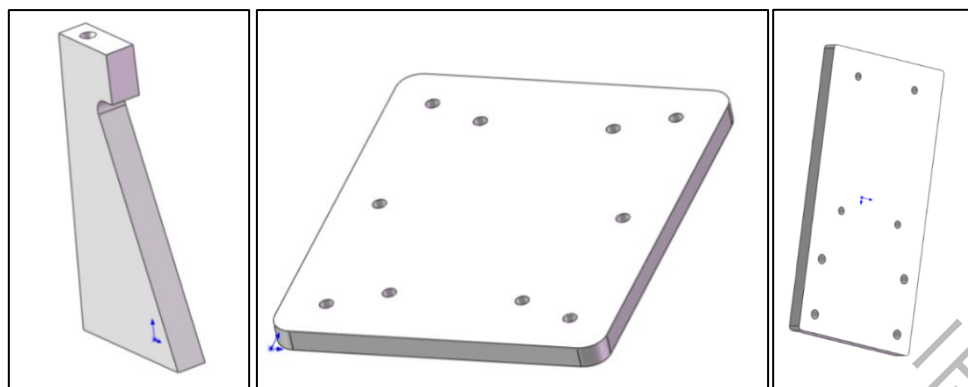


图 4.2.4 支架、底座、连接结构设计图

实验中需要准确读取滑台的移动距离来表征压入深度的大小，因此我在丝杠滑台控制丝杠转动的转盘上贴上如图 4.2.5 左图所示的角度刻度盘。该角度刻度盘是使用矢量设计软件确定尺寸（外径 7.9mm，内径 5mm）后打印到贴纸上制得的。同时为了方便读取转盘转动的角度，我还通过 3D 打印的方式制作了如图 4.2.5 右图所示的指针结构。

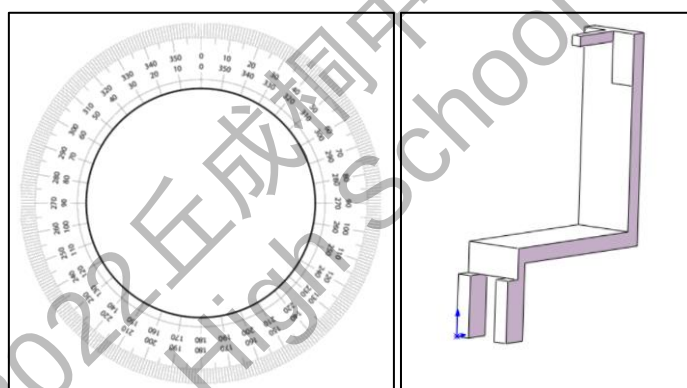


图 4.2.5 刻度盘及指针结构示意图

在进行测量实验时，通过指针结构可以方便地读取转盘转动的角度。转盘转动 360° 对应滑台带动力传感器移动 4mm，因此转盘转动 18° 对应滑台移动 0.1mm。通过上述设计保证了压入深度测量的准确性。

将上述结构和力传感器全部装配起来，最后制作得到的测量装置如图 4.2.6 所示。

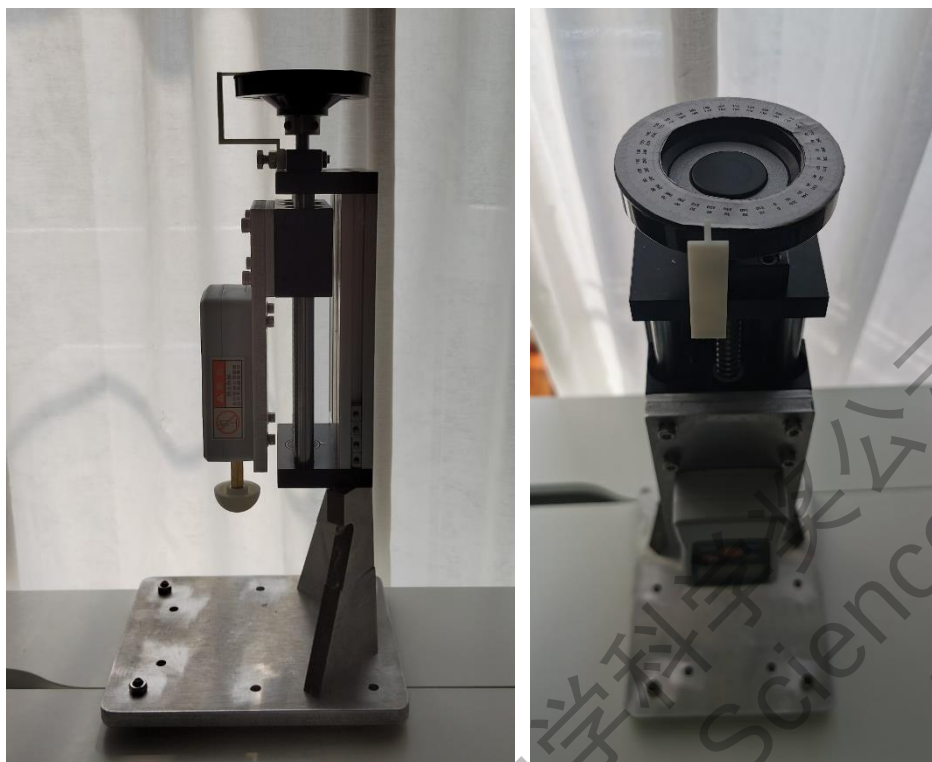


图 4.2.6 组装后的实验装置

4.3 装置测量准确性的影响因素分析

本节将对测量装置各部分可能出现的不准确情况进行逐一排除，最大程度确保装置的可靠性。

第一，检验丝杠滑台装置的准确性。即旋转轮盘带动丝杠旋转一圈后，滑台是否移动了标称的 4mm 位移。为了验证这一点，我在装置的侧面固定了一把标尺，将转盘旋转 360°后，通过标尺测量滑台顶端下降的距离。结果表明，滑台的导程是准确的，测量数据不会因此出现偏差。

第二，验证压头形状的标准。如果压头在 3D 打印过程中几何尺寸出现偏差，不能做到如理论所要求的形状（半球形），那么实验测量数据将无法和理论结合。为排除这一点，我用相机从侧面拍摄了 3D 打印的压头，并使用标准作图软件中的圆形与其进行比对，其结果如图 4.3.1 所示（图中红色圆圈是作图软件绘制的标准圆形）。结果表明，压头的外部形状近乎完美的符合一个圆弧状，证明 3D 打印的压头结构准确度较高，是与理论适配的。

