

第一页为封面页

参赛队员姓名： 黄科霖 王宇轩

中学： 北京顺义国际学校

省份： 北京

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 郝希

指导教师单位： 中国农业大学马克思主义学院

论文题目： *The Shapovalov* 中型企业模型的不变代数曲面与动力学分析

The Shapovalov 中型企业模型的不变代数曲面与动力学分析

黄科霖 王宇轩

摘要

本文使用加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 研究了 *The Shapovalov* 中型企业模型的达布多项式和不变代数曲面问题. 并对模型在曲面上的动力学行为进行了分析, 利用 \mathbf{R}^3 中的多项式向量场的 *Poincaré* 紧化, 给出了它在无穷远点 *Poincaré* 球面上的完整描述.

Keywords: 不变代数曲面; 达布多项式; *Poincaré* 紧化; 无穷远点

目录

1. 引言
2. 主要定理
 - 2.1 达布多项式定理
 - 2.2 本文主要定理
- 3 定理证明
 - 3.1 F_0 的形式为 (3.8)
 - 3.2 F_0 的形式为 (3.9)
 - 3.3 达布多项式总结
- 4 无穷远点分析
 - 4.1 *Poincaré* 紧化
 - 4.2 主要过程
 - 4.2.1 U_1 中的紧化
 - 4.2.2 U_2 中的紧化
 - 4.2.3 U_3 中的紧化
5. 在不变曲面上的动力学分析
6. 结论
7. 致谢

1 引言

微积分是数学学科中的重要分支之一,它研究函数的变化规律、极限、导数、积分以及微分方程等内容.在高中阶段学习微积分,不仅可以提高数学素养,还可以培养创造性思维和解决实际问题的能力.首先,函数与极限是微积分学习的基础.函数是一个输入与输出之间的关系,通常用符号 $y = f(x)$ 表示.函数的图像可以帮助我们直观地理解函数的性质.在学习函数时,我们会接触到一些基本函数,如幂函数、指数函数、对数函数和三角函数等.这些函数在实际问题中有广泛的应用.极限是微积分的核心概念之一,它描述了函数在某个点上的趋近情况.形式化地定义,对于函数 $f(x)$,当自变量 x 无限接近某个值 a 时,函数值 $f(x)$ 逐渐趋近于一个确定的值 L ,即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.导数是微积分中的重要概念之一,它描述了函数在某一点上的瞬时变化率.对于函数 $y = f(x)$,其导数可以表示为 dy/dx 或 $f'(x)$.导数的计算可以通过求导法则和基本的导数表来完成.

导数是微积分中的重要概念之一,它描述了函数在某一点上的瞬时变化率.对于函数 $y = f(x)$,其导数可以表示为 dy/dx 或 $f'(x)$.导数的计算可以通过求导法则和基本的导数表来完成.而积分是微积分的另一个重要概念,它可以视为导数的逆运算.积分的主要应用之一是计算函数图形下的面积.以下是一些常见的积分公式:

1. 不定积分:

- $\int k dx = kx + C$ (常数 k 的不定积分为 kx 加上一个常数 C)

- $\int x^n dx = (x^{n+1})/(n+1) + C$ (幂函数的不定积分)

- $\int e^x dx = e^x + C$ (指数函数的不定积分)

- $\int 1/x dx = \ln|x| + C$ (自然对数函数的不定积分)

2. 定积分:
- $\int [a, b] f(x) dx$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分,代表函数图形下的面积.微分方程是微积分的另一个重要应用领域.微分方程描述了函数及其导数之间的关系,通常以 dy/dx 或 $f'(x)$ 的形式出现.一阶微分方程的一般形式为 $dy/dx = f(x, y)$,其中 $f(x, y)$ 是已知函数.我们可以通过求解微分方程来获得函数的解析表达式.

综上所述,高中微积分学习涉及了函数与极限、导数、积分以及微分方程等内容.掌握这些概念和相关公式,可以帮助我们解决实际问题,培养创造性思维和数学建模能力.因此,高中微积分学习对于学生的数学素养和综合能力的提升具有重要意义.

