

参赛队员姓名：高雅涵

学校：四川省温江中学

省份：四川省

国家/地区：中国

指导教师姓名：周廷明

指导教师单位：四川省温江中学

论文题目：一种加速悬浊液颗粒自然沉降  
的流体动力学效应 —— Boycott 效应及其实际  
应用

# 目 录

摘要.....	3
本文中字母的物理含义.....	4
一、引言.....	5
1.1 选题背景及研究现状.....	5
1.2 本文主要研究内容与创新点.....	6
二、理论分析.....	6
2.1 构建模型.....	6
2.2 流体力学分析.....	7
2.3 颗粒受力分析.....	8
2.4 理论结论.....	11
三、实验探究.....	13
3.1 实验装置.....	13
3.2 颗粒沉降时间与液体黏滞系数的关系.....	14
3.3 颗粒沉降时间与颗粒半径的关系.....	15
3.4 颗粒沉降时间与颗粒初始体积浓度的关系.....	15
3.5 沉降增强系数与容器倾斜角度的关系.....	17
四、应用推广及总结展望.....	19
4.1 构建模型-应用推广.....	19
4.2 总结.....	19
4.3 展望.....	20
五、附录.....	21
a.1 颗粒在液体中加速过程可忽略的证明过程.....	21
a.2 液面高度关于时间变化函数推导过程.....	21
参考文献.....	23
致谢.....	24

## 摘 要

细小颗粒在密度低于自身的液体中会自然下沉。倾斜盛放悬浊液的容器，颗粒沉降速率会发生明显改变，此现象被称为 boycott 效应，此效应与颗粒和液体的性质有关。通过研究此现象，作者提出一种利用流体动力学加速悬浊液杂质自然沉降的理论构想，可不借助机械装置将悬浊液污染物沉降分离，或用于改造河道剖面，加速河沙沉降分离等，具有结构简单、节能环保的特点。

本文运用连续介质力学模型分析了容器内流体与颗粒的对流情况，利用 PNK 理论分析悬浊液的分层沉降速度，并得出沉降增强效应的适用范围。通过分析细小颗粒在沉降过程中的动态行为机制，作者认为容器倾斜时悬浊液内部产生的“增强层”是颗粒沉降速度加快的主要原因，在其影响下颗粒的沉降速度比容器竖直时显著加快，在容器高径比不同的情况下分别存在一个最大加强系数。

本文将颗粒与液体混合均一来定量研究上述过程。实验结果及理论分析表明在多种因素限制的情况下，颗粒在液体中沉降的速度会呈现不同的具有一定规律性的变化，这与液体混合物在沉降时的混合程度、液体黏滞系数、颗粒的粒径、沉降条件（环境限制因素：容器的倾斜角度、长宽比、内部结构……）有关。

同时，本文定性分析了容器内颗粒沉降过程中的流体分层、能量转换等情况，这些都对容器内颗粒沉降的动态行为机制有重要影响。最后通过实验对理论预测进行了验证。

**关键词：**Boycott 效应；边界增强；沉降分离；PNK 理论；污水净化

## 变量说明：本文中字母的物理含义

$v$	颗粒群倾斜沉降速率
$v_0$	颗粒群竖直沉降速率
$u_0$	单个粒子竖直沉降速率
$H$	液面高度
$H_0$	初始液面高度
$d$	容器直径
$\theta$	容器倾斜角度（竖直方向夹角）
$\mu$	液体黏滞系数
$r$	颗粒半径
$C_0$	颗粒初始体积浓度
$\rho_1$	液体密度
$\rho_2$	颗粒密度
$\beta$	沉降加强系数
$k$	容器高径比
$\gamma$	颗粒形状修正系数，约为 0.7
$n$	与雷诺数有关的常数，约为 4.65
$Re$	雷诺数

# 1. 引言

## 1.1 选题背景及研究现状

在自然界中有一个十分有趣的现象——简单地倾斜装有液体和颗粒混合物的容器，颗粒在容器中的沉降速率便会显著加快，由于颗粒与液体的对流情况不同导致了这种现象。此现象也吸引了许多学者的兴趣，为此他们也做了大量研究。

1920年 Boycott 观察了有血液的试管中细胞沉降，发现倾斜试管里出现无细胞液体的百分比大于竖直试管<sup>[1]</sup>。1928年 Lundgren 指出沉降颗粒所置换的液体能够通过斜面向下流动，绕过由下落颗粒形成渗流，从而促使颗粒沉降速率加快<sup>[2]</sup>。1949年 Kinosita 在倾斜试管和倾斜边界下观察沉降过程中的对流，他观察到一些粒子以其沉降速度的 100 倍移动<sup>[3]</sup>。1976年 W. D. Hill 等人已研究了在特定形状容器（锥形的容器）内颗粒沉降可能比同高度的竖直试管内快上几倍，这种增强是由自然对流造成的<sup>[5]</sup>。2005年 Z. J. Xu 与 E. E. Michaelides 等人对颗粒沉降的过程进行了晶格玻尔兹曼模拟<sup>[8]</sup>。2018年，S. Palma 等人就利用此效应来预测在什么情况下管道会被堵塞，发现初始颗粒的体积浓度是一个十分重要的因素<sup>[7]</sup>。2019年，V. Braranets 与 N. Kizilova 提出在较小角度倾斜试管时存在一个最佳角度使颗粒沉降得最快，若倾斜角度超过此最佳角度时，颗粒沉降速率反而会被减弱<sup>[9]</sup>，其中也提到沉降的最佳角度还是一个待解决的问题。

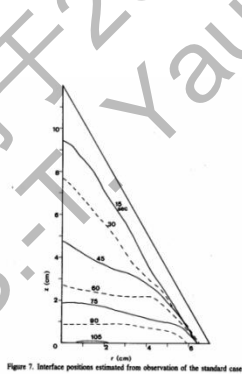


Figure 7. Interface positions estimated from observation of the standard case.

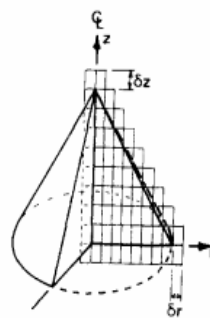


Figure 8. Computing mesh covering a radial slice in a cone.