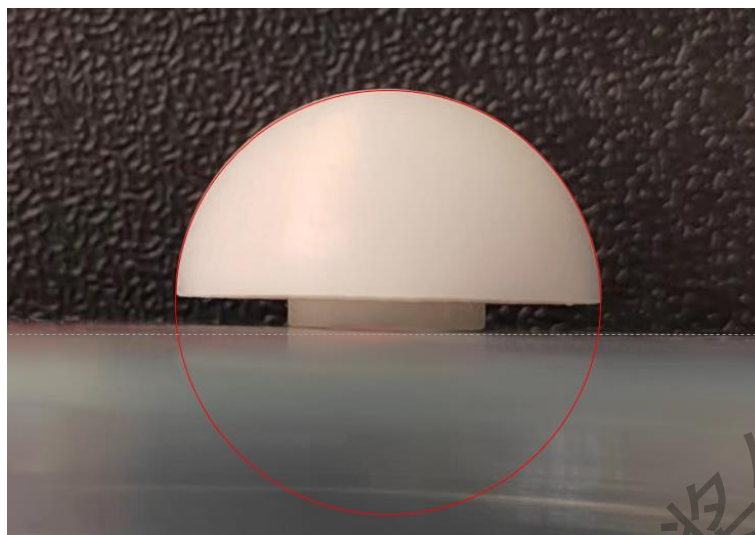


图 4.3.1 3D 打印压头的形状复核

第三，由于轮盘上的角度刻度是人工粘贴上的，有可能会出现读数误差。由于其导程仅有 4mm，表盘转动 1° 仅对应滑台移动 $1/90\text{mm}$ 。粘贴位置与轮盘的轻微不同心或者不平整带来的读数误差不会超过 5° 。换言之，此部分的误差不可能超过 0.056mm ，或 1.39% 。如此之小的误差，是可以被接受甚至忽视的。

第四，为了验证验证力传感器的测量准确性，我将 500g 标准砝码悬挂在力传感器上，对应拉力数值为 4.93N ，可以看出里力传感器的读数是较为精准的，复核实验如图 4.3.2 所示。



图 4.3.2 力传感器准确性的验证

第五，为了与理论以及有限元仿真相适配，该装置应当能够被认为是足够刚性的。若装置本身在测量过程中也发生形变的话，会对测量数据的产生较大

影响，造成误差。为了验证这一点，我将压头向下移动直至接触底板，因为底板是较为刚硬的铝合金材料，继续将转盘转动一个很小的角度后，力传感器就达到了测量上限。这表明整个装置的连接是很好的，装置本身几乎没有形变，近乎刚性。

第六，判断压头和被压物体的初始接触误差。在进行实验时，首先要让压头和被压圆柱体间刚好接触上，并以此为压入深度的零点来记录后续加载的加入深度。但是用肉眼很难判断压头与被压物体之间是否已经接触上。因此在具体测量时，当压头与被压圆柱体之间产生一个极小的作用力时，以此位置及接触压力为参考，记录后续加载的压入深度和修正压力。因为初始接触作用力相对实验中的压力值是非常小的，由此带来的误差可以忽略不计。

至此，我已经分析了测量装置在各个方面可能会出现的测量偏差，证明该装置是能够按照设计目的被使用的，能够为本测量方法服务。

5.杨氏模量测量方法的验证

5.1 实验测量数据的准确性

为了说明实验测量数据的准确性，我制作了硅胶圆柱体，用于该压入实验。硅胶圆柱体是将淘宝上购买的医用金马克流体硅胶（Elite Double 22）的两组分以 1:1 的质量比充分混合，待气泡完全破裂后导倒入圆柱容器静置 30min 制作而成。如图 5.1.1 为金马克流体硅胶两组分的实物图。



图 5.1.1 金马克硅胶两组分实物图

首先我采用该装置对硅胶圆柱体进行压入实验，分别测定了加载和卸载过程中的压入深度和压力。其结果如图 5.1.2 所示。可以看出，加载和卸载实验曲线间的差别是非常小的。这不仅证明了硅胶具有很好的弹性，也说明了此加载装置具有很小的回程差。