不变代数曲面是代数几何中的一个重要概念,它与微积分之间存在一定的联系.具体而言,不变代数曲面是指在某个代数变换下保持不变的曲面.微积分研究函数的变化、极限、导数和积分等问题,而代数几何则研究几何对象的代数性质和方程表示.不变代数曲面是通过代数方式来描述的几何对象,通常由一些多项式方程定义.在微积分中,我们经常会遇到对函数的求导、求极限和计算定积分等问题.而在代数几何中,我们关注的是几何对象的代数方程以及其性质.通过代数方式来描述曲面,可以使我們更方便地进行几何对象的分析和研究.在某些情况下,微积分和代数几何可以相互补充和应用.例如,在研究曲线与曲面的交点时,我们既可以使用微积分的方法进行分析,如求导来确定切线和法向量,也可以使用代数

几何的方法, 如代数方程的解来确定交点的坐标. 此外, 在高阶微积分中, 我们经常遇到的参数曲线和参数曲面, 它们是用参数方程表示的曲线和曲面. 参数方程往往涉及到代数表达式, 可以通过代数几何的方法进行分析. 因此, 微积分和不变代数曲面在某些方面是相互联系的. 微积分提供了分析曲线和曲面的工具, 而不变代数曲面则为我们提供了一种代数方式来描述和研究几何对象. 通过结合这两个学科, 我们可以更全面地理解和分析函数与几何对象之间的关系.

综上所述, 我们主要采用高中所学的微积分的知识对一个具体系统的不变代数曲面进行研究.

上世纪下半叶, 在 *Ueda* 和 *Lorenz*[1,2] 发现动力系统中的混沌过程后, 混沌理论开始得到积极发展, 并有助于解释动力系统行为的复杂性和不可预测性. 动力系统的复杂性与这些系统行为的非线性和有限可预测性有关, 以及许多相关的开放问题, 促使经济学家对混沌理论产生了浓厚的兴趣. 许多研究旨在研究和揭示不平凡的经济影响, 并稳定不规则的过程 (见 [3] 等). 从 20 世纪 70 年代到现在, 这一领域的发展可以追溯到许多著名经济学家的研究 [4], 他们探索了许多可能产生非周期性波动的确定性经济模型的例子. 例如, 人们从经济增长和发展、市场结构和博弈论 [5]、理性预期模型 [6]、基于 *Gali* 和 *Monachelli* 模型的开放经济新凯恩斯模型 [7]、具有周期性和混沌资产价格波动的非线性异质神经智能体模型 (*ham*)[8] 等角度研究了混沌动力学. 研究人员还通过应用基于 *met-ric* (相关维数和 *Lyapunov* 指数) 和拓扑 (递归图) 方法的工具来关注货币混乱的问题 [9]. 最近, 研究主要在两个方向发展: 实证路径和理论路径. 经验路径研究了一些实际的经济时间序列是否具有混沌动力学的特征, 并致力于开发定义混沌的统计测试, 并将其应用于宏观经济和金融时间序列, 那么在金融系统一个自然的疑问, 我们能否去研究混沌系统的内部机理, 进而从内部状态去进行预测? 因此研究一个金融系统的不变代数曲面显得至关重要.

在这里我们考虑 [11] 中提出的描述中型企业行为的 *shapovalov* 模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \delta y, \\ \dot{y} = \mu x + \mu y - \beta x z, \\ \dot{z} = -\gamma z + \alpha x y, \end{cases} \quad (1.1)$$