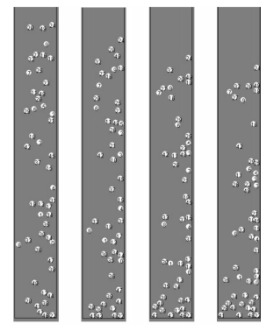


Figure 9. Snapshots of the sedimentation process with angle of inclination 30°.

图 1<sup>[5]</sup> 文献中各流层分布 图 2<sup>[5]</sup> 对于流体进行分区分析 图 3<sup>[8]</sup> 对颗粒进行数值模拟

前人从多个角度对 Boycott 效应做了大量研究，但仍有不够完善的地方。主要体现在模型大多较为宏观，无法描述悬浊液内部颗粒的运动状态与浓度分布。

本文将在前人的基础上尝试对此问题做进一步研究，并提出若干实际应用的设想。

## 1.2 本文主要研究内容与创新点

1. 对颗粒进行受力分析，从动力学角度分析其沉降过程，借助 PNK 理论模型推得平均沉降速度 $v$ 与竖直沉降速度 $v_0$ 比例关系函数，得到沉降速率与多个变量之间的关系，计算出使颗粒沉降速率最快的倾斜角度最优解的值。
2. 细化 PNK 理论中较为宏观且与实际情况有较大出入的模型，画出与实际情况一致的液体流动情况示意图，推导出计算颗粒沉降速率具体值的公式，以及产生加强效应的条件——颗粒浓度范围，进一步明确沉降增强效应的适用条件。
3. 分析此加快颗粒沉降的效应在工业污水沉降以及河沙治理中的应用前景。设计出切实可投入使用的污水净化模型。

## 2.理论分析

### 2.1 构建模型

采用构建流体力学模型系统的方法描述颗粒在容器中沉降的状况，运用斯托克斯定律，推算在一定角度，均一液体中颗粒的沉降速率。

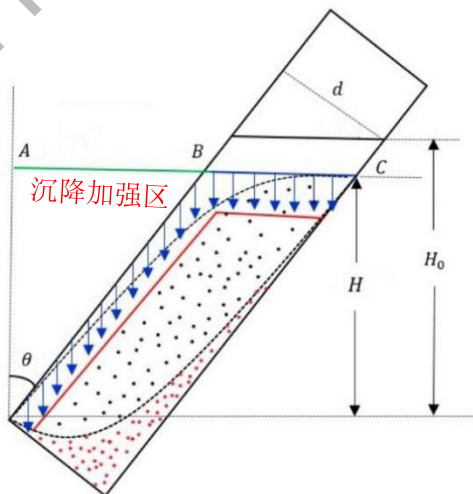


图 4 沉降系统模型<sup>[2]</sup>

根据沉降过程照片简化为上图所示物理模型，字母含义见上文变量说明。我们将此试管中分为三个部分，蓝色箭头的部分为颗粒沉降后形成的低密度澄清液，中部为颗粒与液体混合的悬浊液，底部为沉淀区。A-B-C为沉降增强区，在此区域产生沉降增强效应。

## 2.2.流体力学分析

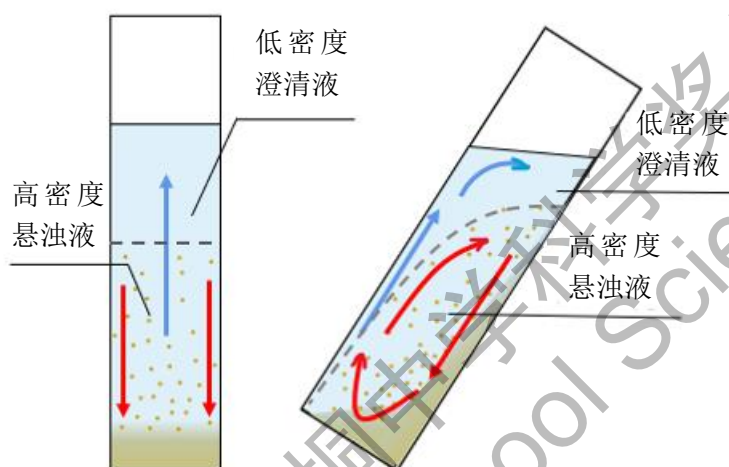


图 5 竖直沉降与倾斜沉降流体流动情况对比图

对于竖直流体来说，如上图 5 的流动状态，上图 5 中蓝色箭头处为颗粒沉降后所成的无明显颗粒的低密度澄清液，在颗粒较多的部分为高密度的悬浊液。由于颗粒与液体的相对运动，低密度的澄清液从悬浊液中分离出，向上运动。形成上涌流。高密度的悬浊液在重力的作用下向下运动，向上运动的上涌流与颗粒的沉降相互阻碍，从而使颗粒向下运动的速度减慢。

对于倾斜流体来说，颗粒由于竖直的重力而偏向容器所倾斜的那一侧沉降，在另一侧则产生低密度的澄清液体区，低密度澄清液由于压强差向上汇集，高低密度流的分流减缓了颗粒沉降的阻力。

根据文献<sup>[4]</sup>可知颗粒损失的势能转化为对流动能。通过对流和沉降颗粒周围流动的粘性耗散转化为内能，故粒子旋转和扩张力的影响在平衡中忽略不计。

## 2.3 颗粒受力分析

对在液体中的颗粒进行受力分析，建立简化的流体力学系统模型。

将小颗粒理想化为形状规则的球形，在这个沉降的过程中，我们对颗粒群进行受力分析，由于颗粒群数目庞大，但由于颗粒之间充斥着液体使其碰撞与颗粒间的摩擦减少，并且此运动现象存在随机性，对于较低浓度颗粒群来说颗粒间相互作用的影响较小，故将颗粒间的碰撞和摩擦暂时不计。