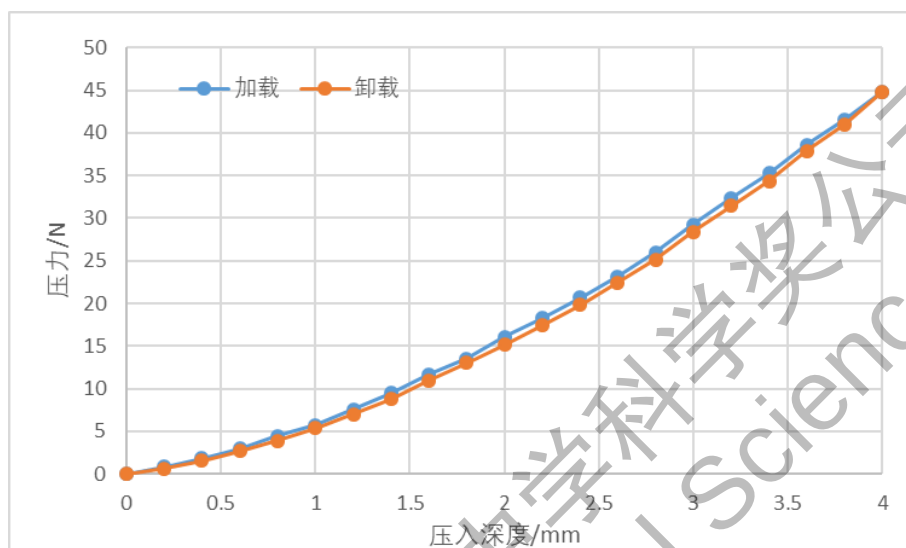


图 5.1.2 加载—卸载实验对比

为保证实验的可重复性，我对硅胶圆柱体进行了三次加载，三次实验结果如图 5.1.3 所示。三次加载实验结果之间的差别的微乎其微，因此实验的可重复性是非常高的。

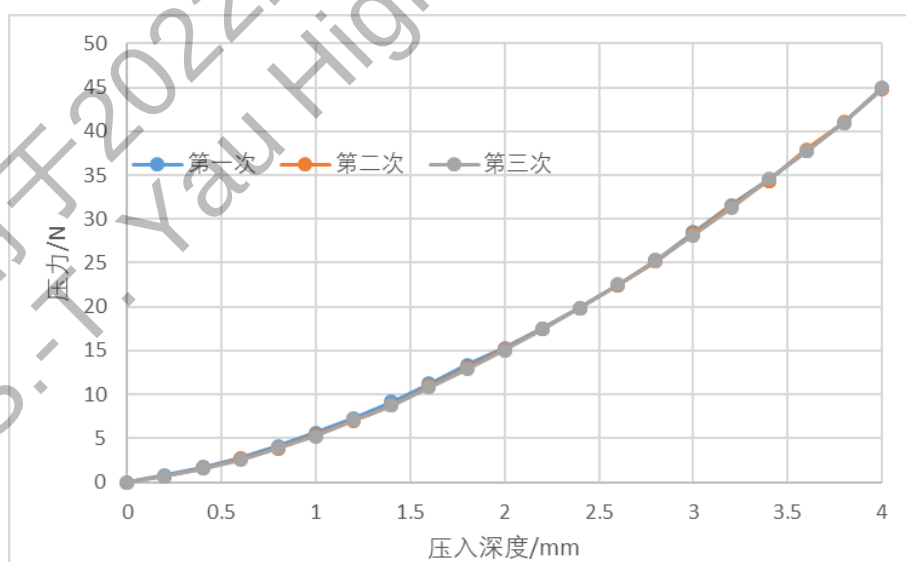


图 5.1.3 三次加载曲线对比

考虑到实验中半球体压头与硅胶圆柱体的接触面间可能存在摩擦力，这与上述理论的基本假设有一些差别。因此，为了考虑接触面间摩擦力的对压入实

验结果的影响，我在接触面上滴上润滑油以减小摩擦，重新进行了上述压入实验，与未进行润滑处理的实验结果重合度很高，因此实验过程中接触面上的摩擦力对于测量数据的影响是可以忽略的。

5.2 测量数据与理论结果的适配

上文使用硅胶圆柱体验证了实验装置的可靠性。本节将实验与有限元仿真及修正理论得到的结果进行对比，以说明测量方法的可靠性。为了确定硅胶材料的杨氏模量，制备多个用于单轴拉伸实验的长条形硅胶试件（尺寸：25mm×4.85mm×1.24mm）。用于单轴拉伸的硅胶试件及尺寸测量工具如图 5.2.1 所示。



图 5.2.1 单轴拉伸硅胶试件及尺寸测量工具

将硅胶试件用万能加载实验机（DMA850）对进行三次单轴拉伸实验，单轴拉伸的加载速度为 0.2mm/min，加载过程如图 5.2.2 所示。

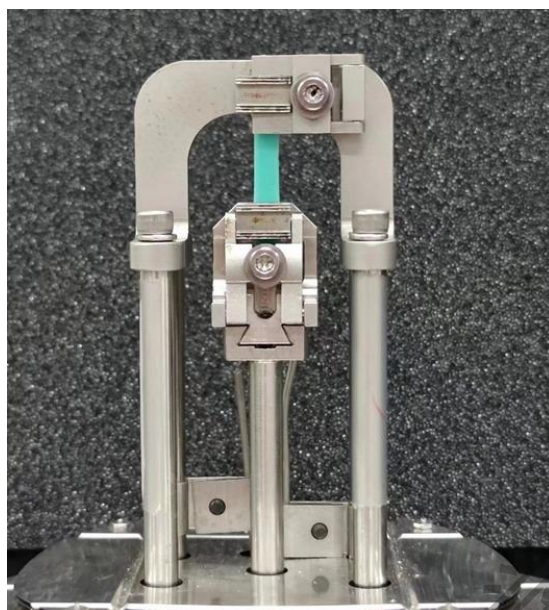


图 5.2.2 硅胶试件的单轴拉伸实验

根据加载过程中的拉力和位移数据，处理得到单轴拉伸过程中的应力和应变关系，如图 5.2.3 所示。

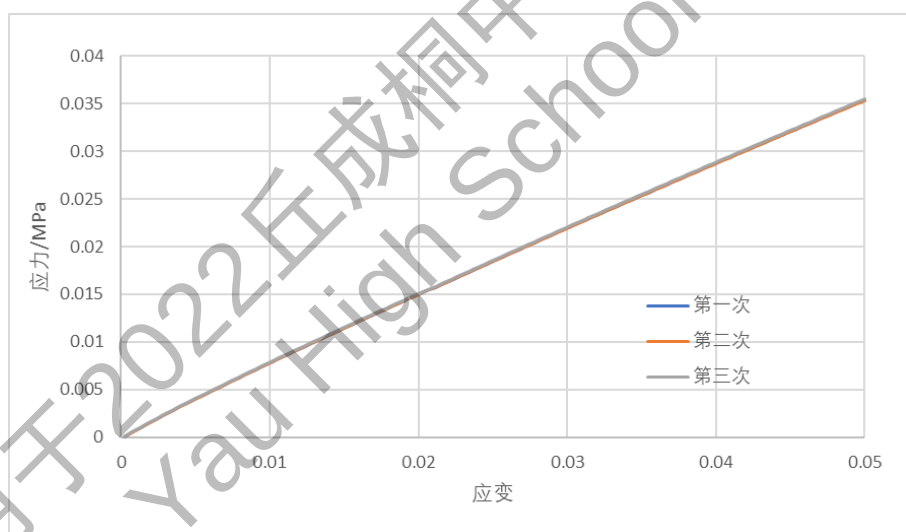


图 5.2.3 硅胶试件的单轴拉伸应力—应变关系曲线

由图 5.2.3 可以看出，三次单轴拉伸加载实验得到的曲线重合度很高。根据应力—应变曲线，拟合得到硅胶材料的杨氏模量为 0.72MPa 。将硅胶材料的杨氏模量用于有限元仿真计算及修正理论，计算得到的压入实验过程中的压入深度和压力关系曲线如图 5.2.3 所示。

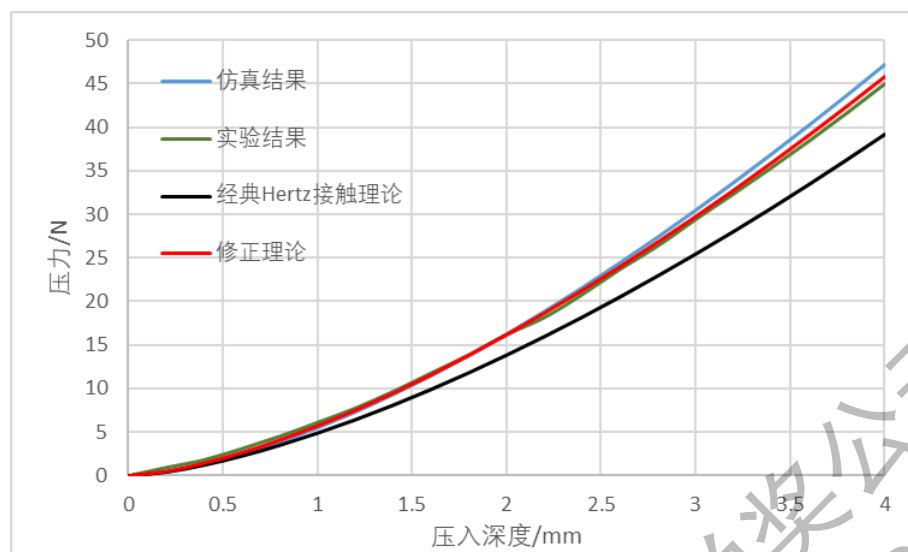


图 5.2.4 压入实验压入深度和压力关系曲线

从图中可以看出，实验结果与有限元仿真结果之间偏差很小，这说明了有限元仿真结果的正确性。同时注意到，基于有限元仿真结果的修正理论得到的结果与实验同样吻合的很好。对于经典 Hertz 接触理论，因为被压圆柱体相对于压头并不满足近似无限大的条件，因此与实验结果有较大的偏差，这也说明了本文修正理论的必要性和重要性。