式中变量 x, y, z 分别表示贷款、固定资本和雇佣的实际比率与其潜在 (自然) 比率之间的差距, $\alpha, \sigma, \delta, \mu, \beta, \gamma$ 都为正实数. 作为系统(1.1)研究的一部分, *Shapovalov* 等人模拟了系统及其极限动态的非线性分析任务, 以预测 *Shapovalov* 模型(1.1)的稳定性, 并确定系统具有某些可预测动态的条件 (中型企业动态预测的 *Shapovalov* 问题). 这个问题的重要之处在于系统具有不稳定的平衡状态, 并且可能表现出混沌动力学. 近期 *Tatyana A. Alexeeva* 等人基于 *Lyapunov* 稳定性理论和混沌理论, 发展了确定性动力系统的分析方法. 这些方法不仅可以获得分析稳定性准则和估计极限行为 (定位自激吸引子和隐藏吸引子并识别多稳态), 同时也要克服与实现可靠的 *Lyapunov* 指数和 *Lyapunov* 维数等定量指标的数值分析有关的困难, 对沙波瓦洛夫提出的中型企业模型进行了有效分析, 得出了系统(1.1)的全局吸引子的吸收集,

以及模型参数的稳定域和不稳定域. 对于一个有复杂动力学性质的系统来说, 想要完全了解该系统的动力学行为是一个非常困难的问题. 但如果该系统具有不变代数曲面, 那么就可以通过研究不变代数曲面上的动力学性质, 进而了解系统在整个空间中的动力学性质, 这样就大大的降低了研究难度. 接下来, 我们将研究 *The Shapovalov* 中型企业模型的不变代数曲面与并对不变代数曲面上的动力学行为进行分析.

2 主要定理

在本文中, 我们首先研究系统(1.1)的达布多项式和不变代数曲面问题. 对于动力系统的代数可积性及不变代数曲面问题, 可以追溯到 *Darboux* 和 *Poincaré*[12], 前者给出了代数几何与寻找首次积分之间的联系, 后者则对有理首次积分感兴趣, 并提出寻找一个多项式向量场的达布多项式是一项非常困难的任务, 目前还没有一个有效的方法去计算它, 这一说法在上个世纪得到了证实. 1996 年, *S.Labrunie* 计算出了 *Lotka Volterra* 系统的所有多项式一阶积分 [13]. 1999 年, *M.Ollagnier* 研究了 *Lotka Volterra* 系统的齐次有理第一积分 [14]. 2000 年, *J.Llibre* 等人描述了 *Rikitake* 系统的所有不变代数曲面、多项式第一积分、有理第一积分、不变量和代数可积性 [15]. 2002 年, *J.Llibre* 等人使用加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 对经典 *Lorenz* 系统的所有达布不变量, 不可约达布多项式, 有理第一积分及代数可积性进行了分类讨论 [16]. 2002 年, *P.Swinnerton – Dyer* 通过对多项式权值的重新定义, 分析并计算了 *Lorenz* 系统的不变代数曲面 [17]. 2007 年, *Lü* 等人通过使用加权齐次多项式和特征曲线法, 研究了 *Chen* 系统的达布多项式和代数可积性 [18]. 2011 年, *Deng* 等人求出了 *Chen* 系统的所有不变代数曲面 [19]. 2018 年, *C.Murilo* 等人研究了一个金融模型的不变代数曲面和 *Hopf* 分岔问题, 并证明该模型对于任何参数值都不存在不变代数曲面 [20]. 2018 年, *A.Kusbeyzi* 等人研究了由三维微分方程组表示的具有二次自作用的二食饵一食饵系统的动力学性质, 并给出系统不变代数曲面存在的条件 [21].

设 $f(x, y, z)$ 是变量 x, y, z 的实多项式, 若 $\frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q + \frac{\partial f}{\partial z}R = kf$, 我们称 f 是系统(1.1)的达布多项式, $k(x, y, z)$ 是阶数至多为 1 的实多项式, k 称为 f 的余因子. 若 $f(x, y, z)$ 是达布多项式且 $f = 0$ 是曲面, 那么它就是不变的, 我们称之为不变代数曲面 [22-24].

对 $X \in \mathbb{R}^n$, 多项式 $g(X)$ 被称为加权齐次的, 若存在 $S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n, m \in \mathbb{N}$, 对所有 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 有 $g(\alpha^S X) = g(\alpha^{s_1}x_1, \dots, \alpha^{s_n}x_n) = \alpha^m g(X)$, \mathbb{R} 代表实数域, \mathbb{N} 代表正整数集, 我们称 s 为 g 的权, m 表示加权阶数, $X \rightarrow \alpha^S X$ 的变换表示赋予变量新的加权次数.