容器中的悬浮颗粒下沉时，会在上方斜壁产生小型澄清液体区域。此区域的上升流会由于斜壁限制向开口处的液体区域流动，颗粒会及时填满斜壁清液区域。此开口处的颗粒因此下沉。如下图点阵较密集的区域是液体与颗粒混合的悬浊液，点阵较稀疏的区域是低密度澄清液，试管中蓝色箭头代表的是第一部分颗粒向下运动，形成澄清液。

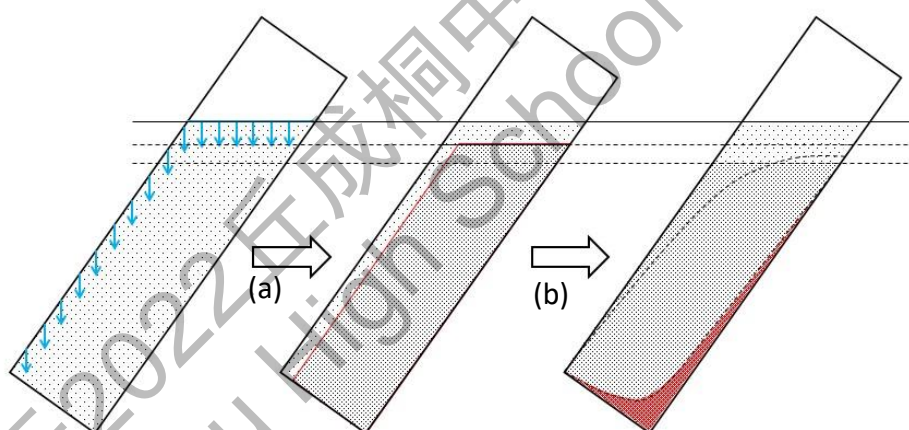


图 6 沉降的两个分过程 过程(a):颗粒自由沉降,过程(b): 颗粒填补清液区

由于液体的流动是连续的，不便于分析。因此，我们将颗粒下降分为两个过程。第一个过程为颗粒竖直沉降过程，如图 6 过程(a)。沉降的颗粒受重力  $G = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r^3 g$ ，浮力  $F = -\rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g$ ，黏滞阻力  $f = -6\pi\mu r u$  作用，其动力学方程为：

$$\rho_2 \frac{4}{3} \pi r^3 g - \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g - 6\pi\mu r u = \rho_2 \frac{4}{3} \pi r^3 a \quad (1)$$



$$a = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g - \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_2 r^2} u \quad (2)$$

当  $a = 0$  颗粒的速度达到最大，即收尾速度，用  $u_0$  表示：

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_2 - \rho_1) g - 6 \pi \mu r u_0 = 0 \quad (3)$$

解得单个颗粒收尾速度：

$$u_0 = \frac{2(\rho_2 - \rho_1) g r^2}{9 \mu} \quad (4)$$

由(2)式可得：

$$u_t = \frac{2(\rho_2 - \rho_1) g r^2}{9 \mu} \left( 1 - e^{-\frac{9 \mu}{2 \rho_2 r^2} t} \right) = u_0 \left( 1 - e^{-\frac{9 \mu}{2 \rho_2 r^2} t} \right) \quad (5)$$

当  $t = 1.04 \times 10^{-3} \text{s}$  时， $e^{-\frac{9 \mu}{2 \rho_2 r^2} t} = 0.01$ ， $u_t \rightarrow u_0$ ，即加速时间极短，可忽略不计。（证明过程见 a.1）

颗粒群自由沉降速率：

$$v_0 = u_0 (1 - C_0)^n \quad (6)$$

$$v_0 = \frac{2(\rho_2 - \rho_1) g r^2}{9 \mu} (1 - C_0)^n \quad (7)$$

第二个过程为颗粒填补垂直沉降后颗粒的空缺，如过程（b）所示。整个颗粒体系由于液体流动等原因，将始终保证颗粒体系斜壁面处没有空缺，于是颗粒体系通过填补斜壁面空缺，最终沉降只体现水平上表面。由此我们将可以算出其下降的真实速率。

根据 PNK 理论。设此垂直沉降的速度为  $v_0$ ；

$$\frac{dH}{dt} = v = -v_0 \left( 1 + \frac{H}{d} \sin \theta \right) \quad (8)$$

得到液面高度随时间的变化函数：

$$H = \left( H_0 + \frac{d}{\sin \theta} \right) \cdot e^{-\frac{v_0 \sin \theta}{d} t} - \frac{d}{\sin \theta} \quad (9)$$

当  $H=0$  时完成沉降，耗时：

$$t = \frac{d}{v_0 \sin \theta} \ln \left( \frac{H_0 \sin \theta}{d} + 1 \right) \quad (10)$$

平均沉降的速度为:

$$v = \frac{\frac{H_0 \sin \theta}{d}}{\ln \left( \frac{H_0 \sin \theta}{d} + 1 \right)} v_0 \quad (11)$$

竖直放置容器在相同条件沉降完成的时间:

$$H = v_0 t' \quad (12)$$

且:  $H \cos \theta = H_0$ , 定义  $\frac{t}{t'} = \beta$  为沉降加强系数, 即:

$$\beta = \frac{\ln(k \sin \theta + 1)}{k \sin \theta \cos \theta} \quad (13)$$

式中  $k = \frac{H_0}{d}$ 。

沉降加强系数  $\beta$  越小, 混合物澄清时间越短, 加速沉降的效果越好, 则在相同条件下颗粒下沉越快。

同时, 前文的分析将颗粒理想化为球形, 实际的碳酸钙颗粒并非球形, 有一定的尖角, 因此要考虑颗粒形状修正系数, 此处确定修正系数为 0.7<sup>[13]</sup>, 则有  $\bar{v} = \gamma v$ 。

综上, 可得颗粒群倾斜沉降真实平均速率为:

$$\bar{v} = \gamma \cdot \frac{H_0 \sin \theta}{d \ln \left( \frac{H_0 \sin \theta}{d} + 1 \right)} \cdot \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{9\mu} \cdot gr^2 \cdot (1 - C_0)^n \quad (14)$$