综上，本文所提出的修正理论及基于修正理论设计制作的测量装置是可以方便快捷的用于测量软物质的杨氏模量的。这也为下文中具体的实验，即对生活中软物质的软硬程度进行观察，奠定了基础。

6. 测量方法对于实际问题的探究

6.1 探究吉利丁（明胶）浓度对其杨氏模量的影响

由于鱼汤冷却后形成的“鱼冻”是一种影响因素（如鱼的种类、大小、蛋白和其他元素含量、做汤时盐的含量等等）较多的物质，因而不适合作为研究对象。考虑到鱼汤能够凝固成“鱼冻”主要是由于鱼皮中的蛋白质，且生活中多用于制作果冻的吉利丁材料主要组成部分也是蛋白质。并且将吉利丁和水充分混合，冷却后也可以得到与“鱼冻”相似的凝胶固体。因此本实验中用不同浓度的吉利丁材料代替“鱼冻”进行弹性影响因素有关的研究。

吉利丁（明胶）是一种大分子的亲水胶体，是胶原部分水解后的产物。明胶不溶于水，但浸泡在水中时，可吸收 5~10 倍的水而膨胀软化，如果加热，则溶解成胶体，与水充分混合后冷却至 35℃ 以下，可变成凝胶状固体。这种凝胶状物质的杨氏模量不易使用的传统方法进行测定，但使用本文中提出的方法和装置可以较为方便而精确地测量。

本小节对吉利丁的浓度（所用吉利丁材料和水的质量之比）对制得的吉利丁凝胶的杨氏模量的影响进行了研究，实验过程中保持制作流程、环境温度、所用容器尺寸、压头尺寸等参数一致。容易想到，吉利丁的浓度应当与制得的吉利丁凝胶的杨氏模量之间呈现明显的正相关关系，而本小节将进行定量探索。

实验中选用百钻的吉利丁片（包装净含量：125g）作为原材料，选用多个直径为 21.4cm，高度约 8cm 的圆柱塑料盒作为容器，具体的制备过程如下：

固定水的总质量为 450g，分别称量的满足浓度比（吉利丁：水）1:8，1:10，1:12，1:15，1:18 的吉利丁片，先在水中浸泡 20 分钟使其变软，后向其中加入 80℃ 的热水并不断搅拌使其不断溶解，至达到所需质量为止。充分搅拌后静置片刻并将其放入冰箱，约 8 小时后凝固成凝胶状，从冰箱取出并在室温下放置 1 小时后开始进行测量。

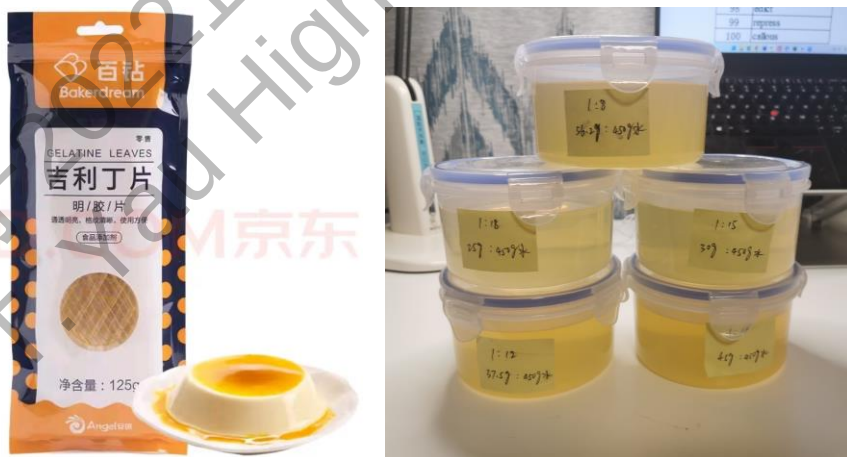


图 6.1.1 实验所采用的吉利丁片和制得凝胶固体

首先，对吉利丁浓度最高(1:8)和最低(1:18)的两个凝胶样品进行了加—卸载的压入实验，实验中压入深度和压力的关系如图 6.1.2 所示。

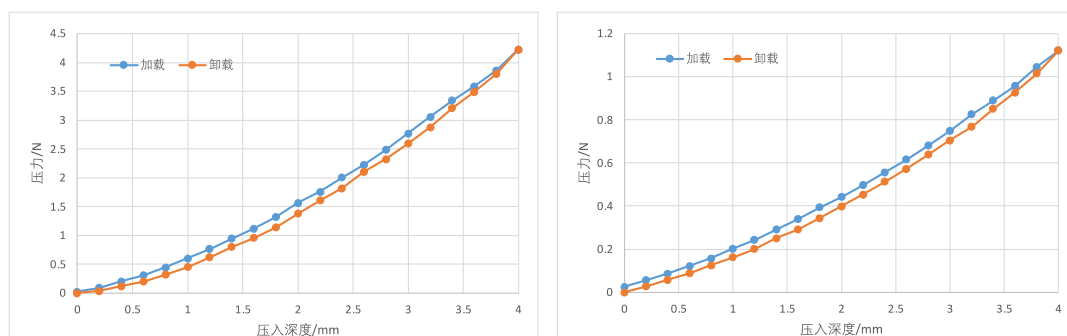


图 6.1.2 吉利丁加载-卸载实验（左浓度 1:8，右浓度 1:18）

从图 6.1.2 中可以看到，加载和卸载过程测得的曲线重合度较高，表明吉利丁材料加水后形成的凝胶状态是接近完全弹性的，可以使用杨氏模量来描述它的力学性质。随后，对所有不同浓度的样本进行了压入深度—压力关系的测量，缓慢加载至最大压入深度 4mm，每隔 0.2mm（对应轮盘上的 18° ）记录一次数据，共 21 个数据点，其中以 1:8 浓度的吉利丁固体为例，其原始数据和处理过程记录如表 6.1.1 所示。