为了方便读者理解, 我们将求解线性部分微分方程的特征方法总结如下. 考虑以下一阶线性偏微分方程,

$$a(x, y, z)A_x + b(x, y, z)A_y + c(x, y, z)A_z + d(x, y, z)A = f(x, y, z), \quad (2.1)$$

这里 $A = A(x, y, z)$, a, b, c, d, f 是一阶可导的.

xyz 空间中的曲线 $(x(t), y(t), z(t))$ 被称为线性偏微分方程 (1.2) 的特征曲线, 若在曲线上的每一点 (x_0, y_0, z_0) , 向量 $(a(x_0, y_0, z_0), b(x_0, y_0, z_0), c(x_0, y_0, z_0))$ 与曲线相切. 所以, 特征曲线是如下系统的解

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), z(t)), \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), z(t)), \frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t), z(t)). \quad (2.2)$$

为了方便起见, 我们将 z 代替 t 作为自变量, 将上述系统简化为系统 (这里假设 $c(x(t), y(t), z(t)) \neq 0$)

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a(x(t), y(t), z(t))}{c(x(t), y(t), z(t))}, \frac{dy}{dz} = \frac{b(x(t), y(t), z(t))}{c(x(t), y(t), z(t))}. \quad (2.3)$$

该常微分方程称为 (1.2) 的特征方程.

假设方程 (1.4) 有隐式解 $g(x, y, z) = c_1, h(x, y, z) = c_2$, 这里 c_1, c_2 是任意常数. 考虑变量替换

$$u = g(x, y, z), v = h(x, y, z), w = z,$$

且其逆变换为 $x = p(u, v, w), y = q(u, v, w), z = r(u, v, w)$. 则方程 (1.2) 变成如下关于 w 的常微分方程 (对于固定的 u, v):

$$\bar{c}(u, v, w)\bar{A}_w + \bar{d}(u, v, w)\bar{A} = \bar{f}(u, v, w), \quad (2.4)$$

这里 $\bar{c}, \bar{A}, \bar{d}, \bar{f}$ 是用 u, v, w 表示的 c, A, d, f .

若 $\bar{A} = \bar{A}(u, v, w)$ 是 (1.5) 的解, 那么 $A(x, y, z) = \bar{A}(g(x, y, z), h(x, y, z), z)$ 为 (1.2) 的解.

本文的主要定理如下:

定理 1. 当以下条件成立, 系统(1.1)有不变代数曲面.

(i) 当 $\mu = 2\sigma$ 时, 达布多项式为 $f = \frac{\alpha\beta}{\mu^2}x^2 - 2\frac{\alpha\beta}{\mu^2}z$, 余因子为 $k = -2\frac{\sigma}{\mu}$;

(ii) 当 $\gamma = 6\sigma + 2\mu, \delta = 2\frac{\sigma^2}{\mu}$ 时, 达布多项式为 $f = \frac{\alpha^2\beta^2}{\mu^4}x^4 - \frac{4\sigma^2\alpha}{\mu^2\delta}x^2z - \left(16\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 8\frac{\sigma}{\mu}\right)\frac{\gamma\alpha\beta}{\mu^2}xy - \left(4\frac{\sigma}{\delta} + 2\right)^2\frac{\alpha\beta}{\mu^2}x^2$, 余因子为 $k = -2$.

