

参赛队员姓名： 曹恩雅、郭润泽

中学： 西安交通大学附属中学

省份： 陕西省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 赵述敏、方爱平

指导教师单位： 西安交通大学

论文题目： 小孔射流的螺旋形变机理研究

小孔射流的螺旋形变机理研究

曹恩雅 郭润泽

西安交通大学附属中学

摘要

生活中的水龙头出水、倒牛奶或咖啡等均会出现流体螺旋现象，这引发我们思考：流体向下自由流经一定形状的小孔过程中形成螺旋的机理是什么？影响螺旋形态的相关参数又有哪些？本文从生活中常见的现象出发，通过实验探究、理论分析和数值模拟研究了小孔射流的螺旋形变机理，主要探究了压强、小孔孔径和流体粘度三个自变量对于螺旋的螺距和螺旋半径等形变参数的影响规律。

在实验探究中，利用 3D 打印技术建立小孔模型，尝试多种实验装置，进行大量实验，采集数据并指导理论分析。理论分析时提出了垂直自由射流的表面张力模型，基于能量守恒、通量守恒和振动方程等对物理模型进行分析，给出了螺旋形成机理的定性分析，并确定了相关参数与螺旋形态的定量关系。在数值模拟中，突破了难以捕捉精准现象的难点，加入表面张力系数和能量方程，最终利用 CFD 软件成功模拟出了实验现象。最后，通过将实验、理论和数值模拟结果相互印证，成功解释了这一现象形成的机理，并证明了螺距和螺旋半径随着压强、孔径和流体粘滞系数的变化关系。

关键词：小孔射流、螺旋形成机理、表面张力、伯努利方程、计算流体力学

目 录

摘 要	2
第一章 前言	5
第二章 实验探究	7
2.1 实验设计	7
2.2 实验准备	7
2.2.1 实验器材	7
2.2.2 3D 建模与打印	8
2.3 实验过程与数据收集	9
2.3.1 螺距、螺旋直径与流体初速度的关系	10
2.3.2 螺距、螺旋直径与孔径大小的关系	12
2.3.3 螺距、螺旋直径与液体粘滞系数的关系	13
2.4 实验结论与总结	14
第三章 理论分析	15
3.1 模型假设	16
3.2 模型建立	16
3.3 螺旋角频率	18
3.4 螺旋半径	21
3.5 螺距	24
第四章 数值模拟	25
4.1 计算流体力学简介	25
4.2 数学物理模型	26
4.2.1 控制方程	26
4.2.2 湍流模型	27
4.2.3 两相流模型	28
4.3 几何建模及网格划分	31
4.3.1 几何建模	31

4.3.2 网格划分.....	32
4.4 数值模拟实验现象.....	34
4.4.1 螺旋现象的定性模拟.....	34
4.4.2 螺距、螺旋半径随流体初速度变化的定性模拟.....	38
4.4.3 不同粘性的螺旋形态模拟比较.....	39
第五章 数据分析及讨论.....	41
5.1 实验数据和理论值的比较.....	41
5.2 误差分析.....	44
第六章 总结与展望.....	45
6.1 总结.....	45
6.2 展望.....	46
参考文献.....	47
致谢.....	48
团队成员.....	49
指导老师.....	50
学术诚信声明.....	51
附录.....	52

第一章 前言

日常生活中普遍存在一种液体螺旋现象，例如在倒牛奶的时候，牛奶在向下流动的过程中会出现螺旋状（如图 1.1）；咖啡从咖啡壶中流出的时候也会出现螺旋状；瀑布在某些情况下也会出现螺旋下落的现象（如图 1.2）。这一有趣的现象是如何产生的？是哪些因素影响了螺旋的形状？带着这些疑问，我们开展了本项目研究。



图 1.1 牛奶流动中的螺旋现象



图 1.2 瀑布下落时水流的螺旋现象

首先，我们广泛调研了国内外的相关研究。国际上关于有外界干扰下整个液柱呈现螺旋状弯曲的现象研究较多，但关于在无外界扰动情况下，从小孔中自由流出的射流在下落过程中形成的螺旋形变，国际上开展的研究较少。Kubitschek and Weidman (2007)研究了旋转粘性液体射流的螺旋不稳定性[1]，其中液体螺旋形成的机理是液体在从小孔中射出来之前已经被外加的马达施加了旋转力。Jens Eggers and Emmanuel Villiermaux (2008)在一篇名为“Physics of Liquid Jets”的综述论文中[2]，也提到了外加声场的射流螺旋现象，但主要介绍了声场对于螺旋的影响，并未开展螺旋形成机理研究。

为了探究完全没有外加干扰情况下旋涡的产生机理，麻省理工学院的 Ascher Shapiro 教授于 1962 年开展了实验研究[3]，证明了在没有任何外界扰动情况下，北半球的漩涡为逆时针，也就证实了漩涡产生的原因为科里奥利力，结束了长达半个时间的争论；1965 年，悉尼大学的 Trefethen 教授等人在南半球重复了该实验[4]，证明在没有任何外界干扰情况下，漩涡为顺时针，进一步

证实了科里奥利力是产生旋涡的原因。以上两篇论文均发表在 Nature 上[3-4]。此后, Jone and Alexander (2004) 研究了层流射流碰撞所产生的类似螺旋状的结构流体链和鱼骨[5], 其机理是两个足够大雷诺数的高速液体在碰撞时受到惯性和表面张力影响。

但是, 上述研究均只研究了液体旋涡扭转的方向, 而针对无外界扰动的从小孔中自由流出的液体, 在垂直下落过程中自身产生的螺旋扭转现象, 其形成机理还不清楚, 影响螺旋形态(如螺距、旋转速度、螺旋直径等)的因素有待于深入研究。

为了详细解释液体螺旋扭转产生的机理并探究影响螺旋形态的因素, 我们制定了详细的研究方案。首先通过反复试验找出能够形成螺旋的物理条件, 通过改变试验参数研究这些条件对于螺旋形态的影响规律; 然后从能量守恒和通量守恒的角度推导了螺旋角频率的计算公式, 从而得出螺距和螺旋直径的计算方法; 最后利用 CFD 软件 ANSYS Fluent 对这一现象进行了数值模拟。本文试图通过以上三种不通的方法对液体螺旋现象进行解释和探究, 并相互验证。具体研究思路如图 1.3 所示。



图 1.3 研究线路图

第二章 实验探究

本章基于具有初速度的射流通过小孔时形成的螺旋，进行螺旋直径、螺距的数据测量。并对所有实验结果进行数据分析，指导理论分析。

2.1 实验设计

根据前期预实验，我们发现：1) 螺旋的形成与小孔的形状关系很大，液体从圆形或者正方形的小孔流出是无法形成螺旋的；2) 螺旋的形成需要足够的初速度，也就是出口处的压强要足够大；3) 液体的粘度直接影响了螺旋的形状。因此，本实验的基本思路，是通过调控液体的压强、孔径和粘度来探究螺旋的形状。

为了方便取材并节约资源，我们巧妙的设计了一个实验装置，利用一个常见的塑料量筒作为液体容器，在其底部开孔，并利用电烙铁和热熔胶将不同尺寸的小孔焊接在量筒底部。通过控制量筒内初试液柱高度来调控液体压强；通过焊接不同尺寸的小孔来调控小孔参数；通过将蓖麻油加热来调控液体的粘度。

实验过程中，我们首先堵住容器下端小孔，将特定液体倒入量筒至一定的高度，待液体平静后打开小孔，让液体自然流出，并利用高速相机拍摄不同高度下螺旋的形态，并利用刻度尺测量螺距和螺旋直径。

在探究压强和小孔尺寸的变化实验中，为了节约成本，我们选用了自来水作为研究对象；在探究粘度变化的实验中，我们选择了粘度随温度变化明显的蓖麻油作为研究对象。

2.2 实验准备

2.2.1 实验器材

内径 5.9cm，外径 6.3cm，高为 42cm 的透明塑料量筒作为盛水装置；铁架台；不同孔径的小孔；刻度尺、细管等。自来水、粘滞系数随温度变化明显的蓖麻油液体。如图 2.1 所示。



(a) 容器量筒与铁架台



(b) 蓖麻油

图 2.1 实验器材

2.2.2 3D 建模与打印

我们利用 SOLIDWORKS 建模软件建立了不同孔径的模型，如图 2.2 所示。设计了长度相同、宽度不同的小孔若干；长度不同，宽度相同的小孔若干，小孔参数如表 2.1 所示，建立了如图 2.3 所示的底部为等腰梯形的柱体小孔。

本项目采用的 3D 打印机名称为 Raised-E，喷嘴直径 0.4mm，型号为 XD1134，使用的材料为工程塑料 ABS。

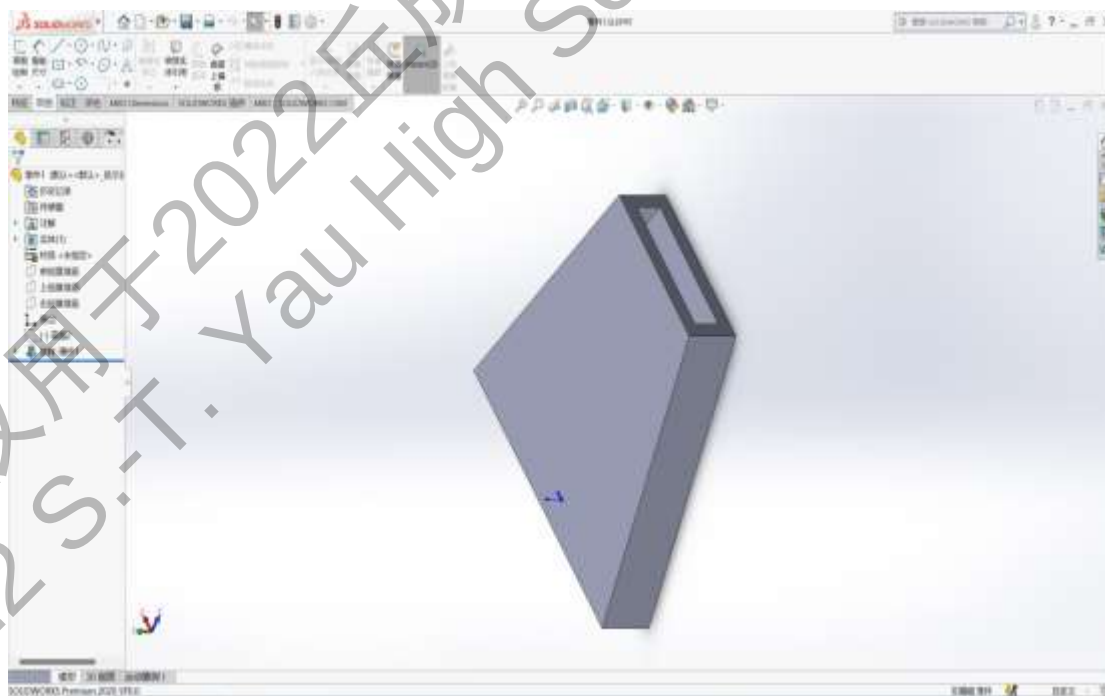


图 2.2 SOLIDWORKS 界面

表 2.1 小孔参数

小孔编号	孔径长度 a (mm)	孔径宽度 b (mm)
#1	10	1
#2	10	2.5
#3	10	2
#4	10	3
#5	10	4
#6	3	1
#7	5	1
#8	7	1
#9	9	1
#10	11	1



图 2.3 3D 打印的小孔

2.3 实验过程与数据收集

我们将打印好的小孔用电烙铁和热熔胶焊接在圆筒容器底部进行实验。

首先，将圆筒固定在铁架台上，将液体倾倒在容器中，待液体静止后释放。

利用该实验装置，我们进行了不同压强、孔径、流体种类的实验探究，记录了螺旋直径和螺距的数据。

需要测量的数据包括：流体垂直下落过程中形成的螺旋直径、螺距的大小以及流体的流速。对于螺旋直径和螺距的大小，将尺子固定在容器下方，使零刻度线与小孔开口位置平齐，并通过照相机来捕捉不同条件下形成的螺旋，运用视频分析的方法在较小的时间间隔内记录运动行为，并收集数据；对于流体的流速，由于每张图片的曝光时间越短，测量结果就越精确，但曝光时间过短会造成曝光量的降低，因此需要大功率光源进行照明才可能获得好的实验结果，所以利用高速摄像机（如图 2.4 所示）和补光灯，并在高速摄像机 120fps 的帧率的精度下，在照片中追踪碳粉的轨迹，通过计算确定流体的流速，以此确保实验结果的精确度。



图 2.4 高速摄像机

2.3.1 螺距、螺旋直径与流体初速度的关系

我们通过控制不同高度释放水流来控制出口处压强，观察到水流经过小孔后产生了周期性的螺旋状形态，并记录了产生的螺距和螺旋直径的数据。

控制液体释放高度不同，来设置不同梯度的流速。同时控制流体种类相同（水），孔径大小相同（2mm*10mm）。多次实验，拍照捕捉螺旋，测量螺距与螺旋直径，取得平均值，并通过高速摄像机测得流速。现象如图 2.5 所示。测量得

到实验数据如表 2.2 所示。初步可以看出，螺距随着流体流出小孔的初速度的增大而增大，螺旋直径随着流体流出小孔的初速度的增大变化不明显。

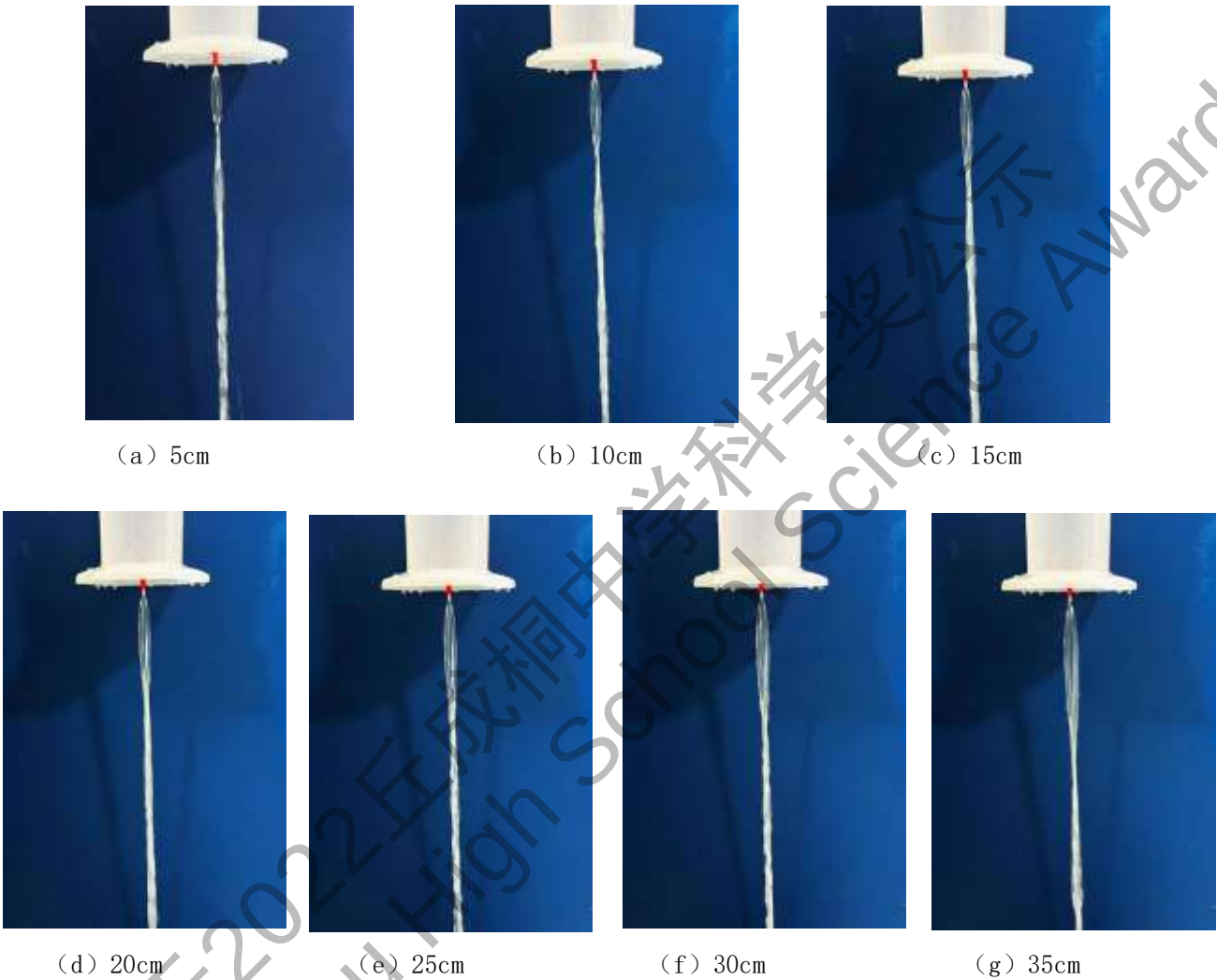


图 2.5 不同液柱高度下水形成的螺旋形态

表 2.2 不同液柱高度的测量数据

实验组编号	液柱高度/cm	初速度/ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	螺距/mm	螺旋直径/mm
A	5	1.400	34.0	1.0
B	10	1.875	43.0	1.1
C	15	2.350	48.0	1.0
D	20	2.695	61.0	1.0
E	25	2.775	65.0	1.2