压入深度/mm	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
压力/N	0	0.067	0.181	0.286	0.419	0.579	0.742	0.923	1.096	1.294	1.544
压入深度/mm	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	
压力/N	1.732	1.979	2.202	2.465	2.747	3.034	3.317	3.565	3.838	4.204	

表 6.1.1 凝胶（浓度为 1:8）的实验数据

以压力为纵坐标、以压入深度的 $3/2$ 次方为横坐标，可以得到如图 6.1.3 所示曲线，可以观察到该曲线的线性程度较好，说明可以采用修正后的 Hertz 接触理论对吉利丁固体进行分析，测量得到的实验结果与此前的理论模型吻合度较高。

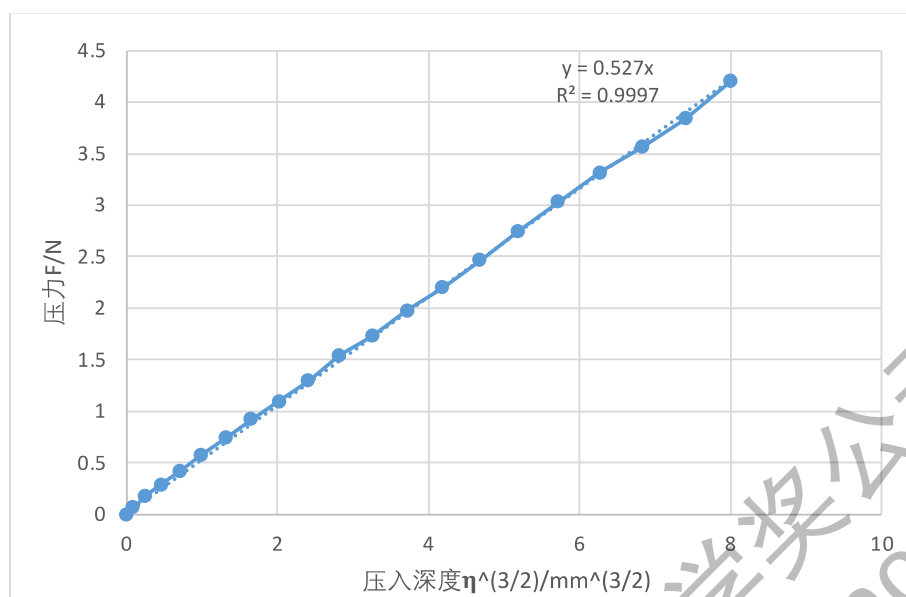


图 6.1.3 凝胶（浓度为 1:8）的压力-压入深度 $3/2$ 次方的关系曲线

对函数图像进行线性拟合 ($R^2=0.9997$)，根据直线的斜率，以及压头尺寸、容器尺寸、吉利丁固体的高度等参数可以计算出这一样品修正后的杨氏模量。重复这一操作，可以得到全部五个样品杨氏模量，如图 6.1.4 所示。

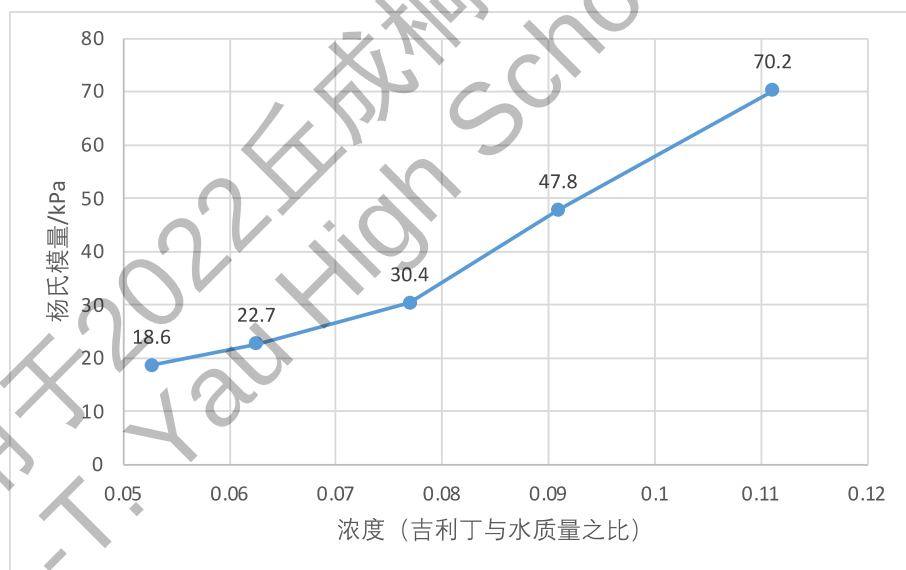


图 6.1.4 不同浓度吉利丁凝胶的杨氏模量

为了更好地描述凝胶的杨氏模量随吉利丁浓度变化的规律，将浓度为自变量、杨氏模量为因变量代入 Matlab 中进行了简单的幂次拟合，发现选择三次方时的拟合结果最好 ($R^2=0.9924$)，如图 6.1.5 所示。