颗粒群在高  $H_0$  的倾斜容器中沉降时间满足以下关系式:

$$t = \frac{d \cdot \ln \left( \frac{H_0 \sin \theta}{d} + 1 \right) \cdot 9\mu}{\gamma \cdot \sin \theta \cdot 2(\rho_2 - \rho_1) \cdot gr^2 \cdot (1 - C_0)^n} \quad (15)$$

## 2.4 理论结论

由（13）式可得倾斜沉降与竖直沉降时间之比即沉降增强等系数（ $\beta$ ）和容器倾斜角度  $\theta$  的关系为：

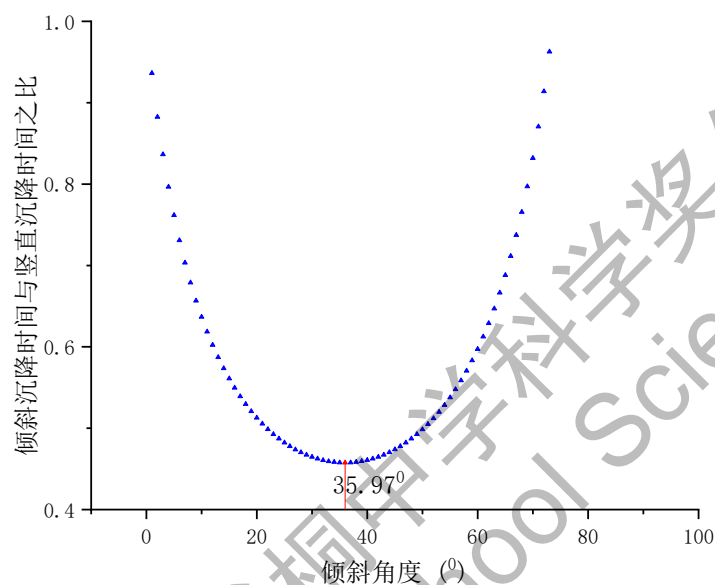


图 7 倾斜沉降与竖直沉降时间之比( $\beta$ )随倾角( $\theta$ )变化的规律

由软件计算得出理论值在倾角为  $35.97^\circ$  时，沉降加强系数 $\beta$ 最小，在同样条件下，倾斜沉降时间是最短的，加速沉降效果最好。

由（15）式可得沉降时间  $t$  相关物理量之间得关系：

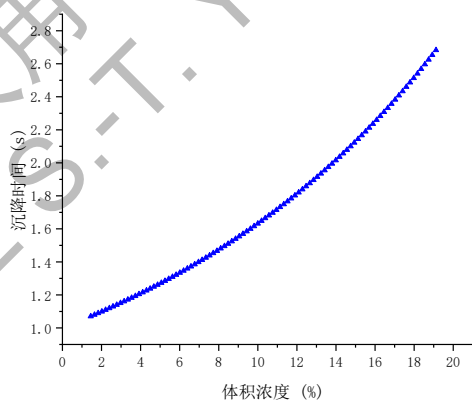


图 8 沉降时间随颗粒初始体积浓度的变化

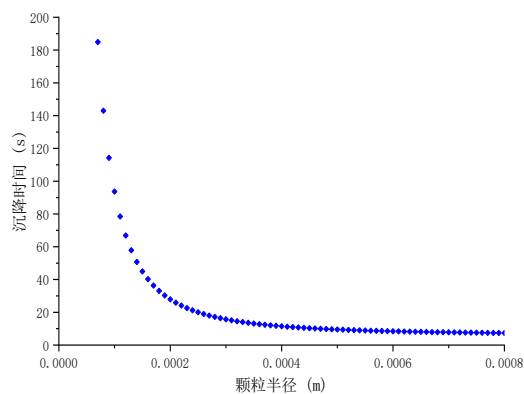


图 9 沉降时间随颗粒半径的变化

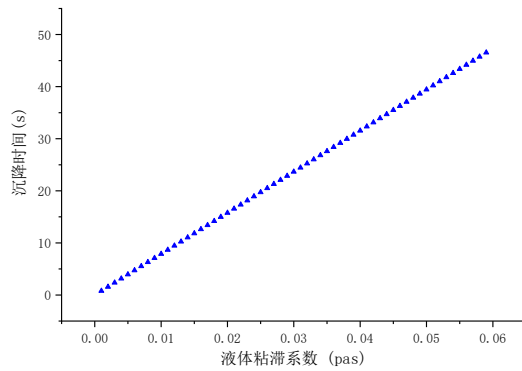


图 10 沉降时间随液体黏滞系数的变化

由以上分析可以得到：

1. 颗粒群在沉降时的沉降增强等系数与倾斜角度存在一个最优解。
2. 颗粒群在沉降时的平均时间与初始体积浓度成正相关关系、颗粒半径的平方成反比、液体黏滞系数成正比关系。

仅用于2022丘成桐中学科学奖公示  
 2022 S.-T. Yau High School Science Awards

### 3.实验探究

#### 3.1 实验装置与步骤

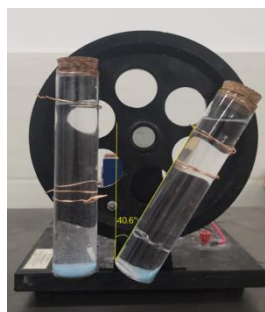


图 11 实验装置实物图



图 12 处理后的视频截图  
(颗粒沉降时)



图 13 处理后的视频截图  
(颗粒沉降完成时)

我们采用转轮制造颗粒与液体混合均一的悬浊液，将液体倒入试管中，将试管固定于转轮上，用 Tracker 软件内置量角器测量倾角。在 Photoshop 中对视频使用彩色负片的曲线，使颗粒与液体分界更加明显，便于观察沉降。