F	30	3.025	70.0	1.1
G	35	3.150	71.0	1.0

2.3.2 螺距、螺旋直径与孔径大小的关系

接下来，我们控制压强相同（液面高度为 30cm），流体种类相同（水），底部孔径大小不同，即分别改变底部小孔的长和宽，测量流体形成螺旋直径，螺距与孔径的关系。实验现象如图 2.6 所示。

我们先控制孔的宽度相同，为 1mm，改变孔径的长度，我们共做了若干组实验（长度分别为 2mm 至 11mm），分别多次测量取平均值。我们观察到，当底部孔径长度越长时，螺旋直径和螺距越大。实验数据表格如表 2.3 所示。

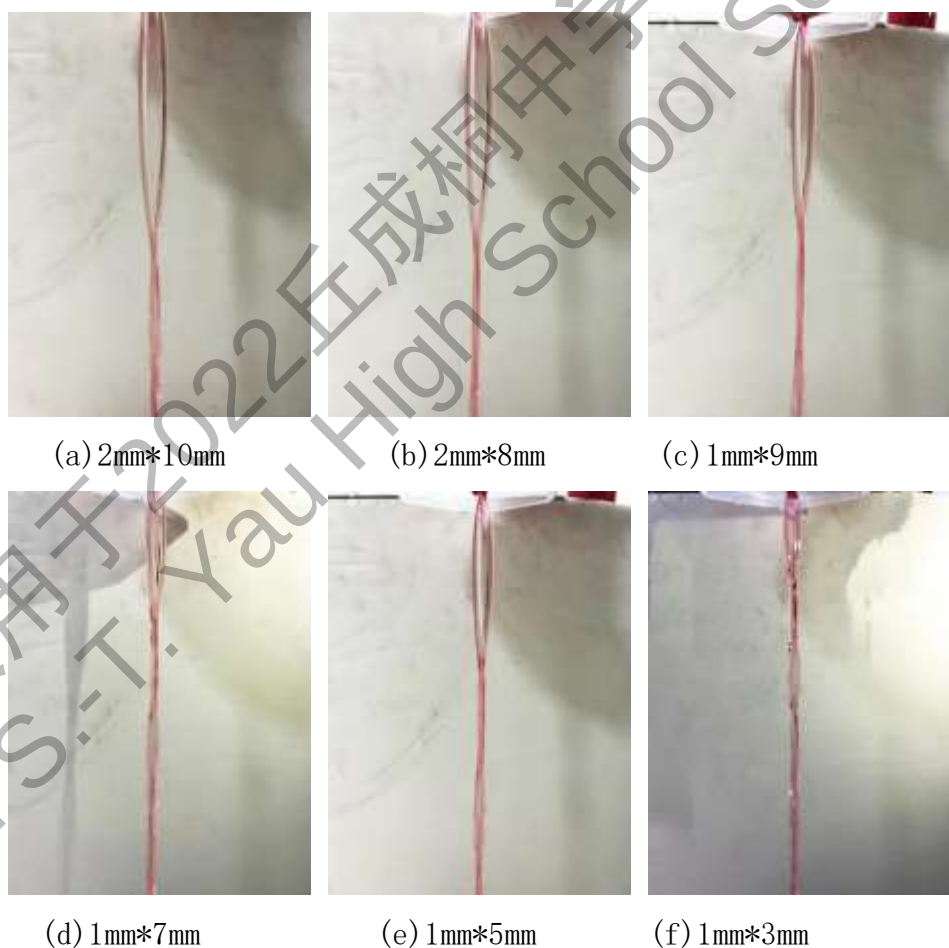


图 2.6 不同孔径下水形成的螺旋形态

我们再控制孔的长度相同，为 10mm，改变孔径的宽度，我们做了若干组实验（宽度分别为 2mm、2.5mm、3mm、4mm），分别多次实验取平均值。我们观察到，当底部孔径宽度越宽时，螺距越大，螺旋直径有变小的趋势。实验数据表格如表 2.4 所示。

表 2.3 不同孔径长度的实验数据

实验组编号	孔径长度 a/mm	孔径宽度 b/mm	螺距/mm	螺旋直径/mm
A	3	1	13.0	3.0
B	5	1	20.0	5.0
C	7	1	33.0	6.0
D	9	1	40.0	7.0

表 2.4 不同孔径宽度的实验数据

实验组编号	孔径长度 a/mm	孔径宽度 b/mm	螺距/mm	螺旋直径/mm
A	10	2	26.5	10.0
B	10	2.5	28.0	9.0
C	10	3	30.5	8.5
D	10	4	32.5	7.8

2.3.3 螺距、螺旋直径与液体粘滞系数的关系

最后，我们探究螺距、螺旋直径与液体粘滞系数的关系。由于蓖麻油的粘度随温度变化敏感，所以我们选择将蓖麻油加热到不同温度，改变其粘滞系数进行实验。控制压强相同，底部孔径大小相同，液体粘滞系数不同（通过改变蓖麻油的温度，得到不同的粘度系数），我们做了若干组实验，分别多次测量取平均值。我们观察到，当液体粘度系数越小时，螺旋直径、螺距越大。实验数据表 2.6 所示。

表 2.6 实验数据-粘滞系数不同

实验组编号	温度/℃	粘度系数/Pa · s	螺旋直径/mm	螺距/mm
A	20	0.99	3.0	12.0
B	25	0.60	4.0	38.0
C	30	0.45	7.0	45.0
D	35	0.31	10.0	56.0
E	40	0.23	10.0	59.0
F	45	0.15	11.0	63.0
G	50	0.06	12.0	68.0

2.4 实验结论与总结

本次实验我们主要利用圆筒状容器和不同孔径的小孔作为实验装置,通过控制 3 个变量(流体压强、小孔孔径、流体粘度),设计了三组不同的实验,探究不同变量与螺旋形态(螺距、螺旋直径)的关系。

通过实验数据分析,我们得到以下结论:

- 1) 在小孔孔径和流体种类不变的情况下,流体压强越大,流体所产生的螺距和螺旋直径越大。
- 2) 在流体所受压强和流体种类不变的情况下,小孔孔径长越大,流体产生的螺距和螺旋直径越大。但当小孔宽度变宽时,螺距长度越大,而螺旋直径有变小趋势。
- 3) 在流体所受压强和小孔孔径不变的情况下,流体粘滞系数越小,流体产生的螺距和螺旋直径越大。

本实验的优点如下:

- 1) 小孔尺寸精度高。采用 3D 打印技术制作小孔,可以精确控制小孔的尺寸,并能根据需要打印数目很多的小孔,实验数据丰富。

- 2) 液体流速的测量较为精确。我们利用高速摄像机精确比对流体流速，用刻度尺等比例比对，测量结果精确。同时，我们通过多次测量取得平均值，减小实验偶然误差。
- 3) 对于压强的控制较对于初速度的控制更具有现实参考意义。我们认为直接影响螺旋形态的是射流流出小孔的初速度。但由于实验中初速度影响因素过于复杂，难以控制，且较初速度，控制压强更具有现实意义，故我们考虑将自变量由初速度变为压强进行实验，在采集数据时将初速度测量出来。
- 4) 利用蓖麻油对温度的敏感性来设置不同流体粘滞系数梯度，具有一定的创新性。

本实验的缺点主要是流速测量具有一定误差。我们利用视频分析在较小的时间间隔内记录运动行为，然而相机记录会存在一种不可避免的误差—拖影误差。具体地说，相机每记录一帧图像都需要一定的曝光时间，在这短时间内，物体运动了一段距离，这会对后续捕捉物体位置造成一定的误差范围。

第三章 理论分析

根据 Ascher Shapiro 教授的实验结论，流体在从小孔中流出之前产生旋涡的原因科里奥利力。由于其量级较小，这种偏向在宏观上是难以观测和定量的，引发的极小的初始涡度使水流在小孔处具有一初始极小的角速度，使水流以平动和转动混合的形式运动，并在水流出射小孔后由表面张力增大角速度使得产生宏观现象。

根据实验发现，如图 3.1 和 3.2，对于液体螺旋的形态和运动状况，我们必须且仅需描述和讨论螺旋的角速度、螺距和螺旋半径。螺距指液体螺旋从一个波峰到下一个波谷平动运动的长度，记为 λ ；螺旋半径 r 为螺旋在观测方向上的波峰处的长度。为方便解释螺旋的特征，接下来将逐一说明所需参数和基本假设。

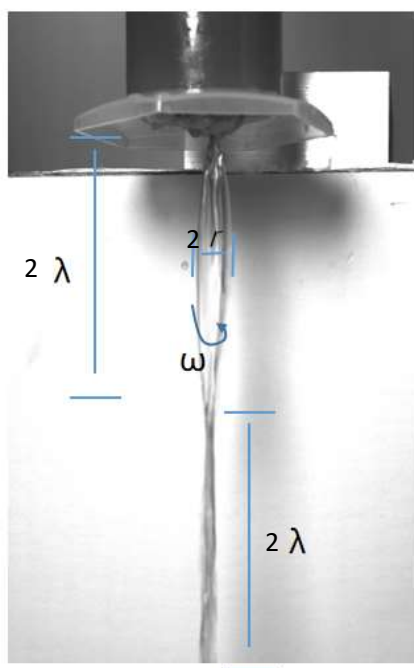


图 3.1 测量参数示意图

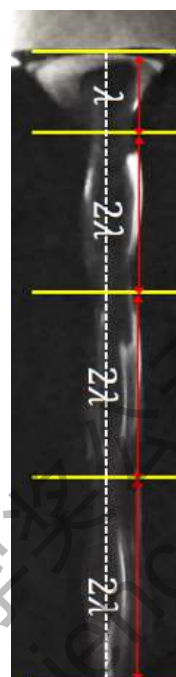


图 3.2 螺距长度示意图

3.1 模型假设

在实际分析中，存在部分不可确定量和小量难以在定量分析中严格地计算，且引起的扰动无法在宏观下观察，偏离了研究的主要方向，不具有实际意义，故在理论分析前考虑并忽略，从而达到简化运算的目的。

假设一：表面张力引起的液膜振动呈简谐振动的模式。

假设二：矩形小孔出水后液滴会收缩成长轴和短轴长不变的椭圆状。

3.2 模型建立

在实验中发现，取液体螺旋的微元部分——液滴——进行研究，通过分析和展示单一液滴的运动形态，建立相关数学模型，分析其振动方式和液体螺旋的基本参数。

如图 3.3，液滴的运动可简化为一个不断循环的过程。初始时，液滴在小孔出口处呈椭圆状，分析液滴上各点处的表面张力，如图 3.4 所示。

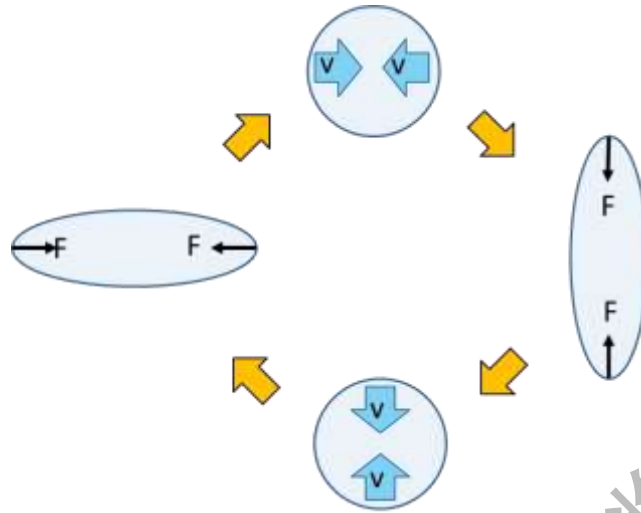


图 3.3 液滴伸张与收缩的边界变化过程

设椭圆焦点为 F ，液滴上一点连接椭圆焦点与水平轴夹角为 α 即为 P ，此点的表面张力为：

$$\text{水平分量为 } f_x = \sigma \cdot \Delta l_x = \sigma \cdot \Delta l \cos \alpha \quad (3.1)$$

$$\text{垂直分量为 } f_y = \sigma \cdot \Delta l_y = \sigma \cdot \Delta l \sin \alpha \quad (3.2)$$

以液滴呈圆形时的各点位置为表面力的相对零点，设与圆心相连与水平轴夹角为 α 即为 P_0 ，若 $FP \leq FP_0$ ，在接下来的 Δt 内， P 点向 P_0 点运动，相对表面张力为原表面张力的反向；若 $FP \geq FP_0$ ，在接下来的 Δt 内， P 点向 P_0 点运动，相对表面张力的方向不变。

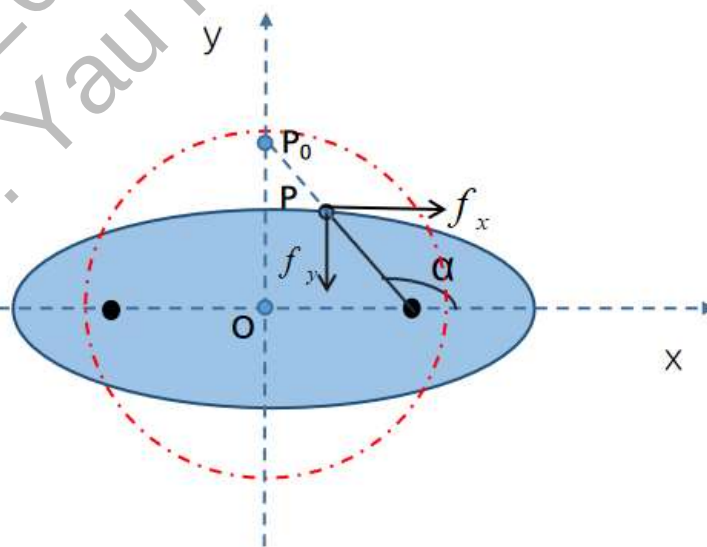


图 3.4 液滴各点表面张力受力示意图

由于液滴边界在 x 轴上的顶点作简谐振动，类比弹簧振子的运动可知，液滴边界点的运动具有周期性，且具备波峰和波谷两个特殊状态——表面张力最大、动能为零。又因当液滴呈圆形时处于稳定状态，则圆形与 x 轴的交点为振子的平衡点，此时不受表面张力，则波峰和波谷两点关于平衡点对称。如图 3.5，记平衡点为 O' ，初始状态时椭圆左顶点为 A 运动到波峰态，上顶底为 B 运动到波谷，半个周期后，左顶点记为 A' 处于波谷，上顶点记为 B' 处于波谷。