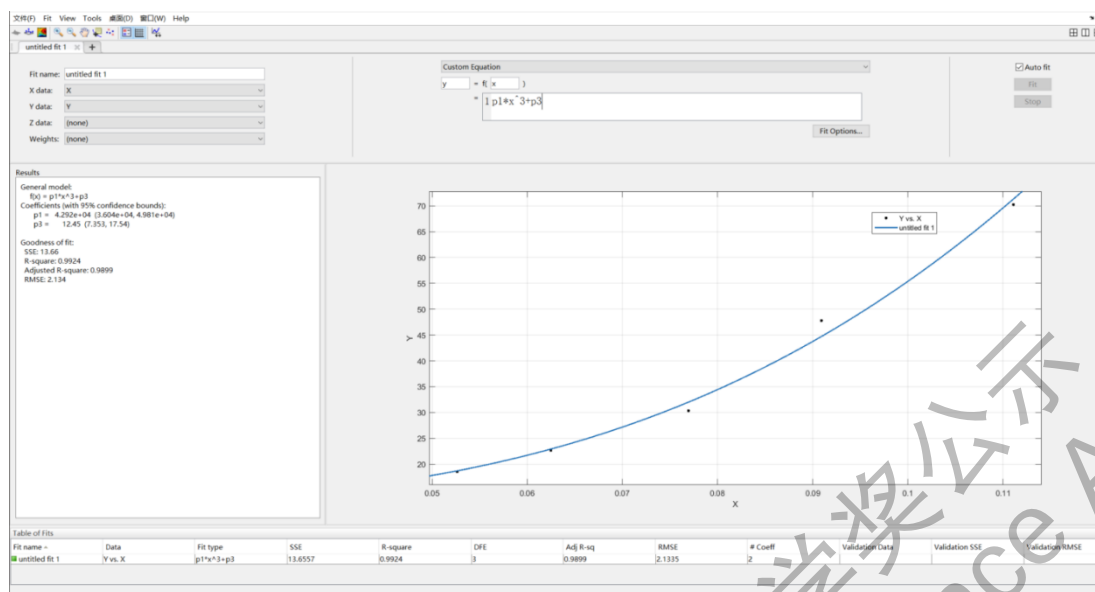


图 6.1.5 吉利丁凝胶杨氏模量的拟合

定义 C 为吉利丁的浓度, E_{gelatin} 为其杨氏模量, 拟合得到的函数关系为

$$E_{\text{gelatin}} = 4.29 \times 10^4 \times C^3 + 12.45 \quad (29)$$

实验数据表明, 吉利丁凝胶的杨氏模量与吉利丁浓度的三次方有很好的线性关系, 此即为吉利丁的杨氏模量随其浓度变化关系的定量表述。

本实验验证了此前关于吉利丁凝胶杨氏模量和吉利丁浓度呈正相关关系的猜想, 并给出了不同吉利丁浓度制得吉利丁凝胶的杨氏模量。该实验结果的现实意义在于: 吉利丁在制作慕斯蛋糕, 果冻, 布丁等食品时被广泛使用, 而其用量也会直接影响成品的硬度, 带来口感上的变化。这一部分所得数据与对现象的描述能够为食品制作中的用量问题进行简单地参考, 以便个人能更好地在生活中, 根据自身对于不同的食品硬度的喜好, 满足自己的实际需求。

6.2 蛋清吸收热量对其杨氏模量的影响

生活中常可以听到关于鸡蛋羹的描述有“嫩”、“熟”、“老”等口语化描述, 指的是烹饪时间的不同会对鸡蛋羹的软硬程度产生很大影响。本小节主要研究蛋清吸收热量对其杨氏模量的影响。

为了方便控制变量, 实验中只采用鸡蛋的蛋清进行实验。本部分将通过杨氏模量这一参数, 探究并描述鸡蛋清在不同蒸制时间 (即吸收不同热量) 时所

呈现的固体状态的不同，并定义何为鸡蛋清的“熟”与“老”。由于鸡蛋存在一定的个体差异；烹饪流程更复杂，其中的不可控因素较吉利丁的仅加热和冷却更多，该实验变量控制更加困难，导致其误差可能更大。

实验中所用的材料为市面上出售的常见白壳鸡蛋，选择 6 个鸡蛋为一组，取出蛋清混合后装入直径为 16.4cm，高度约 6cm 的塑料圆柱盒中，并放入家用蒸箱进行蒸制。设定蒸箱温度为 100℃，使用低功率档位分别对样品进行 20、22.5、25、27.5、30、32.5、35、37.5、40 和 45 分钟的蒸制过程，随后将样品按烹饪时间依次取出并冷却至室温后进行实验。



图 6.2.1 实验中用到的部分鸡蛋、鸡蛋清和所用的蒸箱



图 6.2.2 蒸制后的部分鸡蛋清固体样品

鸡蛋清固体样品由于其各个位置受热不同，同一样品不同位置的硬度不尽相同，选择了每份样品最中央的区域的杨氏模量代表蛋清在该状态下的性质。其余测量过程与吉利丁实验中类似。



图 6.2.3 鸡蛋清固体杨氏模量的测量过程

首先，对蒸制了 35 分钟的样品进行了加载—卸载的验证测量，结果如图 6.2.4 所示。

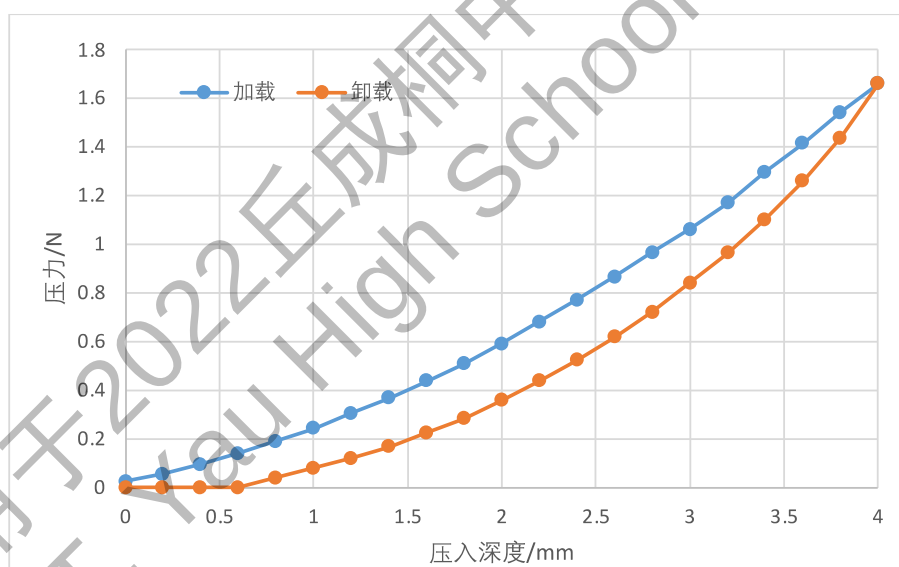


图 6.2.4 蒸制 35min 的鸡蛋清固体加载-卸载实验

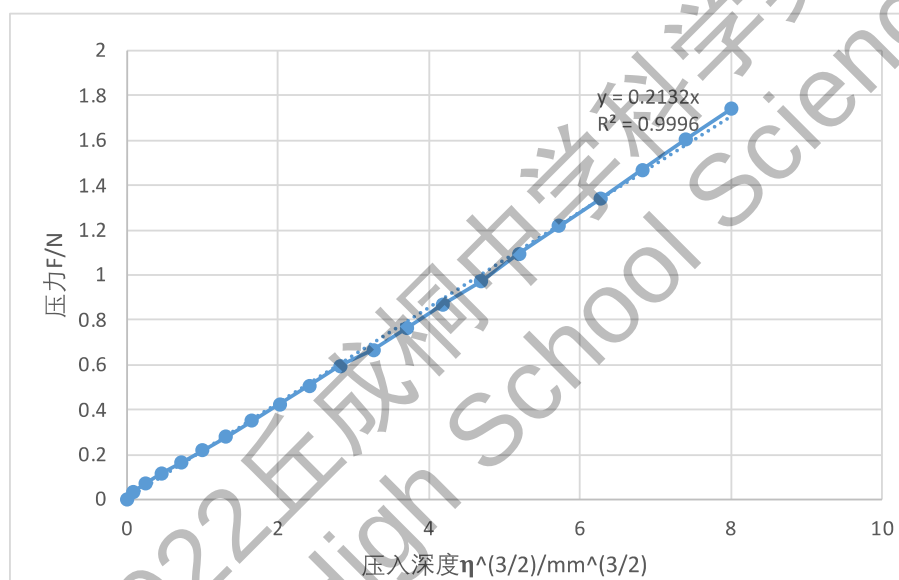
鸡蛋清样品的回滞现象较吉利丁样品明显许多，说明其具有一定的粘弹性，其弹性性质并不完全理想，这里仍可以采用之前的方法测量出加载过程的压入深度—压力曲线，并计算出杨氏模量对其性质进行表征。