实验器材：不同管径的圆底试管，不同直径的碳酸钙颗粒，8 目、16 目、26 目、40 目、70 目等分样筛，注射器，计时器，转轮，铜丝若干，橡皮套，量筒。

不同高径比的试管作为盛放溶液的容器，用锤子将碳酸钙颗粒砸碎，再用一定目数的分样筛分筛，将颗粒的半径控制在一个比较小的范围内，（如能通过 10 目分样筛和不能通过 20 目分样筛的颗粒归为一个组分，其半径范围为  $8.4 \times 10^{-4} \text{m}$  到  $2 \times 10^{-3} \text{m}$  之间）。用碳酸钙颗粒模拟在污水中的泥沙等不可溶杂质，用水与丙三醇的混合溶液充当承载颗粒的液体，用量筒取一定体积的颗粒与液体，将其上两个组分混合得到悬浊液。为使颗粒与液体充分混合均匀，并且最大程度上保证了每次实验颗粒与液体的混合程度相同，故将其固定在转轮上，来回转动 10 周。对整个过程进行视频录制，将录的视频导入 Photoshop 中调节成彩色负片，可更加明显的观察到颗粒与液体的情况，用计时器进行时间记录。

实验步骤如下：

1. 将一定半径的碳酸钙颗粒注入试管中。
2. 借助量筒配置丙三醇与水（丙三醇与水体积比为 2：8）与颗粒混合，

形成悬浊液。

3. 将试管固定在转轮上，将转轮来回旋转 10 周，使颗粒与液体混合均匀。
4. 录制视频，用 photoshop 处理调节为彩色负片，用使用计时器记录沉降时间。
5. 记录数据，每组实验做 5 次及以上，取实验数据的平均值进行分析。

实验前分析：由理论推导的公式  $t = \frac{d \cdot \ln(\frac{H_0 \sin \theta}{d} + 1) \cdot 9\mu}{\gamma \cdot \sin \theta \cdot 2(\rho_2 - \rho_1) \cdot gr^2 \cdot (1 - C_0)^n}$  和  $\beta = \frac{\ln(k \sin \theta + 1)}{k \sin \theta \cos \theta}$ ，得沉降时间与液体黏滞系数、颗粒半径、颗粒初始浓度成单调关系，运用控制变量法研究。对于沉降增强系数对于角度存在一个最优解，与容器高径比成反相关关系，在实验中验证理论，得到的沉降加强系数最优解的实验值，以及其误差的范围，以便更好的运用到工业化沉降中。

### 3.2 颗粒沉降时间与液体黏滞系数的关系

为验证理论中得出颗粒沉降时间与液体黏滞系数成正比的关系。

固定变量：试管口径 25.0mm，粒子浓度 14.94%，粒子直径  $1.83 \times 10^{-4} \text{m}$ ，室内温度 20°C，倾斜角度 48.2°。变量为液体的黏滞系数，分别为 0.01005pas, 0.0131pas, 0.0176pas, 0.0344pas, 0.0592pas, 0.108pas 等。

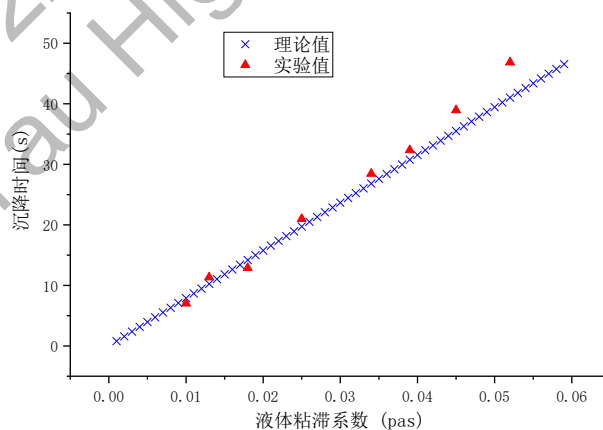


图 14 颗粒沉降时间与液体黏滞系数的关系

由此可以看出颗粒沉降时间随液体黏滞系数的增大而增大，成正比关系，与理论符合较好，在黏滞系数较大时，颗粒沉降时间明显偏离线性关系，所以

理论分析有一定局限性，仅考虑了颗粒与液体之间的黏滞力而没有考虑液体内部的黏滞力，在黏滞系数趋近于 $\infty$ 时，颗粒将不再下沉。

### 3.3 颗粒沉降时间与颗粒半径的关系

为验证理论中得出颗粒沉降时间与颗粒半径的平方成反比的关系。

固定变量：试管口径 25.0mm，粒子浓度 14.94%，黏滞系数：0.0503pas，室内温度 20°C，倾斜角度 48.2°。变量为颗粒半径： $8.22 \times 10^{-4} \text{m}$ ， $4.16 \times 10^{-4} \text{m}$ ， $2.86 \times 10^{-4} \text{m}$ ， $1.82 \times 10^{-4} \text{m}$ 。

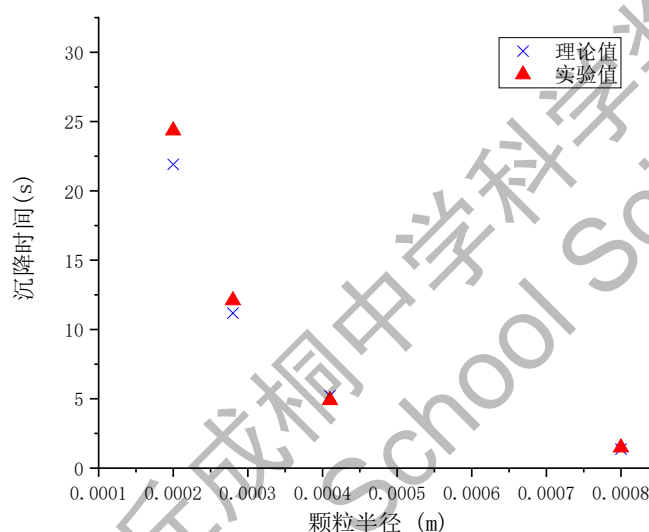


图 15 颗粒沉降时间与颗粒半径的关系

由此实验验证，可知颗粒时间与颗粒半径的平方成反比，与理论符合较好。但在半径很小时，理论值与实验值相差较大。即表达式成立的条件应是  $r$  大于某值时， $r$  太小，颗粒与液体分子之间的相互作用体现明显，液体呈胶体状态，颗粒均匀分布，不再沉降。