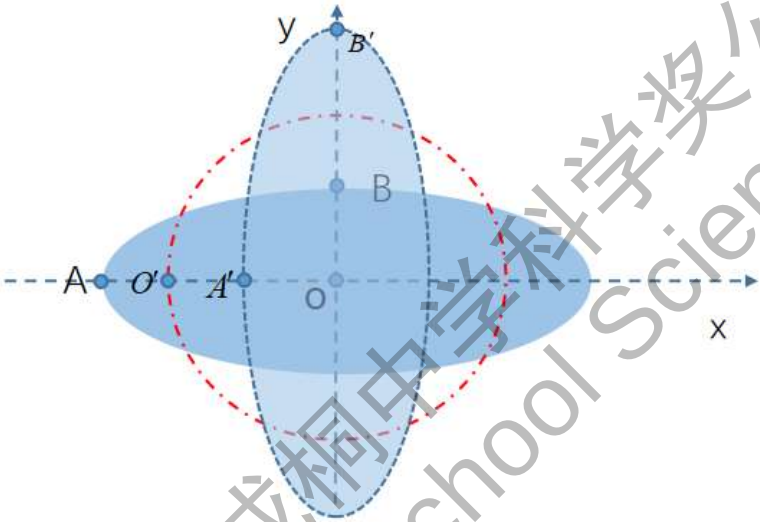


图 3.5 液滴振动个点示意图

为更加简便直观地进行理论研究，接下来设定使用各字母来表示将要使用和计算的变量和参数，如下表所示。

表 3.1 主要符号对照表

符号	符号含义	单位	符号	符号含义	单位
ω	角速度	rad/s	E	振动能	W
λ	螺距长度	m	ρ	液体密度	kg/m ³
d	螺旋半径	m	a	孔长	m
μ	粘滞系数	cp	b	孔宽	m
σ	表面张力系数	N/m	z	距离出孔高度	m
Q	截面单位流量	m ³ /s	Re	雷诺数	1
P	液体压强	Pa	A	振幅	m
φ	相位	rad	v_0	出口流速	m/s

3.3 螺旋角频率

目前已知其振动形式为简谐，则确定其周期大小尤为重要，接下来我们通过求解螺旋的角频率从而确定其运动周期，同时表现其转动角速度。

为简化振动微分方程，转变坐标系使得 O' 为坐标系的坐标原点，如图 3.6 所示：

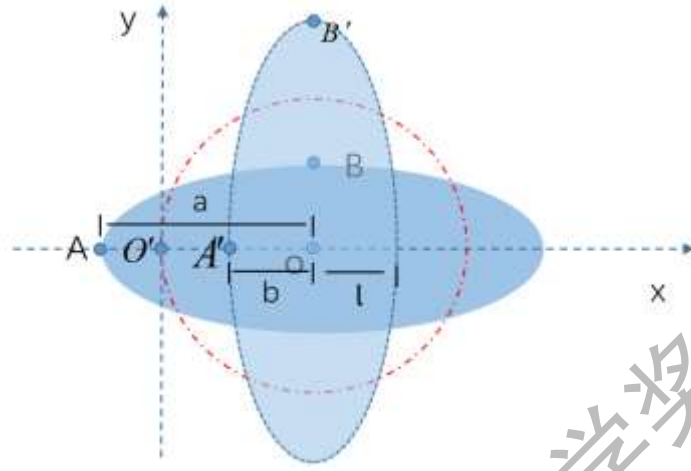


图 3.6 几何参量定义示意图

由简谐振动可知，振动方程为：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.3)$$

其中， k 为弹性系数， m 是振子质量， x 是振子位移，可以解出位移通解：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4)$$

代入边界

$$x_{t=0} = -O'A \quad (3.5)$$

$$A = O'A \quad (3.6)$$

最终解得

$$x = -O'A \cos \omega t \quad (3.7)$$

由于液滴振动的本质在于表面能与各点总动能的相互转化，因在一截面上无重力做功，由能量守恒可知：

$$E_\sigma + E_k = \text{const} \quad (3.8)$$

其中 E_σ 为表面能， E_k 为总动能。

记 $E = E_\sigma + E_k$ 为此振动所具备的总能量振动能。

通过表面能和动能的定义可知：

$$E_{\sigma} = \sigma S_t \quad (3.9)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int v^2 dV \quad (3.10)$$

则将 (3.9)、(3.10) 代入, 可得:

$$E = \sigma S_t + \frac{1}{2} \rho \int v_t^2 dV \quad (3.11)$$

其中, S_t 为时间 t 时的单位体积的表面积, v_t 为时间 t 时的速度。

根据振子的运动状态和弹性系数, 可知:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (3.12)$$

由振动角频率的定义知:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.13)$$

取动能为 0 时 A 的表面能代入, 将椭圆半长轴记为 a , 半短轴记为 b , 截面上单位体积的厚度为 $\Delta \varepsilon$, 得到:

$$m = \rho \pi a b \Delta \varepsilon \quad (3.14)$$

$$S_t = (2\pi b + 4(a - b)) \Delta \varepsilon \quad (3.15)$$

结合 (3.11) (3.12) (3.13), 得到 (3.16),

$$\omega^2 = \frac{2\sigma(2\pi b + 4(a - b))}{\rho \pi a b O'A^2} \quad (3.16)$$

关于挖掘 a 、 b 和 $O'A$ 的关系来简化上述公式, 由简单的几何知识可知:

$$OA = OB' \quad (3.17)$$

$$OB = OA' \quad (3.18)$$

$$OO' = l \quad (3.19)$$

$$a - b = 2l \quad (3.20)$$

代入化简，

$$\omega^2 = \frac{16\sigma}{\rho\pi} \cdot \frac{\pi b + 2a - 2b}{ab(a^2 + b^2 - 2ab)} \quad (3.21)$$

考虑粘性影响，将（3.3）修改为：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\mu}{m}\dot{x} = 0 \quad (3.22)$$

振幅随时间变化为：

$$A(t) = Ae^{-\frac{\mu t}{2\pi a(t)b(t)}} \quad (3.23)$$

解得考虑粘性的角频率为：

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\mu}{2S}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{16\sigma}{\rho\pi} \cdot \frac{\pi b + 2a_0 - 2b_0}{a_0 b_0 (a_0 - b_0)^2}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{2\pi ab}\right)^2} \quad (3.24)$$

根据上式，显然螺旋的转动角频率仅与液体密度、粘性和孔的尺寸有关。角频率分别与液体粘性和液体密度呈正比和反比关系，而与孔的几何特征无明显的比例关系，与长轴 $2a$ 呈正相关，与短轴 $2b$ 呈负相关；同时，角频率与时间和下落的位置无关。

此参数作为频率并不能在实验中直接测量，也没有完全表征液体螺旋的几何形状，而是作为中间体过渡辅助计算螺旋的螺距和长度。

进一步的，可以通过旋转的约束条件来求解 λ 。

3.4 螺旋半径

事实上，实验观测发现，从不同角度观察螺旋时其形态并非完全相同，例如，以矩形孔的长所对的方向为正视图，则正视图与侧视图相差了半个周期，波峰位置对应侧视图的波谷。为了统一计算和表示，我们采取将三维转化为二维平面的

方式，找到所有截面处的最长边定义为该处的螺旋半径并连接，绘制出螺旋半径的位置变化图如图 3.7 所示。

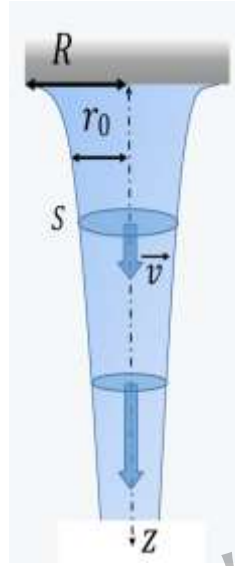


图 3.7 螺旋的螺旋半径示意图

然而，由于液滴下落过程中存在收缩和伸张两个过程，如果某截面处任意方向都不存在波峰，那么此处不存在的理论螺旋半径，且无法实际观察到，所以仅需讨论实际存在的一个螺距内的波峰来验证理论是否适用。

记射流在小孔出口的速度为初始速度 v_0 ，由含粘性的伯努利方程[6]可知，

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w \quad (3.25)$$

其中，

$$h_w = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (3.26)$$

为粘性引起的能量耗散项。

由于射流压强等于环境压强，故

$$p_1 = p_2 \quad (3.27)$$

代入

$$z_1 = 0, \quad (3.28)$$

$$z_2 = z, \quad (3.29)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (3.30)$$

其中， z 是螺旋距离出水孔的长度。

考虑 (3.30) 中 v 、 d 为过程量，即：

$$v = v(z) \quad (3.31)$$

$$d = d(z) \quad (3.32)$$

其中， d 是椭圆的特征长度：

$$d(z) = \frac{\pi a(z)b(z)}{2\pi b(z) + 4a(z) - 4b(z)} \quad (3.33)$$

代入 (3.25)，化简得到下方方程：

$$z + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2(z)}{2g} - \frac{32\mu}{\rho g} \int_0^z \frac{v(l)}{d(l)} dl \quad (3.34)$$

考虑位置为 z 处截面，由于水流并未在流动过程中损失，所以单位时间内通过截面的流量为常数，与位置无关，故：

$$Q = v_0 \cdot 4ab = v_{(z)} \cdot \pi ab \quad (3.35)$$

由于

$$t = \int_0^z \frac{dz}{v(z)} \quad (3.36)$$

将 (3.23) 转换自变量得到：

$$A(t) = Ae^{-\frac{\mu \int_0^z \frac{dz}{v(z)}}{2\pi a(t)b(t)}} \quad (3.37)$$

由于简单的几何关系

$$a(z) - b(z) = 2A(z) \quad (3.38)$$

代入 (3.35) 解得：

$$4v_0 a_0 b_0 = \pi v a \left(a - 2A_0 e^{-\frac{\mu \int_0^l \frac{1}{v(l)} dl}{2\pi ab}} \right) \quad (3.39)$$

由此公式可以得到螺旋半径与初始流出小孔孔径的长、宽、射流初速度和流体粘滞系数相关。螺旋半径与流体初速度、小孔孔径的长呈正相关关系，和小孔孔径宽、流体粘滞系数呈负相关关系。我们可以通过宏观的螺旋半径变化得到角频率的变化。

3.5 螺距

根据上述一开始对螺距的定义可知，螺距长度等于液体螺旋运动四分之一周期移动的距离，相当于液体螺旋角频率从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 内移动的长度。

如图 3.8 所示，为更直接的定量积分，将角频率的改变量等效为相位余弦分别为 0 和 1 之间部分的积分。

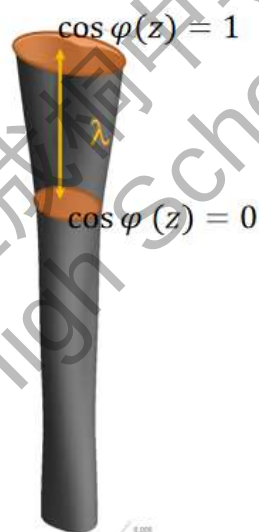


图 3.8 液体螺旋相位改变点示意图

采取构建关于螺旋相位的方程来求解螺距。

根据相位定义，

$$\Delta\varphi = \omega' \cdot \Delta t \quad (3.42)$$

为求解螺距，可以用长度作为积分变量来替代时间。对四分之一周期内角频率积分得：

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\frac{T}{4}} \omega' dt = \int_0^{\lambda} \omega' \frac{dt}{dz} dz \quad (3.43)$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{\pi}{2} \quad (3.44)$$

螺距与出口速度成正比，即当初速度增大时，螺距增大，可以与现实中相同周期、速度越大，经历的距离越长做类比，与基本常识的趋势相符合。螺距与角频率呈现反相关关系，即随着角频率增大而减小——然而实际实验中角频率并非基本变量，而是由液体粘滞系数和小孔几何约束决定的相关量。

第四章 数值模拟

为进一步研究小孔射流的螺旋变形形成过程，本文利用计算流体动力学方法（Computational Fluid Dynamics, CFD）对这一现象进行了数值模拟，定性分析主要边界参数对小孔射流螺旋变形的影响规律。

4.1 计算流体力学简介

CFD 方法是近代流体力学、数值数学和计算机科学结合的产物，是一门具有强大生命力的交叉科学。它是将流体力学的控制方程中积分、微分项近似地表示为离散的代数形式，使其成为代数方程组，然后通过计算机求解这些离散的代数方程组，获得离散的时间/空间点上的数值解。

本研究以 CFD 软件 ANSYS Fluent 作为求解器。一般将使用 CFD 软件对工程问题进行模拟仿真计算的基本流程划分为三个步骤，如图 4.1 所示。

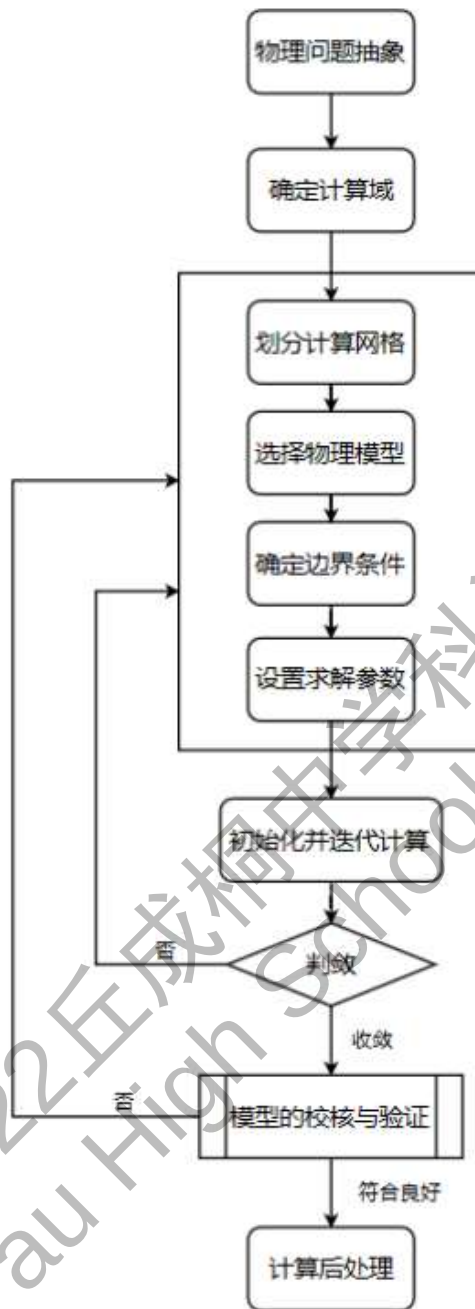


图 4.1 CFD 数值模拟求解流程

4.2 数学物理模型

4.2.1 控制方程

流体的流动过程必定遵循质量、动量、能量守恒的三大守恒定律，与三大守恒定律相对应的控制方程就构成了流体力学的三大基本守恒方程。

(1) 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho U) = 0 \quad (4.1)$$

(2) 动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u U) &= \text{div}(\eta \text{grad} u) + S_u - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v U) &= \text{div}(\eta \text{grad} v) + S_v - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w U) &= \text{div}(\eta \text{grad} w) + S_w - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