对所有不同蒸制时间的样品进行了压入深度—压力的曲线测量，数据点选择与此前类似，其中蒸制时间 37.5 分钟的鸡蛋清样品的原始数据和处理过程记录如表 6.2.1 所示。

压入深度/mm	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
压力/N	0	0.035	0.072	0.117	0.162	0.219	0.278	0.35	0.424	0.506	0.595
压入深度/mm	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	
压力/N	0.666	0.766	0.868	0.971	1.094	1.219	1.338	1.468	1.606	1.74	

表 6.2.1 压入深度—压力数据（蒸制 37.5 分钟的鸡蛋清固体）

以力为纵坐标、取 $3/2$ 次方后的位移为横坐标，将数据点绘制如图 6.2.5 所示，可以发现这一关系曲线十分接近直线，说明可以采用修正后的 Hertz 接触理论对鸡蛋清样品进行分析，测量得到的实验结果与此前的理论模型吻合度较高。

图 6.2.5 压入深度 $3/2$ 次方—压力关系曲线（蒸制 37.5 分钟的鸡蛋清固体）

对函数图像进行线性拟合 ($R^2=0.9996$)，根据直线的斜率，以及压头尺寸、容器尺寸、鸡蛋清固体的高度等参数可以计算出修正参数并确定其的杨氏模量。重复这一操作，可以得到全部样品杨氏模量，如图 6.2.6 所示（25 分钟的鸡蛋清固体出现异常，该数据点作废）。

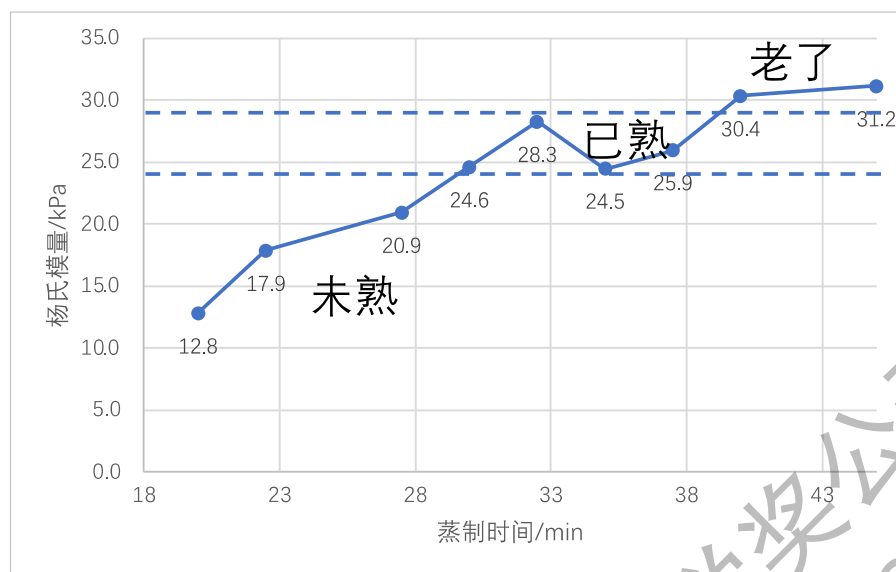


图 6.2.6 不同蒸制时间的鸡蛋清固体杨氏模量数值

从实验结果中可以看出，鸡蛋清固体的杨氏模量随蒸制时间增长而出现上升趋势，且蒸制时间在 30 分钟后样品的杨氏模量出现平台（32.5 分钟样品硬度稍高，可能是其所用材料本身性质不同，或是过程中出现了其他不可控因素所致），因此基本可以判断此时鸡蛋清已经“熟了”，其杨氏模量的范围约为 24-30kpa；而在 37.5 分钟后，鸡蛋清固体的杨氏模量又出现了小幅上升，达到 31kpa 左右，随后趋于平缓，这可能说明确实是蒸“老了”。至此，本部分便研究了蛋清在不断受热下状态（不熟-熟-老）的变化过程，并对每一阶段的临界值给出了定量的定义。

6.3 对实验现象的归纳总结——蛋白质的弹性受各类因素影响

本部分中对第六节中测得的两种规律进行探讨与归纳：根据实验现象，吉利丁和蛋清杨氏模量之所以会随着浓度或者受热时间变化，是因为其中的蛋白质成分在起作用，而两实验中体现出的分别是浓度和吸热量对其的影响规律：明胶本身便是由蛋白质组成的，含有 18 种氨基酸^[12]；而蛋清中含水分 87%，固形物 13%——固形物中大约 90%是蛋白质（其中卵白蛋白 75%，卵类粘蛋白 15%，卵粘蛋白 7%，伴白蛋白 3%）^[13]。在吉利丁凝胶实验中，吉利丁浓度的增加会导致蛋白质分子排列的更加紧凑，从而使得其杨氏模量增加。而在蛋清逐渐变熟、变老的过程中，蛋白质发生了变性，其空间结构改变，从而使得其杨氏模量发生了显著的变化，是不同的过程。

7.总结与展望

针对软物质杨氏模量的测量问题，本文提出了一种实用有效的修正接触理论。基于经典 Hertz 接触理论出发，基于有限元仿真结果和量纲分析方法对经典 Hertz 接触理论进行修正，突破了经典 Hertz 接触理论对被测物体相对压头无限大的限制，极大地拓展了压入实验测量软物质杨氏模量的影响范围。并且基于该修正理论，发明和制作了一种有效的测量软物质杨氏模量的测量方法和装置，具有低成本、易组装、高精度的特点。最后，本文基于使用该测量方法进行的实验，说明测量方法有效性的同时，探究了吉利丁凝胶受浓度影响以及鸡蛋清在加热变成固体后力学性质的变化。

当然，本文的实验部分中仍然存在着诸多不足，比如受到测量时间不足、实验人员精力和减小材料浪费等因素的多重影响，实验中测量的数据点相对稀疏，且鸡蛋清实验中存在个别数据点趋势不明显，用于作为对于规律的证明而言不够具有说服力，有待后续改进。

本文的重点在于真正构建了一种方便的测量弹性方法，利用生活中较为易得的材料组装了装置，并从各个角度验证了其可靠性。我注意到此前关于生物材料弹性方面的研究较多都是在实验室中利用较为专业的仪器测量完成^{[14][15]}，而我的论文工作或许能和我一样对生活中的物理问题感兴趣，但苦于没有实验室资源的同龄人们打开一扇门，让他们能够更加自由地探索物质世界的运行规律。