### 3.4 颗粒沉降时间与初始体积浓度的关系

为验证理论中得出颗粒沉降时间与颗粒的初始体积浓度成正相关关系的关系。

固定变量：试管口径 25.0mm，黏滞系数：0.0503，室内温度 20°C，颗粒半径  $1.82 \times 10^{-4} \text{m}$ ，倾斜角度 48.2°。变量为颗粒初始体积浓度：1.45%、2.02%、2.54%、3.18%、5.57%、7.96%、10.35%、12.74%、15.13%、

17.52%、19.91%、22.30%。

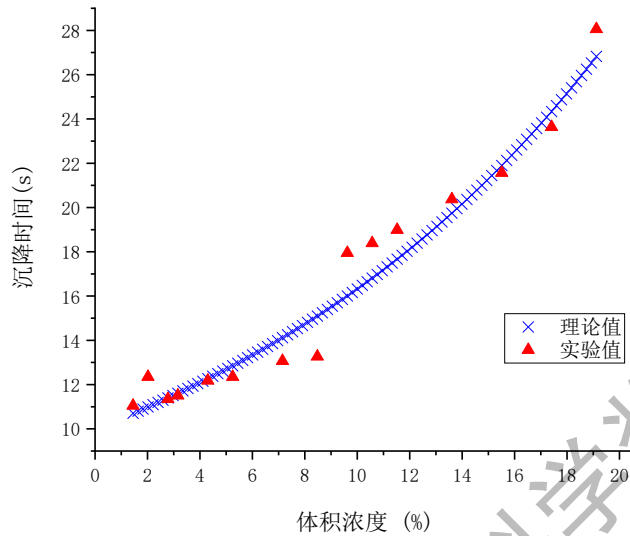


图 16 颗粒沉降时间与初始体积浓度的关系

由此实验验证，可知颗粒沉降时间与颗粒初始体积浓度成正相关关系，与理论符合较好。

由于文献<sup>[8]</sup>中提到沉降的增强是在颗粒初始体积浓度小于10%的情况下产生的。于是为了更精确的确定产生沉降加强的颗粒体积浓度的范围，作者又做了在相同条件下不同体积浓度的颗粒在竖直容器中沉降的实验，将在倾斜容器中颗粒的沉降时间比上在竖直容器中颗粒沉降时间，若比值小于1，则说明有增强效应；若比值大于1，则说明不产生沉降增强效应。

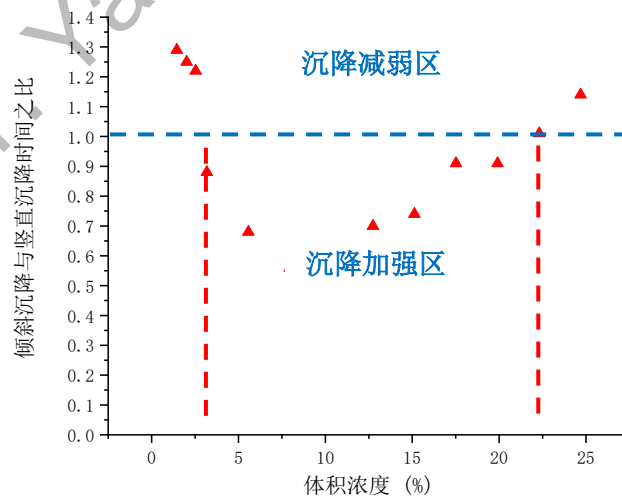


图 18 颗粒倾斜沉降与竖直沉降时间之比 ( $\beta$ ) 与颗粒体积浓度的关系



由上图可看出浓度在小于 3.18%与大于 22.30%时，其比值是大于1的，所以在此体积浓度的状态下，沉降体系无增强效应。故在颗粒体积浓度在 3.18%~22.30%之间时会有增强效应。颗粒体积浓度在 7%附近增强效果最好。

由此可以看出产生沉降增强效应条件是建立在一定颗粒体积浓度范围内的，此范围约为 3.18%~22.30%。但是此浓度范围大于文献<sup>[8]</sup>，作者推测是由于颗粒体积增大对水的相互作用力就增大，加剧容器内水的环流，从而加速颗粒沉降，产生沉降效应。

### 3.5 沉降增强系数与容器倾斜角度的关系

为验证理论中存在一个最佳倾斜角度使沉降速率最快，并且找出在此实验条件下的最佳角度。

固定变量：试管口径 25.0mm，粒子浓度 14.94%，黏滞系数：0.0503，室内温度 20°C，颗粒半径  $1.82 \times 10^{-4}m$ 。变量为倾斜角度：5.0° 9.8° 15.8°，20.6°，27.6°，30.9°，34.9°，39.9°，45.0°，48.2°，56.1°，60.2°，65.4° 72.4°，75.1°。

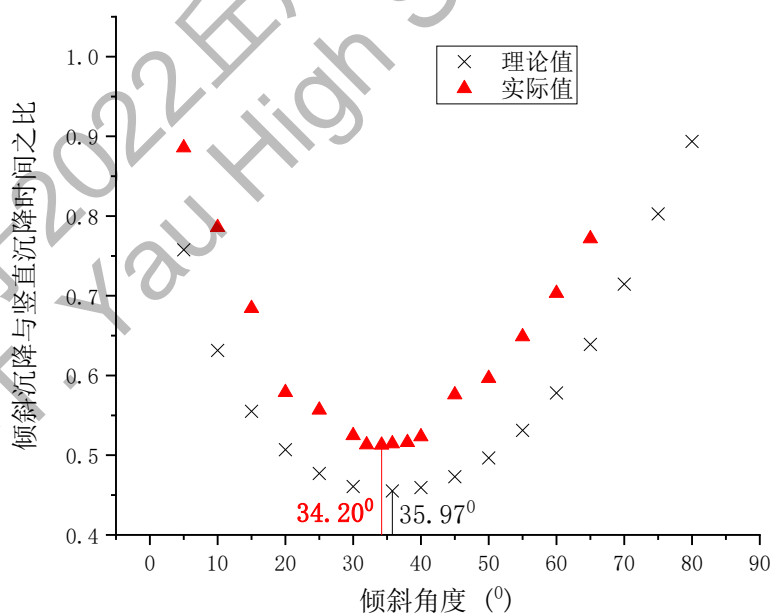


图 29 粒倾斜沉降与竖直沉降时间之比 ( $\beta$ ) 与容器倾斜角度的关系

在实验中存在一个最佳倾角使颗粒沉降的速率最快，在以上实验条件下

(试管规格：25.0mm\*200.0mm)，实验所得的最佳倾角约为  $34.20^\circ$ ，理论值是  $35.97^\circ$ ，相对误差为 4.92%，与理论值符合较好。在倾角为  $90^\circ$  时沉降时间趋近于无穷大。