式中： ρ 为密度，单位为 kg/m^3 ； div 表示散度； grad 表示梯度， η 为流体动力粘度，单位为 $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ； S_u ， S_v ， S_w 为广义源项，表达式为

$$\begin{aligned} S_u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \text{div} U) \\ S_v &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \text{div} U) \\ S_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \text{div} U) \end{aligned} \quad (4.3)$$

(3) 能量守恒方程

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \text{div}(\rho U T) = \text{div} \left(\frac{\lambda}{c_p} \text{grad} T \right) + S_T \quad (4.4)$$

式中： λ 为流体的导热系数，单位为 $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{k})$ ； S_T 为流体的内热源。

由于上述方程有相同的形式，可将其以通用方程形式改写为：

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \phi) = \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad} \phi) + S_\phi \quad (4.5)$$

式中从左到右四项分别为方程的非稳态项、对流项、扩散项和源项。

4.2.2 湍流模型

对 N-S 方程组进行求解，需要求解其中的质量守恒方程以及三个方向上的动量守恒方程，包括三个方向上的速度分量以及压力共计 4 个物理量。虽然理论上 N-S 方程组是一个封闭的方程组，但是直接应用数值模拟方法对其进行求解对计算机的计算能力有极其苛刻的要求，实际应用十分困难。因此发展出了许多湍流求解方法，应用较为广泛的有：大涡模拟 (LES)；雷诺平均 N-S 模型 (RANS)；

分离涡模型（DES）。目前实际应用最多的是雷诺平均 N-S 模型方法，它对时间脉动进行简化处理，可以有效地降低求解过程中的计算量。公式（4.6）即时均化的 Reynolds 方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i' u_j'}) + S_i \quad (4.6)$$

其中 $-\overline{\rho u_i' u_j'}$ 为描述湍流的脉动的雷诺应力项，求解时需基于湍流模型对该项进行简化假设和处理。本研究的湍流模型采用 7 方程 Reynolds Stress 模型。该模型是目前数值模拟结果与实际物理解符合度最高的雷诺平均 N-S 模型。该模型在简化涡粘假设时仍保持各向异性，因而对于较为复杂的三维流体流动适用性较好。但是使用该模型进行求解计算时对计算机的核心处理器和内存要求都比较高，计算时间长，而且较难收敛。

4.2.3 两相流模型

考虑到本实验为液体在开放常压空间空气中射流，且两相之间不互溶，是典型的两相 CFD 问题。本研究中重点关注气液交界面的形态演变规律，因此两相流模型选用对气液两相交界面捕捉能力较好的 VOF（Volume of Fluid）模型进行研究。

VOF 模型的基本原理是通过研究网格单元中流体和网格体积比函数 F 来确定自由面，追踪流体的变化，而非追踪自由液面上质点的运动。通过求解一组动量方程并跟踪整个域中每种流体的体积分数，VOF 模型可以对两种或更多种不混溶流体进行建模。典型的应用包括射流破裂的预测，液体中大气泡的运动，溃坝后液体的运动以及任何液-气界面的稳态或瞬态跟踪。

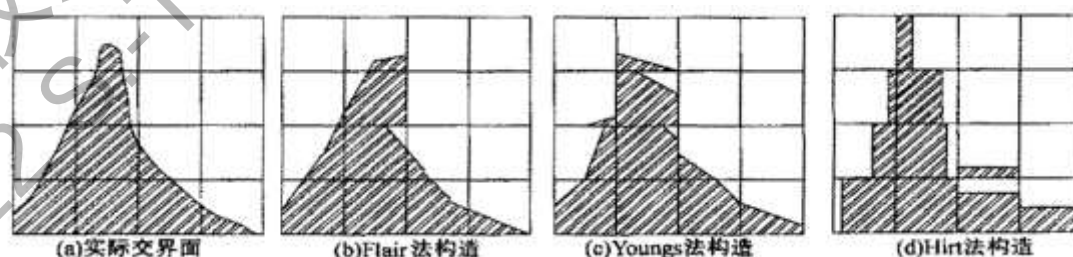


图 4.2 几种常用 VOF 方法构造气液交界面

VOF 方法根据体积比函数 F 来构造和追踪自由面。若 $F=1$ ，则说明该单元全部为指定相流体所占据；若 $F=0$ ，则该单元为无指定相流体单元；当 $0 < F < 1$ 时，则该单元称为交界面单元。假定流场中任意点 (x, y) ，定义函数 $f(x, y, t)$ 如下：

$$f(x, y, t) = \begin{cases} 1, & \text{在}(x, y)\text{点有该相流体质点} \\ 0, & \text{在}(x, y)\text{点无该相流体质点} \end{cases}$$

守恒形式的传输方程表示为：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial uf}{\partial x} + \frac{\partial vf}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

ANSYS Fluent 作为成熟的商业 CFD 软件，已经将上述数学物理模型编码集成在软件中，通过方便的 UI 界面（如图 4-3 所示），可以直接阅读 Fluent 官方给出的对于各个模型的概述和适用场景简介，结合参考书和指导老师的指导，针对本问题建立相应的 CFD 数值模拟模型（如图 4-4 所示），同时设置了流体的物理性质、边界条件等 CFD 求解所需条件。