同时，该种测量方法也可以用于更多的领域，而不仅仅局限于文中所使用的两种材料。在各种生物软材料（如动物皮肤、鸭血）、火锅底料、橡胶等材料上，该测量方法对揭示其杨氏模量都可以发挥一定作用。

除了其能向外界及后续研究提供的广泛意义之外，本研究也让我受益匪浅。在研究过程中，我切实地完整走完了一个课题研究的过程。从选题，搜索资料开始，一直到撰写论文为止的所有步骤，都是对我探索及思维能力的锤炼与磨砺。在过程中，我得以认真审视了究竟何为“科学研究”这一概念，并深感其不易。在实验进行的过程中也曾碰到过许多困难和挑战，正是这些让我深刻地理解了找准出发点、把握切入点、明确落脚点、抓好支撑点每一步的重要性，在前进的路上兢兢而行，学会了以谨慎的态度面对每一个环节。

参考文献

- [1] 全国中学生物理竞赛常委会.全国中学生物理竞赛实验指导书[M].北京:北京大学出版社,2006:13.
- [2] Su J F, Wang X Y, Dong H. Micromechanical properties of melamine-formaldehyde microcapsules by nanoindentation: Effect of size and shell thickness[J]. Materials Letters, 2012, 89: 1-4.
- [3] Schäfer E, Vache M, Kliesch T T, et al. Mechanical response of adherent giant liposomes to indentation with a conical AFM-tip[J]. Soft Matter, 2015, 11(22): 4487-4495.
- [4] 郑永平 蔡邦智.通过压痕测试确定材料或组织的杨氏模量和泊松比的方法:200610077789.6[P].2007.10.31
- [5] 张满弓等.一种针对 Mullins 效应参数的球压痕表征方法:201911254565.1[P].2020.04.21.
- [6] 马增胜 孙坤.一种压痕测试装置结果的倾斜校正方法及系统:202011625048.3[P].2021.04.16.
- [7] 徐芝纶.弹性力学简明教程[M].北京: 高等教育出版社,2002
- [8] Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques: principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur: mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique, mathématique et d'analyse[M]. Gauthier-Villars, 1885.
- [9] Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper[J]. 1882.
- [10] 赵凯华.定性与半定量物理学[M].北京:高等教育出版社,1991:63
- [11] https://www.bilibili.com/video/BV1M4411a7qz?is_story_h5=false&p=1&share_from=ugc&share_medium=android&share_plat=android&share_session_id=2328d0cf-faa1-42d1-ba0c-dd5262c6e6fe&share_source=WEIXIN&share_tag=s_i×tamp=1663144180&unique_k=F1ZLC19
- [12] <https://baike.baidu.com/item/%E6%98%8E%E8%83%B6%E8%9B%8B%E7%99%BD/3474932?fr=aladdin>
- [13] <https://baike.baidu.com/item/%E9%B8%A1%E8%9B%8B%E6%B8%85/8324712?fr=aladdin>
- [14] Zenchenko T A, Pozharskii E V, Morozov V N. A magnetic micromethod to measure Young's modulus of protein crystals and other polymer materials[J]. Journal of biochemical and biophysical methods, 1996, 33(3): 207-215.
- [15] Nojima T, Iyoda T. Egg white-based strong hydrogel via ordered protein condensation[J]. NPG Asia Materials, 2018, 10(1): e460-e460.

致谢

本文的灵感来源于多年以来，我对鸡蛋羹制作和品尝过程的观察和思考。我一直存在对于这种现象的疑问，直到本次报告写作，让我有了仔细思考、探索该问题的机会；并且真正完整地设计了一个行之有效的方法，给我提供了不断前进的动力。如果我没有完成这篇报告的目的，就很难在学习生活中撇开如此大的时间与精力，去探索这样一个困惑而又使我感到乐趣的问题。

在整个过程之中，我受到了许多人对我不断的支持与帮助。在此我想要表达我的郑重感谢。

首先要感谢指导教师金文力老师对我的指导，在得知我的初步想法后，他鼓励我广泛搜索和查阅前人的相关论文；在我的项目中，他引导我一步步按照科学、严谨的要求，对思路、过程、细节进行深入的思考、证实；并在最后，他为我的论文提供了宝贵的写法指导和修改建议。

其次要感谢韩政沅、曹慧杰学长在百忙之中还抽出时间回复我的请教。曹慧杰哥哥深夜还在帮助我解决有限元计算相关的问题，同时也帮助我进行了硅胶的单轴拉伸实验；韩政沅哥哥教会了我如何高效地查找和阅读相关资料，并指出了我找到的浩瀚材料中最有意义的部分。感谢二位能够容忍我的不断骚扰，在与他们的讨论之中我收益良多。感谢我的妈妈向我传授了制作鸡蛋羹的技巧，她甚至在过程中不小心烫伤了自己的手。

感谢北京大学附属中学对我四年多以来一贯的培养与栽培。学校在向我传授知识的同时致力于将我培养成一个“个性鲜明，充满自信”的学生，使我成为了一个完整的人。学校宣扬的自由精神塑造了我的价值观，培养了我的自主性。我想，我的主观能动性与学校的教育方式是密不可分的，它为我提供了优良的，非常适合我的成长环境。我希望，我能展现出学校所希望自己能够培养出的思想力。在学校四年来向我开设的课程中，尤其地，感谢中学物理竞赛课程与李晓璐老师，夯实了我的物理素养，延伸了我的物理兴趣，培养了我的物理思维；感谢科技竞赛课程与陈清伟老师，培养了我的动手能力。感谢我的同学廖从云，宋天艺等人在过程中对我言语上不断的鼓励。感谢我高中一年级的导师黄永芳老师，她给予了我非常多学习建议，并一直关心着我的生活精神状态。感谢北京大学附属中学道尔顿学院的马继云老师，向我介绍了这项活动。

感谢现代养殖业，让我能够以较为便宜的价格获取如此多用于实验的鸡蛋。在实验的过程中，我多次望着剩余的蛋黄发出了对于生命的感慨和对于某种意义上浪费的道德谴责。感谢信息行业，让我能够如此方便地获得文中用到的工程和数学软件的教程。

最后，我想要对自己表达一份真切的肯定。在过程中我遇到了不少挫折，感谢自己一路走来越挫越勇，很幸运等到了柳暗花明又一村。现在回望这一路风风雨雨，感慨良多。感谢我自己从来没有想过放弃，与日升月落相伴，走完了一个探索者应走的旅程，并始终准备着，去奔赴下一个起点。