仅用于2022丘成桐中学科学奖公示  
2022 S.-T. Yau High School Science Awards

## 4.应用推广与总结展望

### 4.1 构建模型-应用推广

现在大多数污水处理的初级沉降池为长方体的构型，加入絮凝剂使细小颗粒在池中进行自由沉降，但是此机制的沉降效率较低。

故根据本文研究结果，构建以下污水净化沉降池模型：

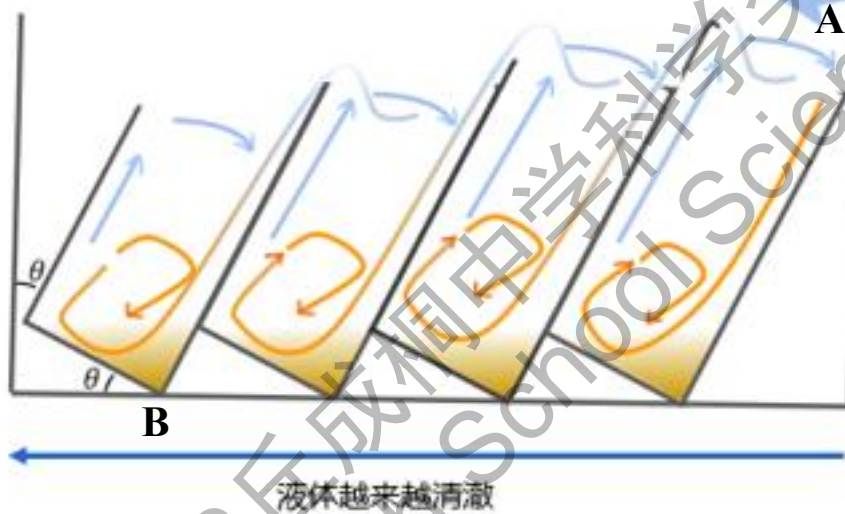


图 20 污水净化模型

在 A 处源源不断地通入需要净化的污水，在此系统中将沉降重复几次，左边得到的水会越来越清澈。颗粒、泥沙等杂质会沉积在底部，形成“堆积区”。在 B 口可以及时去除污泥从而达到净化的效果，并且由于倾斜的容器壁可以使高低密度层分流，大大减少杂质沉积的时间，提高效率，节约成本。为节约成本，也可在现有沉降池增加倾斜隔离栅板，加速沉降。

### 4.2 总结

1. 在倾斜容器的情况下，颗粒沉降时间与液体的黏滞系数成正比。与理论符合较好。
2. 在倾斜容器的情况下，颗粒沉降时间与颗粒半径的平方成反比。与理论符合较好。

3. 在倾斜容器的情况下，颗粒沉降时间与颗粒沉降的初始浓度成正相关关系。由于文献中给出产生增强效应的颗粒浓度范围并不完整，经过实验作者确定了产生沉降增强效应的体积浓度区间约为 3.18%~21.30%。完善了前人的研究。

4. 颗粒的沉降速度在以往的文献并没有明确的公式计算倾角的具体值。在理论推导中我们得到颗粒的沉降的加强随角度的变化并不是单调的，在其中存在一个最佳角度。在此实验条件下，该角度为：35.97°。

5. 提出一种利用流体力学加速悬浊液杂质自然沉降的理论构想，可不借助机械装置将悬浊液污染物沉降分离，或用于改造河道剖面，加速河沙沉降分离等，自己设计可投入实际应用的工厂污水净化模型，加快效率，节能环保。

### 4.3 展望

1. 希望能够深入的定量研究颗粒与颗粒之间的相互作用，能量转化，动量交换的情况，合理解释每一个现象出现的原因，什么因素对其影响最大。

2. 希望能够在后续的实验中，得出在颗粒半径为多少时，液体呈胶体状态，不会产生沉降增强效应，即明确能加速沉降的颗粒半径范围。

3. 制作实体的净化污水模型，定量的测算其净化效率的提高量，与理论模型做对比，再做进一步优化，使其可以真正广泛应用在污水净化领域中。

## 5. 附录

### a.1. 颗粒在液体中加速过程可忽略的证明过程。

在达到最大速度  $u_0$  之前的运动过程中：

$$\frac{du}{dt} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g - \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_2 r^2} u \quad (1)$$

整理并积分：

$$\int \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g - \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_2 r^2} u \right) du = \int dt \quad (2)$$

解得：

$$\ln \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g - \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_2 r^2} u \right) = -\frac{9\mu}{2\rho_2 r^2} t + c \quad (3)$$

代入初始条件： $t = 0$ 时， $u = 0$ （即假设从静止开始沉降）：

即：

$$c = \ln \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g \quad (4)$$

整理得：

$$u_t = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{9\mu} \left( 1 - e^{-\frac{9\mu}{2\rho_2 r^2} t} \right) = u_0 \left( 1 - e^{-\frac{9\mu}{2\rho_2 r^2} t} \right) \quad (5)$$

对⑤式加以讨论：当 $u_t = u_0$ 时，需经过的时间。

即：当 $e^{-\frac{9\mu}{2\rho_2 r^2} t} = 0$ 时

当 $t = 1.01 \times 10^{-3} \text{s}$ 时， $e^{-\frac{9\mu}{2\rho_2 r^2} t} = 0.01$ ， $u_t \rightarrow u_0$ 。即加速时间极短，可忽略不计。