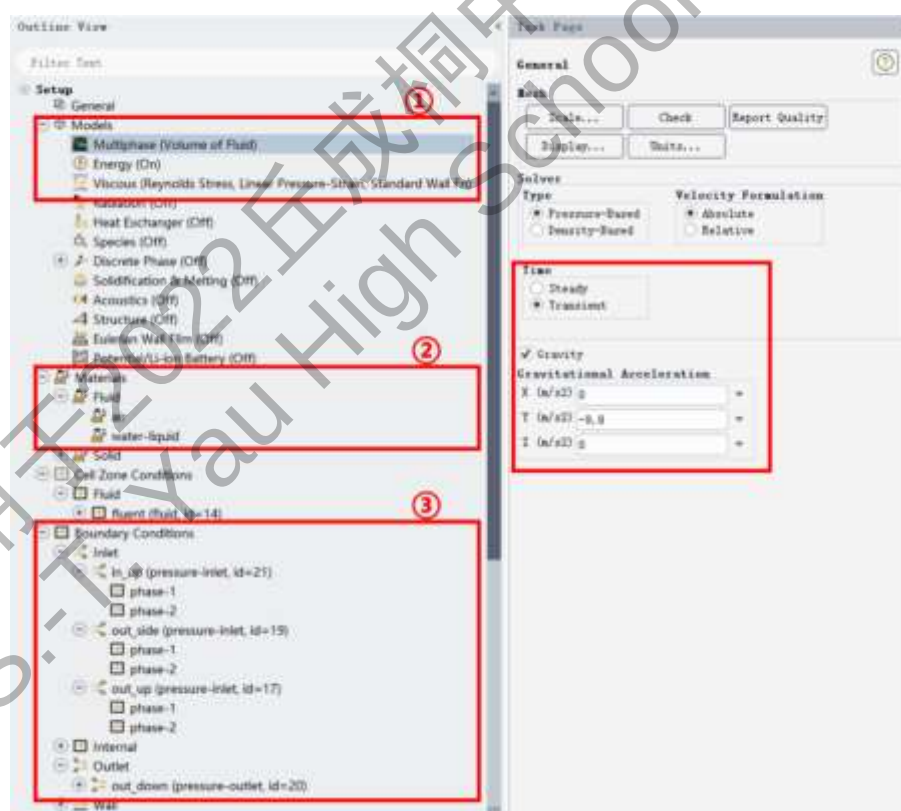


图 4.3 ANSYS Fluent 的 UI 界面展示

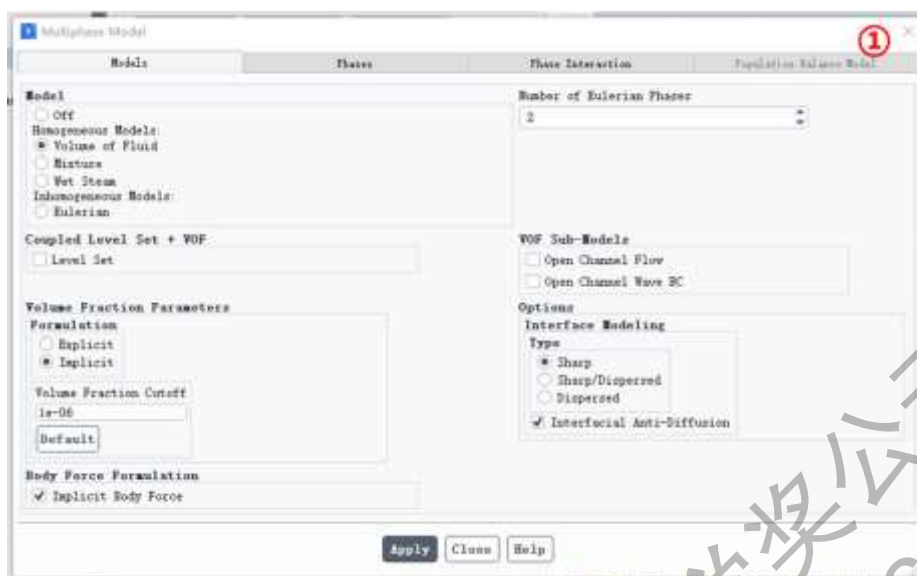


图 4.4(a) ANSYS Fluent 两相流模型选项卡

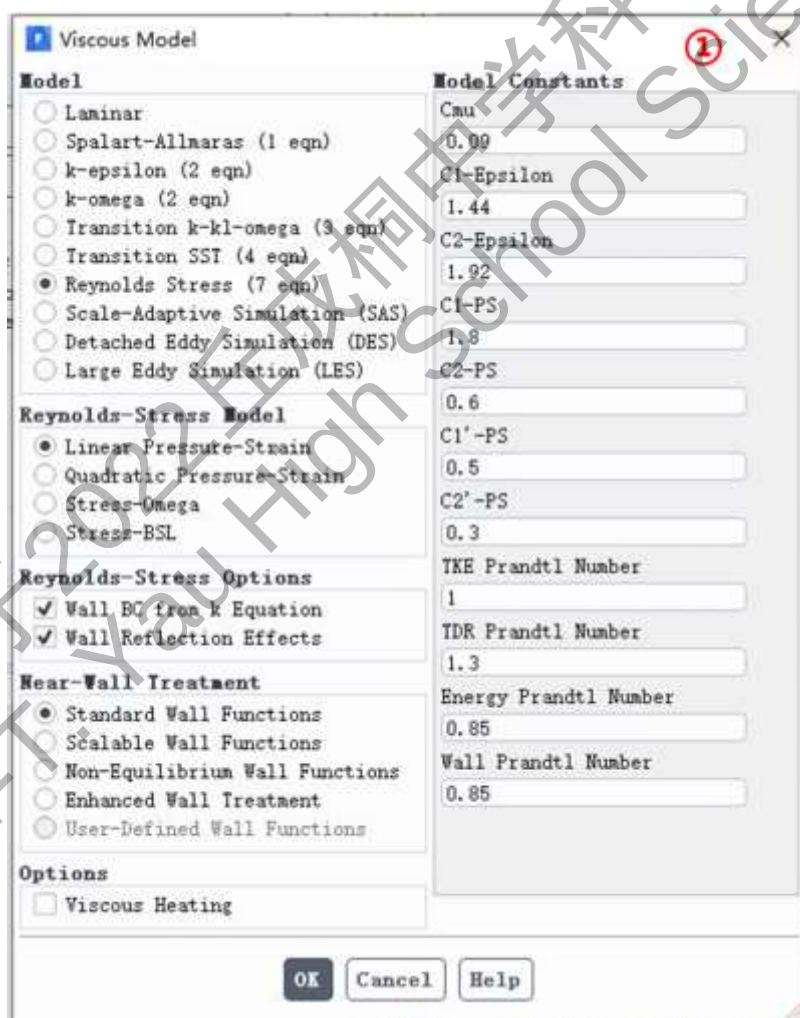


图 4.4(b) ANSYS Fluent 湍流模型选项卡

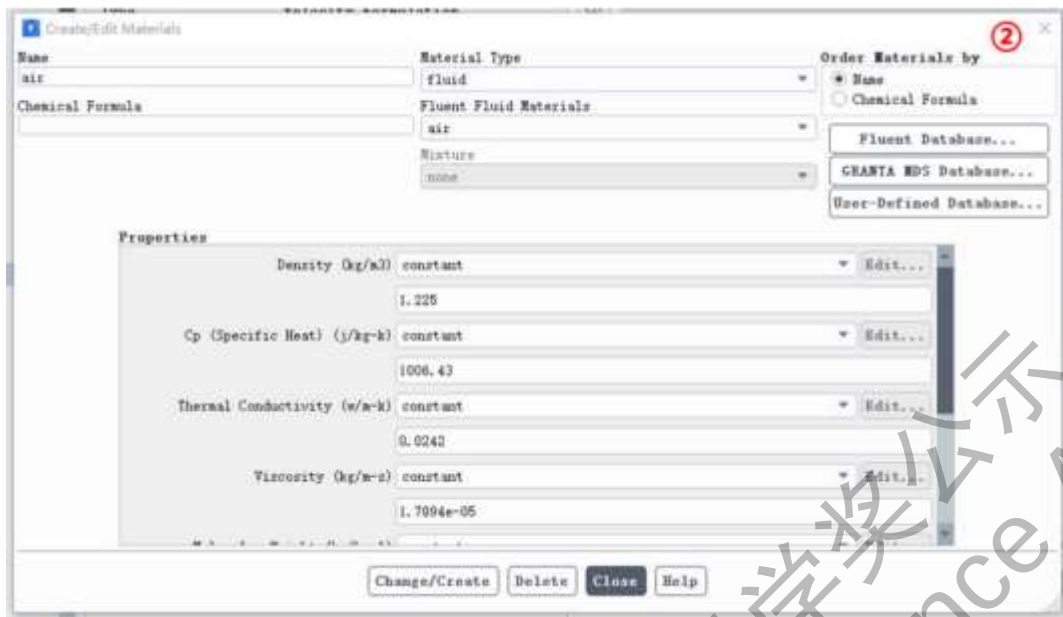


图 4.4(c) ANSYS Fluent 流体（空气）物性设置选项卡

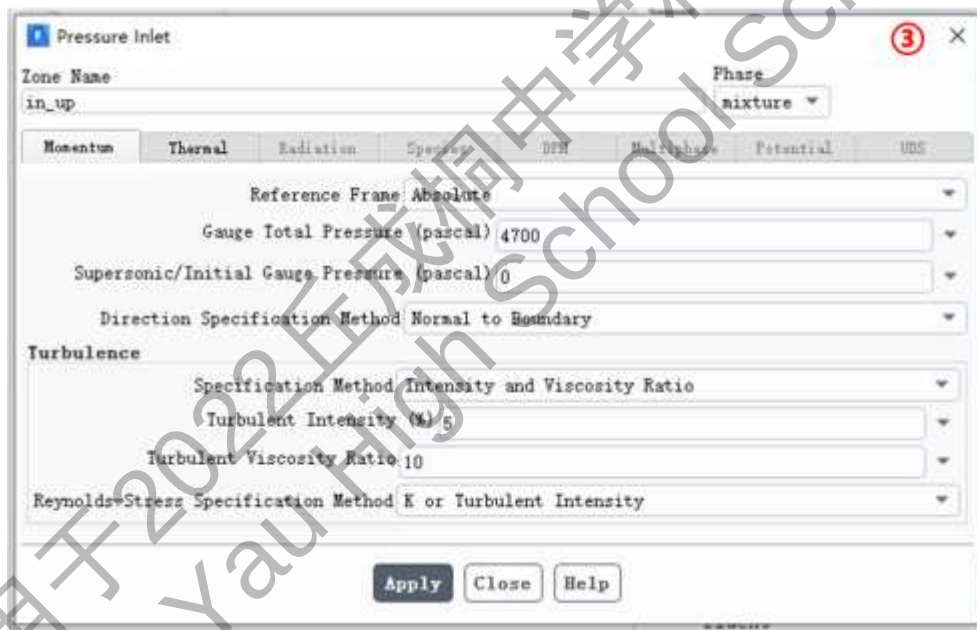


图 4.4(d) ANSYS Fluent 边界条件设置选项卡

4.3 几何建模及网格划分

4.3.1 几何建模

参照第二章所述实验装置，将流体计算域划分为上部自由液面液池、液池底部的梯形泄放口、下部开放常压气体空间等区域，如简图 4.5 所示，其中上部液

池和梯形泄放口的几何尺寸与实验装置完全一致，下部开放常压空间为圆柱体，直径与上部液池一致，高度为所关心的射流长度的 5 倍。

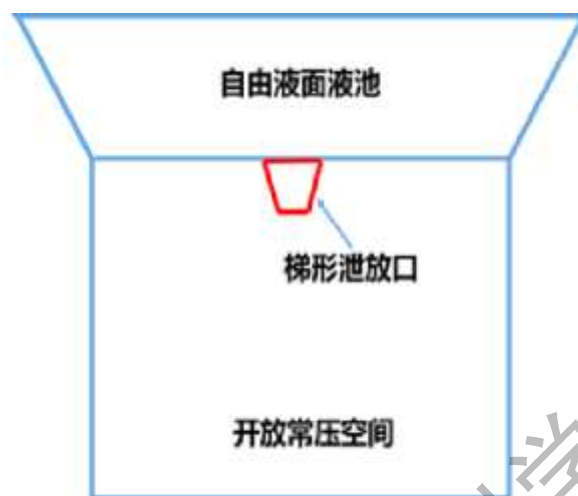


图 4.5 流体计算域示意简图

参照实际实验过程，将上部液池的液面设置为压力进口，工质为单相液体，进口压力根据液体高度计算给出；下部开放常压空间的上边界和侧边界设置为压力进口，工质为单相空气，进口压力为大气压；开放常压空间的下边界设置为压力出口，出口压力为大气压；其余边界均设置为固体边界。

计算过程引入重力加速度，考虑到实际流动的不稳定性，采用瞬态计算方法，由于采用高精度数值模型，时间步长设置为 0.0001s，每个时间步长最大迭代次数 50 次，以提高数值计算的收敛性和准确性。受限于知识理论水平，我们目前对计算流体力学的离散控制方法并没有很准确的认识，因此所有离散控制方法和松弛系数均采用 Fluent 软件给出的推荐方法和默认系数，以提高数值计算的收敛性。

4.3.2 网格划分

使用与 ANSYS Fluent 配套的计算流体力学网格划分软件 ANSYS ICEM 对全计算域进行结构化网格划分。如图 4-6 所示，使用 ICEM 自带的“O”型块划分方法，减少圆柱体边缘的网格变形；对梯形泄放口及近壁面处进行网格加密，以减小壁面带来的计算误差。使用六面体结构化网格的优势在于：可以在提高计算收敛性和准确性的同时，大幅减少模拟所需计算域的网格数量。

最终得到网格数量约为 107 万，如图 4.7 所示，根据 ICEM 自带的网格质量判断器，95%的计算网格质量高于 0.85，使用高密度高质量的计算网格保证了计算结果的准确性。

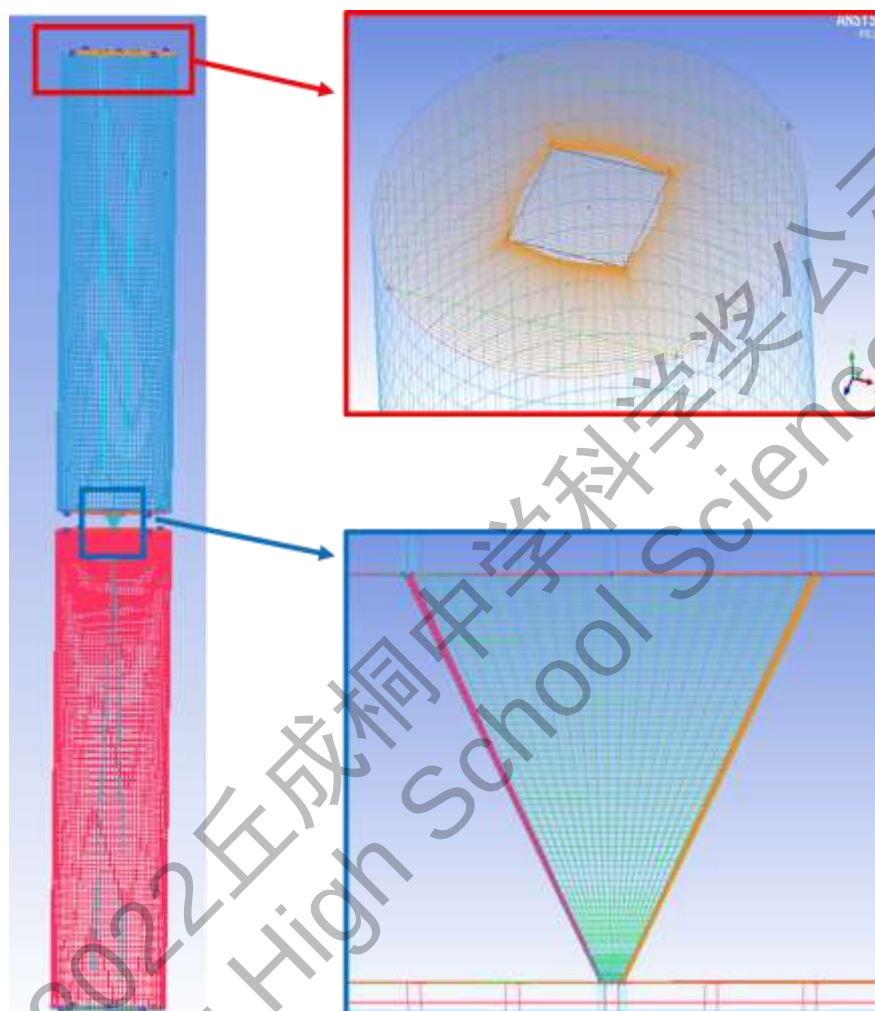


图 4.6 计算域网格划分示意图

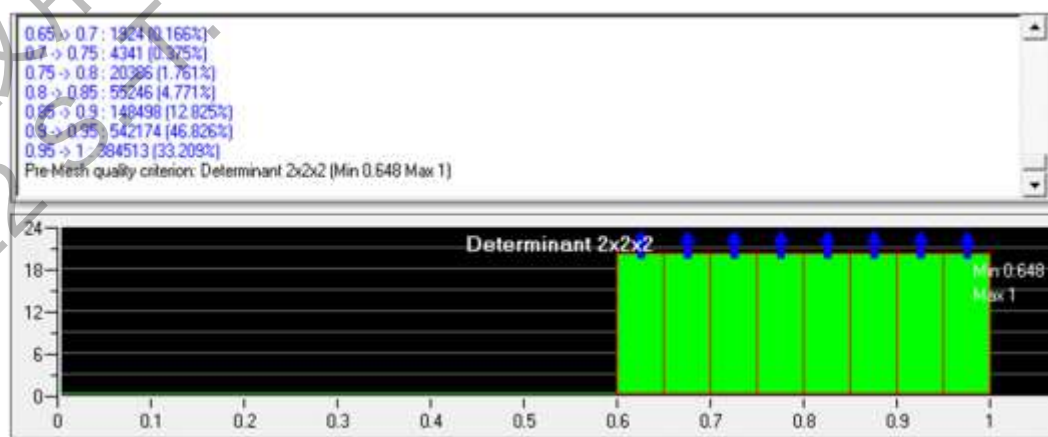


图 4.7 计算网格质量

4.4 数值模拟实验现象

4.4.1 螺旋现象的定性模拟

为了便于分析，我们对 Case1 进行了简化：认为整个过程没有涉及流体温度的变化，因此没有开启能量方程的求解模型，同时还忽略了对水的表面张力的设置。如图 4.8 所示，得到的射流并没有发生螺旋，而是垂直流下。

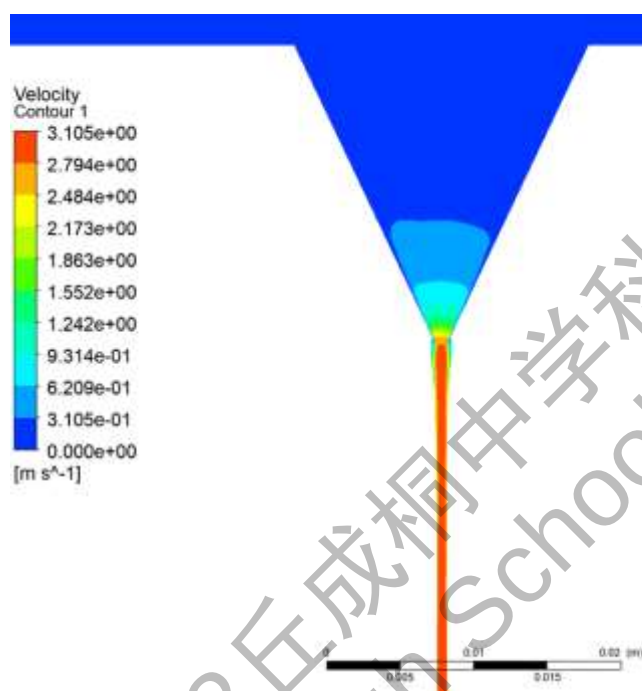


图 4.8 Case1 中心截面流场速度云图

分析流场中心截面的速度流线图（图 4.9）和三维流线图（图 4.10）我们发现：在随机脉动的湍流作用下，水在上部液池内存在横向的涡量（图 4.10），并在射流后表现出来，虽然液柱整体呈垂直下落，但是内部存在略微的水平速度分量（图 4.9）。但是因为没有考虑液体的表面张力，水很快变成了极小的液体弥散在空气中，混合后向四周散开，射流表面形态严重失真。

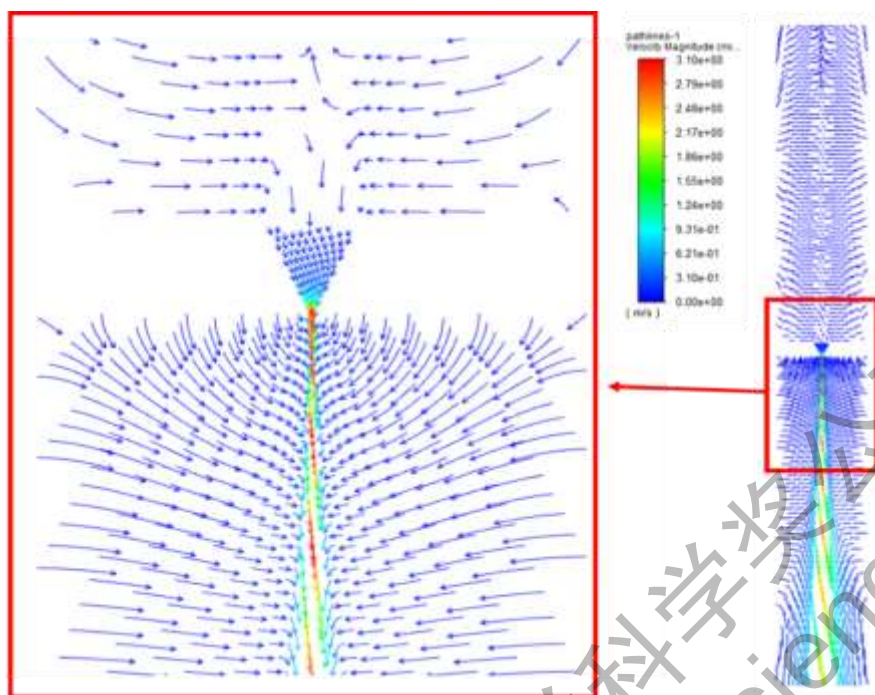


图 4.9 case1 中心截面流场速度流线图

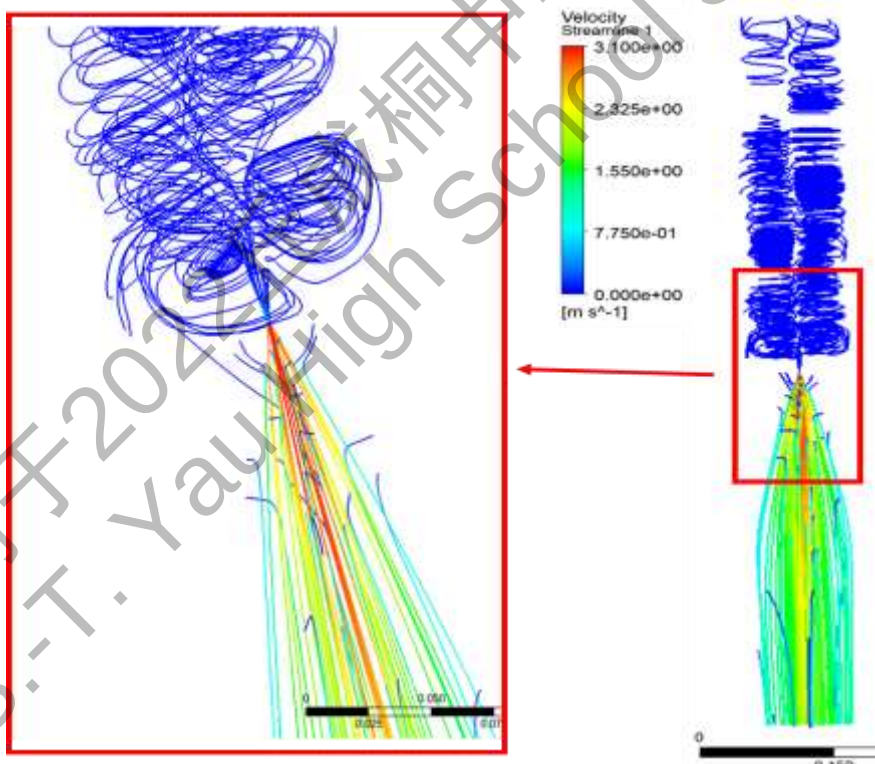


图 4.10 Case1 全计算域三维流线图

经过理论分析，我们认识到在整个运动过程中，每个拉伸水层都在经历表面能与动能相互转化的循环，如图 3.3 所示。想要形成螺旋状的射流，就要拉伸水层进行振荡。因此在 Case2 中，我们激活了能量方程（如图 4.3 所示），查阅资

料并在 VOF 模型的气液两相相互作用中设置了水的表面张力为 0.0728n/m（如图 4.11 所示）。

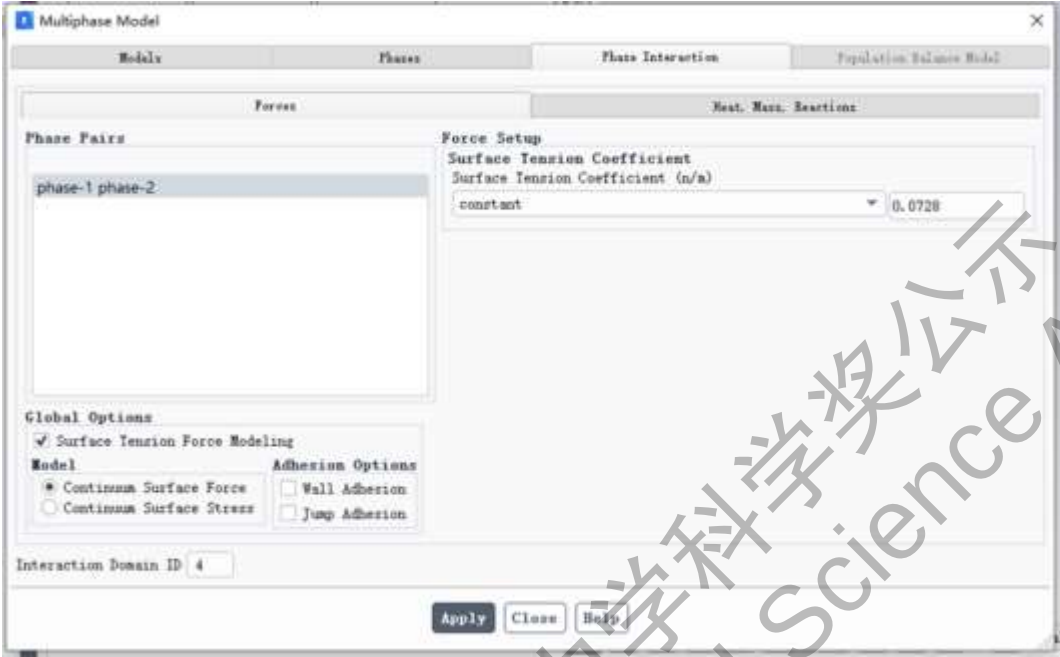


图 4.11 ANSYS Fluent VOF 模型相间表面张力设置选项

修正物理模型后，射流发生了螺旋形变，螺旋形态与实验一致，如图 4-12 所示，第一螺纹偏转角度为 $\frac{\pi}{2}$ ，其余螺纹偏转角度为 π ，随着液体下落，受重力加速度影响，流速增大，螺纹的螺距不断增大。



图 4-12 Case2 射流液面三维形态图

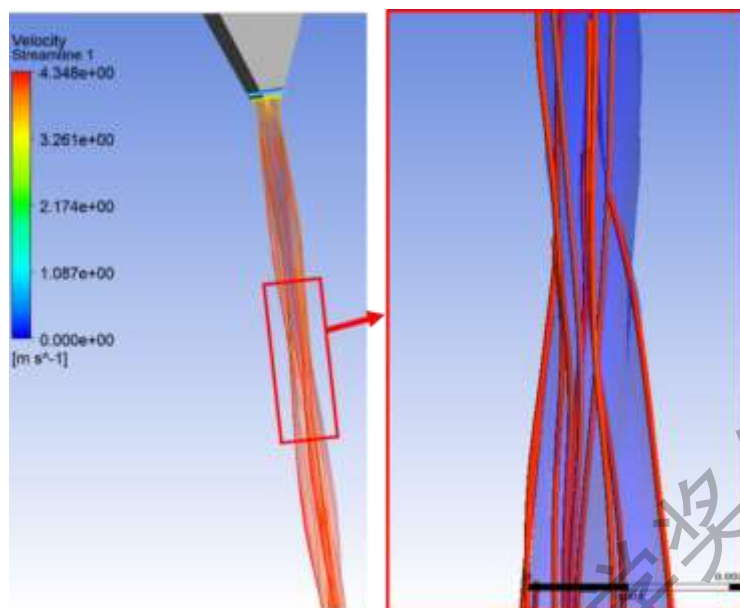


图 4-13 Case2 射流流场三维流线图

使用 ANSYS 配套的 CFD 计算结果后处理软件 CFD-POST，处理得到射流流场的三维流线图，如图 4.13 所示，通过流线可以清晰地观察到流体的旋转形变过程。通过便捷的后处理软件，我们可以观察到计算域内任何一个位置的流场情况，这是实验所做不到的。我们选取了自上往下的视角，观察了射流出口的流线，发现上部液池的涡度在经过小孔射流后仍然得到保留并发展，形成了射流的初始涡度，如图 4.14 所示。截取某一个螺旋处不同高度的水平面，观察水的体积分数云图，可以清晰地观察到水在水平截面上的分布情况，如图 4.15 所示，可以发现水在表面张力的作用下，不断地发生变形，大部分时刻是椭圆状，拉伸到极限展宽最宽时，中部出现凹陷，而两头稍宽，这一形态也与我们观察到的实验现象一致。

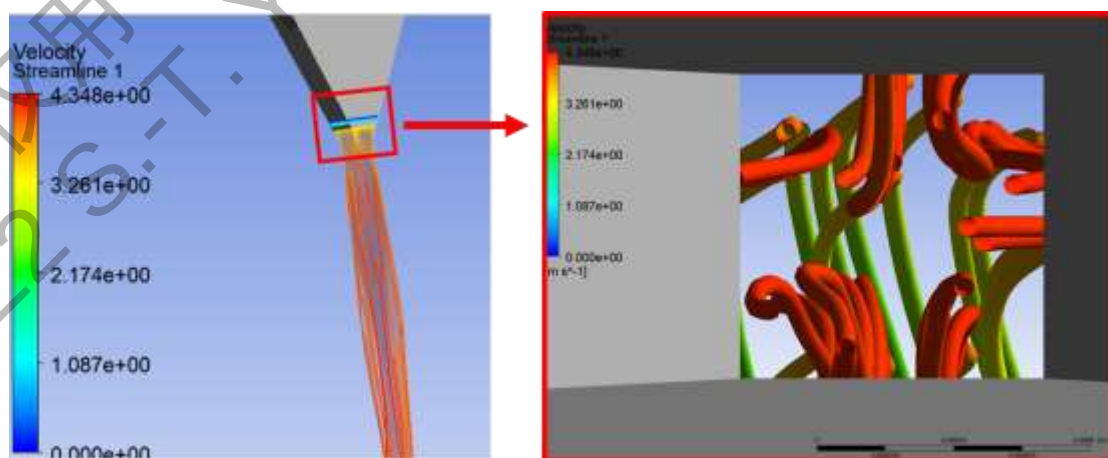


图 4.14 透过小孔俯视射流出口局部流线图

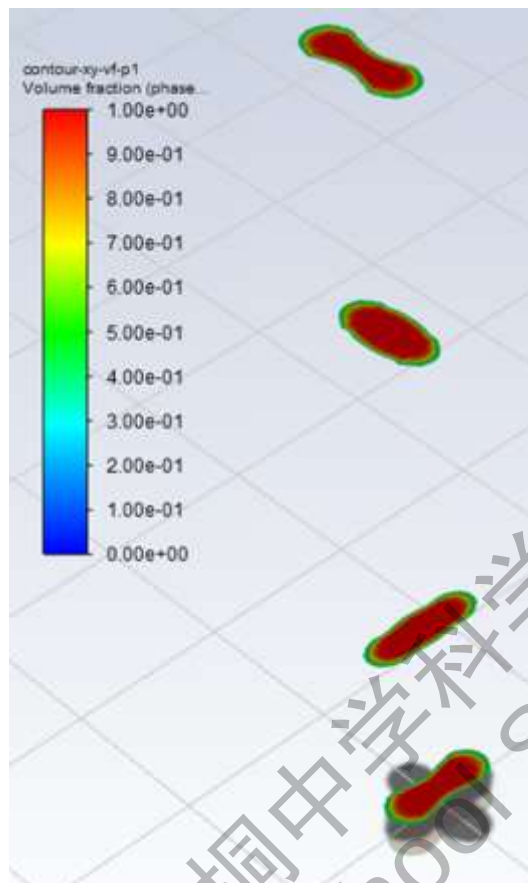


图 4.15 不同水平截面上的水体积分数云图

通过 Case1 和 Case2 的计算结果对比分析，印证了我们理论分析的结果，即在没有外界扰动的条件下，垂直流体流出某一小孔时形成的螺旋现象是由于地球自转导致的科里奥利力与射流对容器的不对称性的敏感性从而具有初始涡度所致。且（一）表面张力引起的水膜震动呈简谐振动；（二）矩形小孔出水后液滴会收缩成长轴和短轴长不变的椭圆状。

4.4.2 螺距、螺旋半径随流体初速度变化的定性模拟

接下来利用 CFD 数值模拟实验进行螺距、螺旋直径随相关参量的定性分析。通过改变上部压力进口的压强的方式来模拟上部液池不同液位高度的工况。如图 4.16 所示。由图示可以看出，随着液体压强的增加，液体初速度增加，液体射出小孔时的第一螺距有明显变大趋势。螺旋直径略有增加，但增加趋势并不明显。由于水粘性较小，流速超过一定阈值时螺旋极易破碎，不能继续维持螺旋形态，形成不规则液团继续下落。

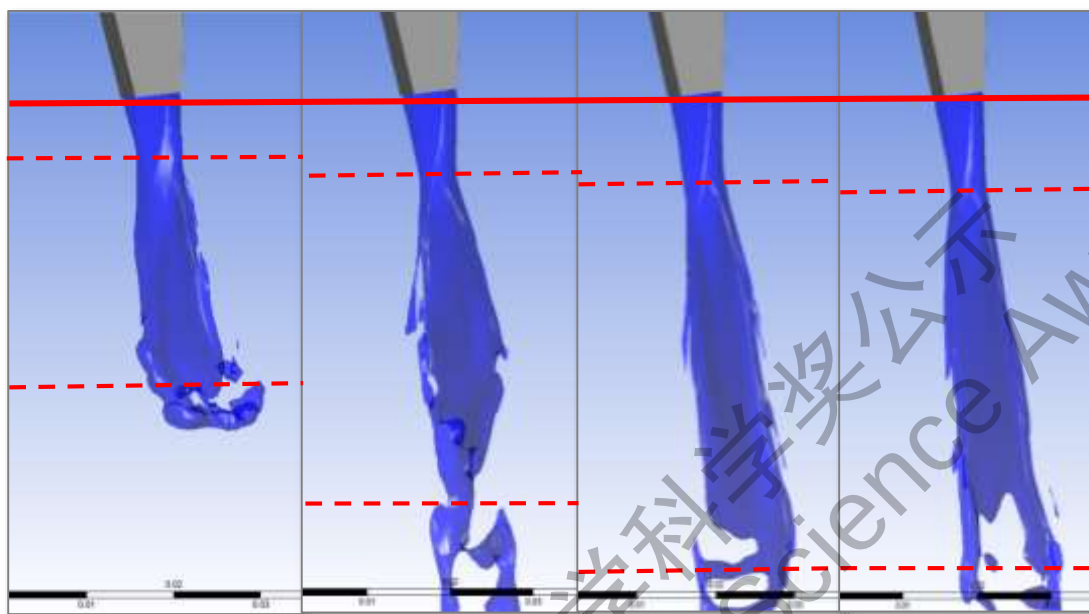


图 4.16 数值模拟-不同压强下的水螺旋

4.4.3 不同粘性的螺旋形态模拟比较

通过改变流体的粘性物理性质来实现理想化的单一变量定性分析，模拟出理想 50℃ 下蓖麻油的粘性。如图 4.17 所示。

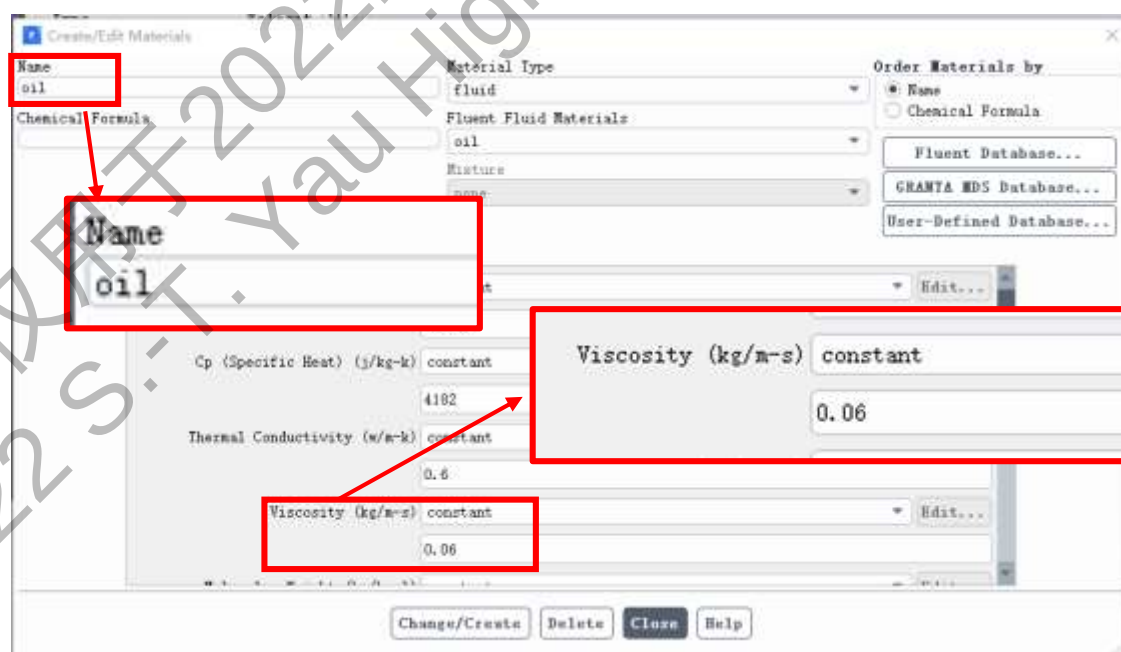


图 4.17 蓖麻油粘性系数设置

控制液体释放压强相同，对比水和蓖麻油的螺旋形态，如图 4.18 所示。由于粘度大大增加，液体抵抗形变的能力增强，液团更不容易发生破碎，螺旋形变更为明显。

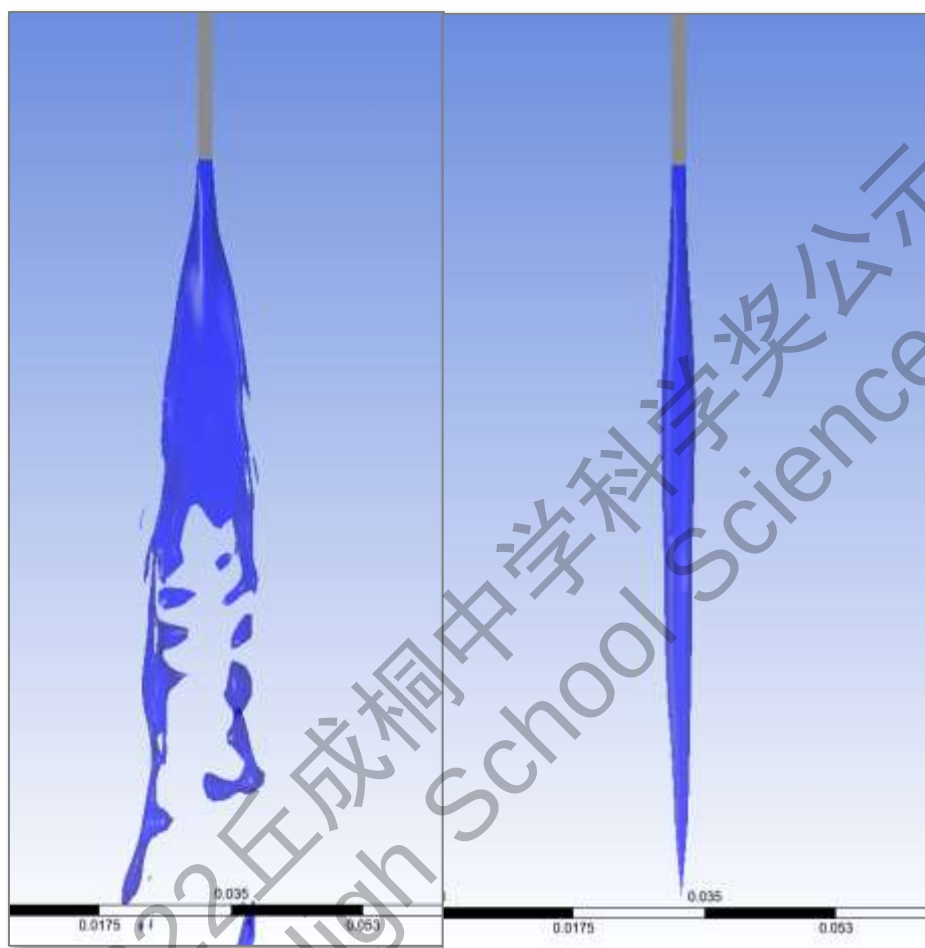


图 4.18 水和蓖麻油的螺旋形态对比

本章基于 CFD 数值模拟方法开展了小孔射流过程中的流体螺旋形变特性研究，建立了实验装置的 1:1 数值仿真三维几何模型和全六面体高质量网格模型，提出了小孔射流螺旋形变过程的两相流 CFD 数值模拟方法，获得了小孔射流过程中关键流动参数空间分布及随时间演变规律，揭示了表面张力对射流过程中流体螺旋形变的影响机理，阐明了小孔射流过程螺距、螺旋直径等参数随不同液位高度及流体物性之间的影响关系，为相关现象机理研究提供了重要的技术手段。