### a.2. 液面高度关于时间变化函数推导过程

根据 PNK 理论。设：此竖直沉降的速度为 $v_0$ ； $S(t)$ 为澄清液的下降的面积速率（沉降效应）。

$$v = \frac{dH}{dt} = -v_0 \left(1 + \frac{H}{d} \sin\theta\right) \quad (6)$$

变形并积分，得：

$$\int \frac{1}{v_0 \left(1 + \frac{H}{d} \sin\theta\right)} dH = \int -dt \quad (7)$$

解得：在 $\theta \neq 0$ 时，

$$\frac{d}{v_0 \sin\theta} \ln v_0 \left(1 + \frac{H}{d} \sin\theta\right) = -t + C \quad (8)$$

当 $t = 0$ 时， $H$ 为初始高度，设为 $H_0$ ：

$$C = \frac{d}{v_0 \sin\theta} \ln \left[ v_0 \left(1 + \frac{H_0}{d} \sin\theta\right) \right] \quad (9)$$

确定常数  $C$ ，(8)式可写为：

$$\ln \left[ v_0 \left(1 + \frac{H}{d} \sin\theta\right) \right] = -\frac{v_0 \sin\theta}{d} t + \ln \left[ v_0 \left(1 + \frac{H_0}{d} \sin\theta\right) \right] \quad (10)$$

$$H = \left( H_0 + \frac{d}{\sin\theta} \right) \cdot e^{-\frac{v_0 \sin\theta}{d} t} - \frac{d}{\sin\theta} \quad (11)$$

$$\left( H_0 + \frac{d}{\sin\theta} \right) e^{-\frac{v_0 \sin\theta}{d} t} = \frac{d}{\sin\theta} \quad (12)$$

$$t = \frac{d}{v_0 \sin\theta} \ln \left( \frac{H_0 \sin\theta}{d} + 1 \right) \quad (13)$$

## 参考文献

- [1] BOYCOTT, A. Sedimentation of Blood Corpuscles. *Nature* 104, 532 (1920)
- [2] PONDER, E. On sedimentation and rouleaux formation. *Quart J. E~siol.* 15,235-252,1925.
- [3] NAKAMURA, H. and KURODA, K. La cause de l'acceleration de la vitesse de sedimentation de suspensions dans les recipients inclines. *Keijo J. Med.* 8, 256-296, 1937.
- [4] LUNDGREN.R 1928 *Acta Med. Scand.* 69, 405f.
- [5] Hill WD , Rothfus R R , Li K . Boundary-enhanced sedimentation due to settling convection[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 1977, 3(6):561-583.
- [6] J.F. Richardson, W.N. Zaki, *Trans. Inst. Chem. Eng.* 32 1954 35
- [7] Palma, Sergio, Ihle, et al. Characterization of a sediment layer of concentrated fluid-solid mixtures in tilted ducts at low Reynolds numbers[J]. *Powder Technology: An International Journal on the Science and Technology of Wet and Dry Particulate Systems*, 2018, 325:192-201.
- [8] Acrivos, Andreas , and E. Herbolzheimer . "Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls." *Journal of Fluid Mechanics* 92(2006).
- [9] Baranets, V., and N. Kizilova. "Mathematical Modeling of Particle Aggregation and Sedimentation in the Inclined Tubes". *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 90, Dec. 2019, pp. 42-59,
- [10] Speeding up of Sedimentation under Confinement,S. Heitkam, Y. Yoshitake, F. Toquet, D. Langevin, and A. Salonen
- [11] Simulating particle settling in inclined narrow channels with the unresolved CFD-DEM method,Junsheng Zeng, Pengfei Tang, Heng Li, and Dongxiao Zhang,*Phys. Rev. Fluids* 6, 034302 – Published 26 March 2021
- [12] 李铭志,何炎平,诸葛玮,黄超.泥沙颗粒沉降速度计算方法比较分析[J].*水运工程*,2014(06):6-9.DOI:10.16233/j.cnki.issn1002-4972.2014.06.001.
- [13] 雷中云,邓荣东,姜克冰,库建刚.低雷诺数下不规则颗粒沉降阻力公式的改进和验证 [J/OL].*福州大学学报(自然科学版)*:1-7[2022-04-08].
- [14] 周世杰,崔宝玉.颗粒在悬浮粒群中的干涉沉降研究[J]. *中国现代教育装备*, 2022(5):4.
- [15] Dobashi T , Goto H , Sakanishi A , et al. Erythrocyte sedimentation rate II. Effects of tilt angle in saline solution[J]. *Biorheology*, 1988, 25(1-2):157.

## 致谢

先我要感谢我的物理老师——周廷明老师!在我写作时给予我理论方面的指导以及鼓励。从论文选题开始，老师就给了我悉心的指导，一直到后面的论文结构、论证方法等，里面都包含着导师的心血和对我的期望。老师不仅帮助我提高了学术能力、开阔了我的学术视野，他严谨的治学态度、求真务实的工作作风以及对学术研究的认真和热爱更是深深地影响着我。

其次感谢我的学校——四川省温江中学！对于我的实验，学校为我们提供的大量实验器材及实验场地，最终完成了论文的研究工作。

这篇论文所涉及到的大学流体力学知识以及更加深层次的物理知识深深吸引着我，对于这个奇妙的现象，我希望发挥它的作用，我由此希望尽自己最大的努力，能够写出一点真正有现实意义的文字。事情的最后结果就是这篇论文，虽然仍有些不足；但是阅读、思考和写作的过程并不轻松，有灵光乍现、兴奋不已的时候，而更多的则是深入思考，反复琢磨。

学习物理，探索生活中的科学，所收获的不仅仅是愈加丰厚的知识，更重要的是在阅读、实践中所培养的思维方式、表达能力和广阔视野。很庆幸在成长路上我遇到了许多恩师益友，无论在学习上还是生活上都给予了我无私的帮助和热心的照顾，让我在诸多方面都有所成长。感恩之情难以用语言量度，谨以最朴实的话语致以最崇高的敬意。