第五章 数据分析及讨论

5.1 实验数据和理论值的比较

通过实验指导理论分析，基于我们做出的两个模型假设，利用能量守恒，通量守恒等方程解得螺旋角频率的表达式，进一步通过利用流体流速、小孔孔径和流体物理性质对螺旋角频率的约束，推导出螺旋的螺距、螺旋直径与相关参量的关系。

由于数值模拟采用的模型过于理想化，只能给出定性结论，定量结论不具有可比性。因此，我们下面主要将实验数据与理论数据对比，如图 5.1-5.6 所示。

由于能力有限，我们无法求得积分超越方程组，暂时没有将伯努利方程的粘性系数项加入理论的考虑。故以下理论结果均为不考虑流体粘性所得， ω 的计算参考公式 (3.21)，对于螺旋半径的计算参考公式 (3.25) 中去除粘性修正项的结果。

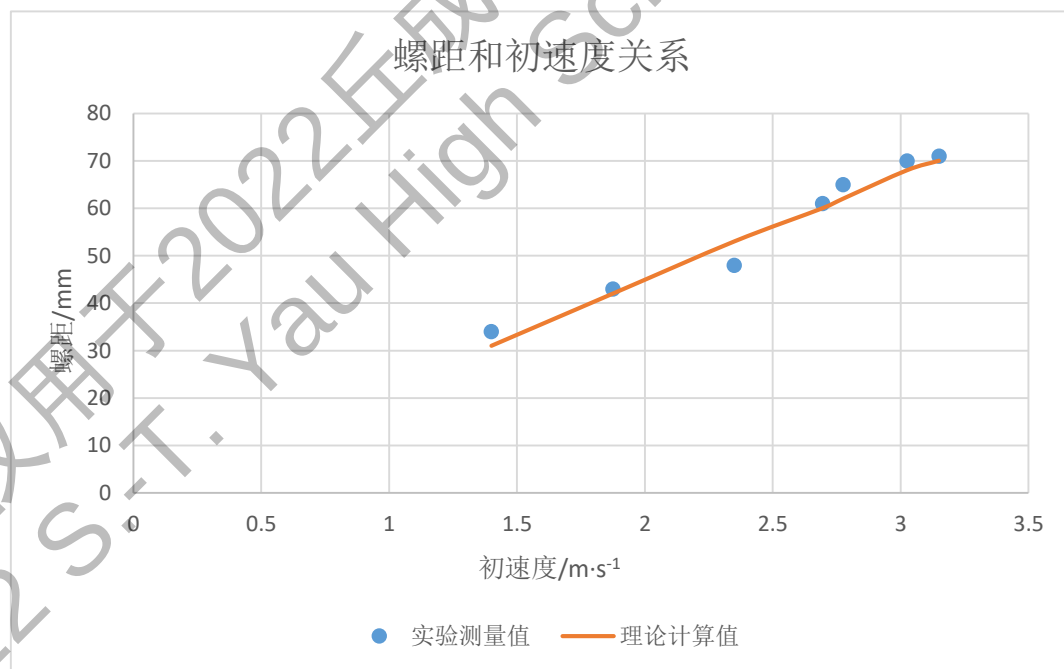


图 5.1 实验与理论比较-螺距与初速度关系

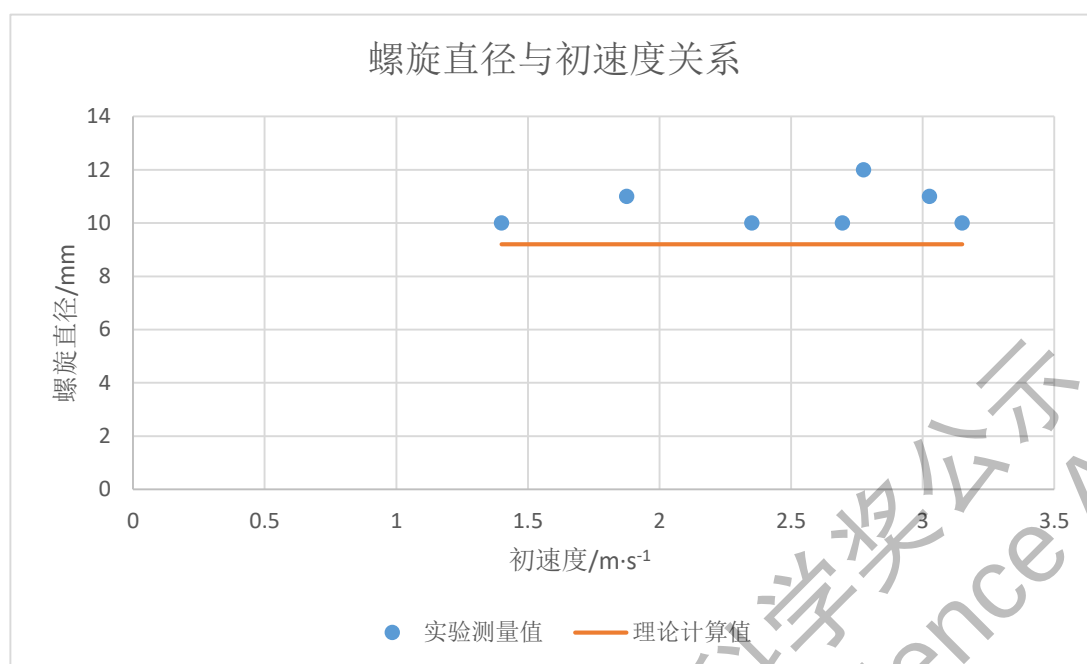


图 5.2 实验与理论比较-螺旋直径与初速度关系

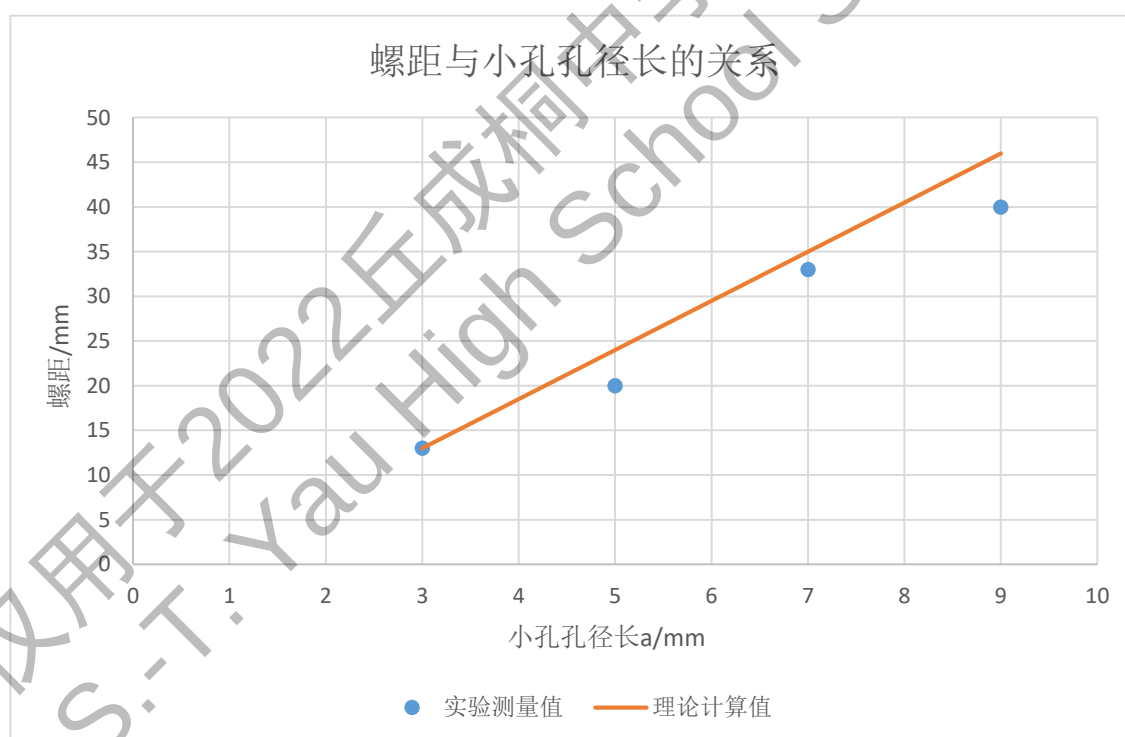


图 5.3 实验与理论比较-螺距与小孔孔径长的关系

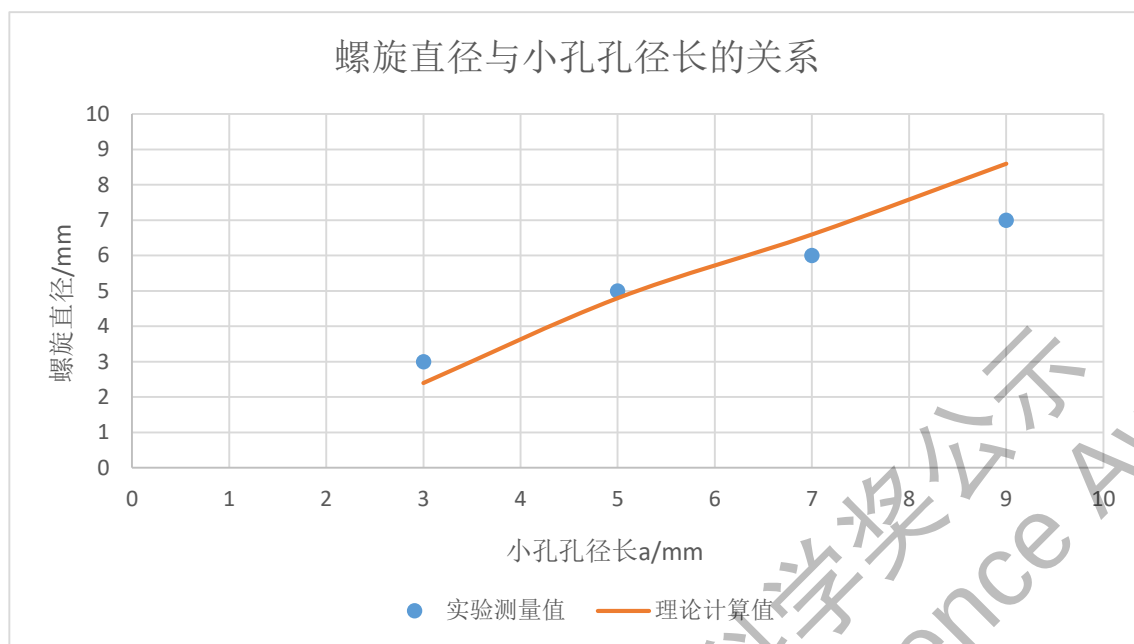


图 5.4 实验与理论比较-螺旋直径与小孔孔径长的关系

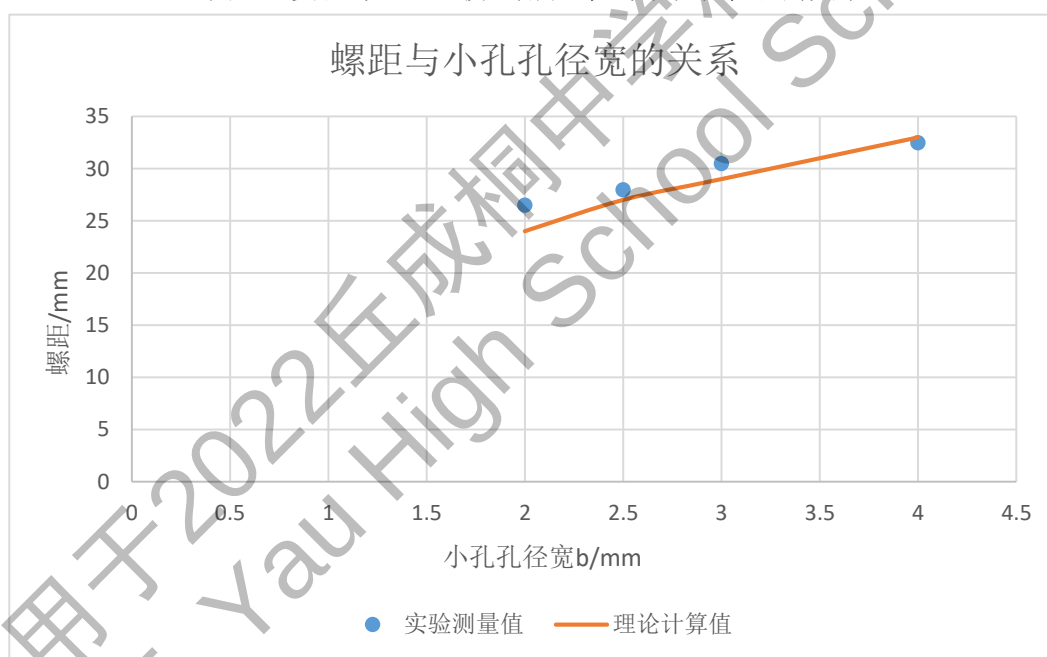


图 5.5 实验与理论比较-螺距与小孔孔径宽的关系

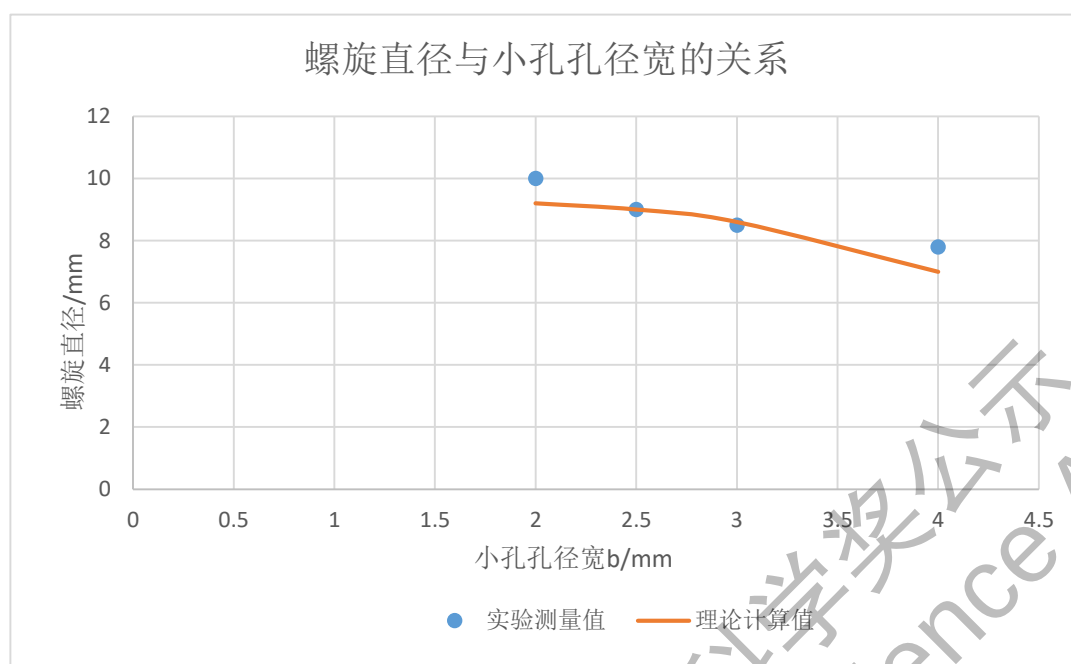


图 5.6 实验与理论比较-螺旋直径与小孔孔径宽的关系

5.2 误差分析

由比较表格可以看出，总体上理论和实验数据符合较好，但仍存在一定误差。经过分析，实验误差的主要来源为：

1) 实验测量误差：利用视频分析在较小的时间间隔内记录运动行为，然而相机记录会存在一种不可避免的误差—拖影误差。具体地说，相机每记录一帧图像都需要一定的曝光时间，在这短时间内，物体运动了一段距离，这会对后续捕捉物体位置造成一定的误差范围。

2) 理论模型近似误差：采用微元法的思想，对液体微元进行受力分析。为了方便计算，认为液体微元为椭圆状，实际操作中，液体微元形状可能会随外界扰动而变得不规则。

3) 理论假设产生误差：在不考虑外界空气阻力以及其他扰动的条件下，流体做具有周期性的简谐振动。实际操作中，流体受力复杂，外界不可避免存在微小扰动，故流体实际做阻尼振动。

第六章 总结与展望

6.1 总结

针对射流螺旋问题，本文在大多数前人研究“有初始扰动的振动源模型”和“交汇扭转模型”的基础上，提出了“垂直射流的表面张力模型”。即探究出，在没有外界扰动的条件下，垂直接流体流出某一小孔时形成的螺旋现象是由于地球自转导致的科里奥利力与射流对容器的不对称性的敏感性从而具有初始涡度所致。

本文采用数学物理方法，基于实验数据，对建立的“垂直射流的表面张力模型”进行了分析，在我们所做的（一）表面张力引起的水膜震动呈简谐震动；（二）矩形小孔出水后液滴会收缩成长轴和短轴长不变的椭圆状两个假设下进行理论推导，并用 CFD 流体力学计算工具模拟出了垂直射流的螺旋现象。

实验测量、理论分析和数值模拟相互印证，得出了以下定性结论：

- 1) 在小孔孔径和流体种类不变的情况下，流体压强越大，流体所产生的螺距和螺旋直径越大；
- 2) 在流体所受压强和流体种类不变的情况下，小孔孔径越大，流体产生的螺距和螺旋直径越大；
- 3) 在流体所受压强和小孔孔径不变的情况下，流体粘滞系数越小，流体产生的螺距和螺旋直径越大。

本研究有如下亮点：

- 1) 总体思路清晰：控制自变量，寻找自变量与因变量的关系，由大量实验指导理论分析。
- 2) 创新实验装置：在正式实验装置前尝试多个实验装置，克服弊端，优化实验装置，就地取材，设计巧妙。
- 3) 液体选择环保：利用蓖麻油的温度的敏感性来实现不同粘度自变量的控制，避免了选择多种液体。
- 4) 完善理论模型：在伯努利方程上进行粘度系数项的修正，并在简谐振动方程上加入了粘度系数项，更符合实际情况，具有创新价值。

5) 数值模拟精细：部分突破了难以捕捉精准现象的难点，加入表面张力系数和能量方程，最终利用 CFD 流体力学计算工具模拟出了实验现象，与实际现象和理论模型相符。

6.2 展望

由于我们的时间和知识能力所限，本研究还存在可以进一步探讨的问题，例如：对含粘度系数的方程理论解的推导，因为存在超越方程无法给出解析解，可以考虑用数值解代替；数值模拟部分，还需要通过模型优化分析定量结果等。

另外，我们也一直在思考，本文的研究成果，未来可能在航空航天、石油开采与运输、喷嘴设计等领域内具有实用价值。

参考文献

- [1] J. P. Kubitschek, P. D. Weidman, Helical instability of a rotating viscous liquid jet, *Physics of Fluids*, 19 (2007), 114108.
- [2] J. Eggers, E. Villermaux. *Physics of Liquid Jets*, *Reports on Progress in Physics*, 71(2008) 036601.
- [3] Ascher Shapiro, Bath-Tub Vortex, *Nature*, vol. 196(1962), pp1080.
- [4] L. Trefethen, R. W. Bilger, P. T. Fink., et. al., The Bath-tub Vortex in the Southern Hemisphere, *Nature*, vol. 207 (1965), pp1084.
- [5] J. W. M. Bush, A. E. Hasha. On the collision of laminar jets: fluid chains and fishbones[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, 511:285-310.
- [6]张鸣远, 流体力学, 高等教育出版社, 北京, 2010

致谢

我们的科研过程及论文撰写过程十分艰辛，中途经历过无数挫折。在理论值迟迟难以推出、近似求解过程中产生分歧、方程求解产生难以化解的困难时，在实验屡屡失败、螺旋现象不明显时，在数值模拟结果总是不理想、苦苦等待计算结果时，我们并没有放弃对目标的坚定信念和对物理学的热爱和探索精神，始终坚定信心，在一次次失败中淬炼成长，最终不仅成就了现在的成果，更加成就了百折不挠、意志坚定的我们自己。我们感谢这段时间努力奋斗的自己，无论结果如何，我们付出了自己能做到的最大努力，我们无怨无悔。

本论文的完成，离不开许多人的支持与指导。他们的帮助，使得我们的实验探究不停推进与深化，论文写作不断丰富和完善，在本论文即将完成之际，我们要对所有帮助我们的人致以衷心的感谢。

首先，我们需要感谢两位悉心指导我们的两位老师——西安交通大学物理学院的赵述敏副教授和方爱平教授。她们以渊博的物理学知识、精益求精的科学精神和严谨的治学态度带领我们打开流体力学的大门，在精神鼓励和技术支持下，我们建立了对流体力学的基本认知，启发了我们对流体的追求和探索。她们指引我们在实验方面作出创新性突破，在理论方面完善严谨程度。

同时，还要感谢西安交通大学能源与动力工程学院的王明军副教授对于我们学习 CFD 数值模拟计算软件 Fluent 使用的指导和讲解。

另外，我们要感谢西安交通大学机械学院为我们提供 3D 打印的设备和技术支持，让我们能够摆脱操作层面上的困难，按照自己的想法打印出不同的小孔。感谢西安交通大学高性能计算中心为本项目数值模拟计算流体力学提供了计算资源、技术保障和支持。

最后，我们要感谢在过程中支持我们的父母及家人。在实验数据总不理想和数值计算迟迟难以模拟出现象时，是他们给予我们精神上的鼓励和支持。

团队成员

曹恩雅

西安交通大学附属中学高二（3）班学生。

对数学物理有丰富的兴趣，善于分析和思考问题，数学物理知识较为扎实。在老师的指导下，能够发现理论中的漏洞和近似不足的地方，并提出了改进方案。具有较强的科研精神。在老师们的引导和帮助下，能够创新性地提出科学问题，主动探究不同的研究方法。

在本次研究中，主要负责研究过程的规划、实验操作和数据采集，数学物理模型理论推导分析、论文的撰写与修改。

郭润泽

西安交通大学附属中学高二（7）班学生。

动手能力强，在实验中发挥了重要作用。在实验中遇到的困难善于提出创新的实验方案，找到解决问题的方法，最终在老师的引导和帮助下，解决了许多实验上实际操作的难题，使得实验更佳完备。

在本次研究中，主要负责课题相关文献的搜索和研读、实验操作和数据搜集、数学物理模型的分析推导、论文的撰写与修改。

指导老师

赵述敏 副教授

西安交通大学物理学院副教授，应用数学博士。主要研究方向为凝聚态物理和生物物理，包括软物质的结构及其物性研究，主持国家自然科学基金项目 1 项，省部级教改项目 1 项，参与国家、省部级教改项目 4 项，国家自然科学基金项目 3 项，已在 Physical Review B, Physical Review E, Plasmonics 等期刊上发表论文 10 余篇。

方爱平 教授

西安交通大学物理学院教授，物理系博士。现任全国高等学校热学课程教学研究会副理事长、大学物理教学指导委员会课程思政工作委员会秘书长、物理教育改革与研究专项委员会委员。获陕西省教学成果特等奖 1 项、一等奖 2 项，获陕西省科学技术一等奖 1 项，获“高等教育杯”全国高等学校物理基础课程青年教师讲课比赛陕西赛区一等奖、西北地区一等奖。主持国家自然科学基金青年项目 1 项、重点实验室开放课题 1 项、横向课题 1 项，主持大学物理教指委教改项目 2 项、物理学类教指委教改项目 1 项，发表高水平科研及教改论文 20 余篇。

学术诚信声明

本人郑重声明，所呈交的研究论文，是本人在指导老师们的指导下，独立进行研究工作取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。

论文作者签名：

曹思雅 郭润年

日期：2022 年 9 月 13 日

附录



附录图 1 分析数据 (a)



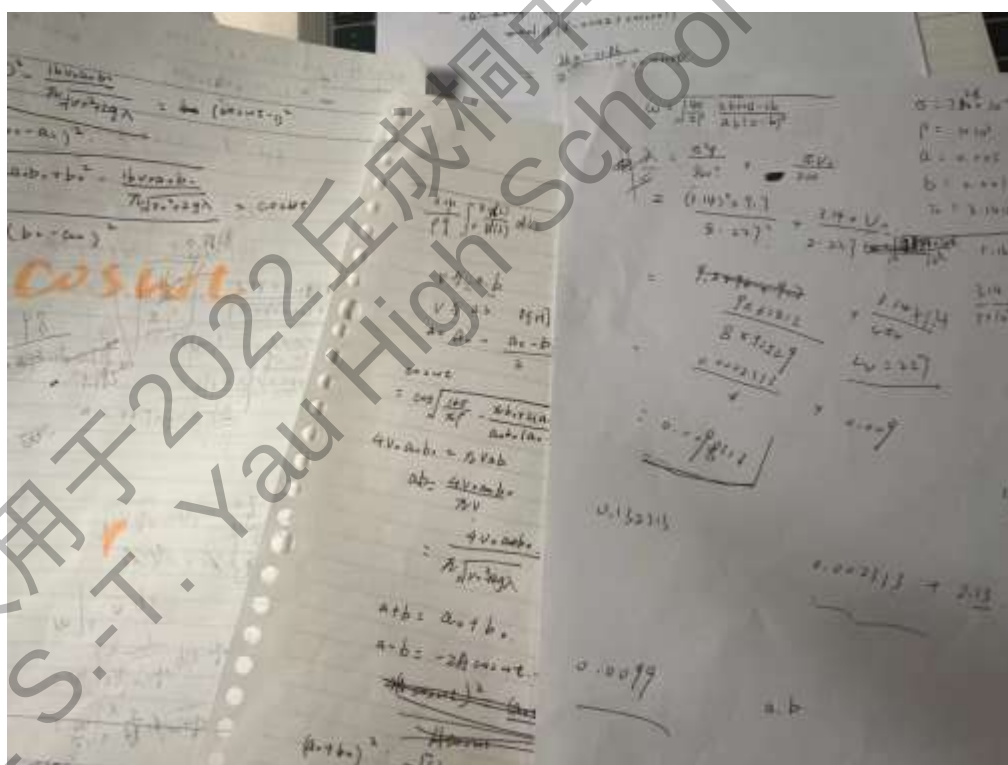
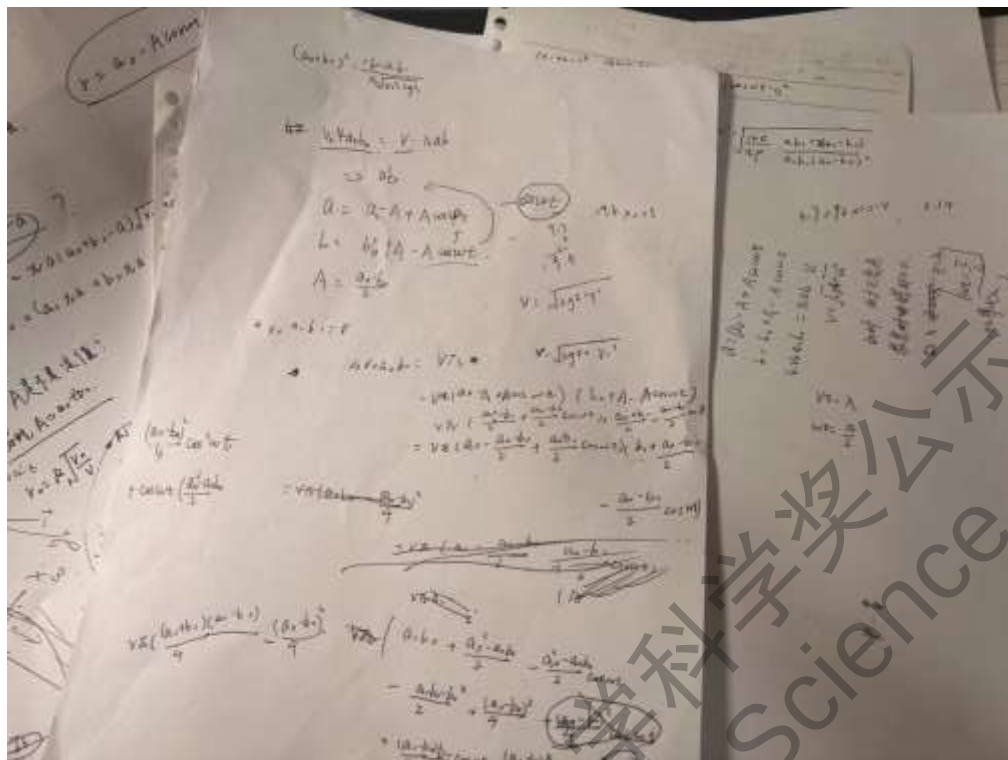
附录图 2 分析数据 (b)



附录图 3 实验过程中(a)



附录图 4 实验过程中(b)



附录图 3 理论推导过程（部分草稿）