3 证明定理 1

先做变量替换

$$x = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha\beta}}X, y = \frac{\mu\sigma}{\delta\sqrt{\alpha\beta}}Y, z = \frac{\mu\sigma}{\delta\beta}Z, t = \frac{T}{\mu},$$

则系统 (1.1) 变为

$$\begin{cases} \dot{X} = cY - cX, \\ \dot{Y} = Y + rX - XZ, \\ \dot{Z} = XY - bZ. \end{cases} \quad (3.1)$$

令 $c = \frac{\sigma}{\mu}, r = \frac{\delta}{\sigma}, b = \frac{\lambda}{\mu}$, 系统 (3.1) 与经典洛伦兹系统的不同之处在于第二个方程中 Y 处的系数符号, 这里是 1, 洛伦兹系统中是 -1. 再做变量替换

$$x = \alpha^{-1}X, y = \alpha^{-2}Y, z = \alpha^{-2}Z, t = \alpha T,$$

则系统 (1.1) 变为

$$\begin{cases} \dot{X} = cY - c\alpha X, \\ \dot{Y} = -XZ + \alpha Y + r\alpha^2 X, \\ \dot{Z} = XY - b\alpha Z, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中点表示变量对 T 的导数. 为了记录方便我们依然使用 x, y, z, t 作为记号.

假设 $f(x, y, z)$ 是系统 (3.1) 的一个达布多项式, 其余因子为 $k(x, y, z)$. 则不失一般性, 我们设 $k(x, y, z) = k_0 + k_1x + k_2y + k_3z$. 令 $F(X, Y, Z) = \alpha^l f(\alpha^{-1}X, \alpha^{-2}Y, \alpha^{-2}Z)$, $K(X, Y, Z) = \alpha^2 k(\alpha^{-1}X, \alpha^{-2}Y, \alpha^{-2}Z)$, 其中 l 为 f 的权重齐次分量中的最高权重度, (x, y, z) 的权为 $(1, 2, 2)$. 假设 $F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots + \alpha^m F_m$, 其中 F_i 是一个权值齐次多项式, 其权值为 $l - i, i = 0, 1, \dots, m, l \geq m$.

则由达布多项式定义, 我们有

$$\begin{aligned} & (cY - c\alpha x) \sum_{i=0}^m \alpha^i \frac{\partial F_i}{\partial x} + (-XZ + \alpha Y + r\alpha^2 X) \sum_{i=0}^m \alpha^i \frac{\partial F_i}{\partial y} + (XY - b\alpha Z) \sum_{i=0}^m \alpha^i \frac{\partial F_i}{\partial z} \\ &= (k_1x + k_2\alpha^{-1}y + k_3\alpha^{-1}z + \alpha k_0) \sum_{i=0}^m \alpha^i F_i. \end{aligned}$$

比较等式两边 α^{-1} 的系数, 可以证明 $k_2 = k_3 = 0$. 比较等式两边 $\alpha^i, i = 0, 1, \dots, m+2$ 的系数, 我们有

$$\begin{aligned} L[F_0] &= k_1x F_0, \\ L[F_1] &= k_1x F_1 + k_0 F_0 + cx \frac{\partial F_0}{\partial x} - y \frac{\partial F_0}{\partial y} + bz \frac{\partial F_0}{\partial z}, \\ L[F_j] &= k_1x F_j + k_0 F_{j-1} + cx \frac{\partial F_{j-1}}{\partial x} - y \frac{\partial F_{j-1}}{\partial y} + bz \frac{\partial F_{j-1}}{\partial z} - rx \frac{\partial F_{j-2}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$j = 2, 3, \dots, m+2$, 且 $j > m$ 时, $F_j = 0$. L 是线性偏微分算子

$$L = cy \frac{\partial}{\partial x} - xz \frac{\partial}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial z},$$

则与线性偏微分算子相关的特征方程为

$$\frac{dx}{dz} = \frac{cy}{xy}, \frac{dy}{dz} = \frac{-xz}{xy},$$

且方程组有通解

$$x^2 - 2cz = d_1, y^2 + z^2 = d_2,$$

其中 d_1 和 d_2 是积分常数. 做变量替换

$$u = x^2 - 2cz, v = y^2 + z^2, w = z. \quad (3.4)$$

它的逆变换是

$$x = \pm\sqrt{u + 2cw}, y = \pm\sqrt{v - w^2}, z = w. \quad (3.5)$$

在接下来的计算中, 为了方便, 我们只考虑情况 $x = \sqrt{u + 2cw}, y = \sqrt{v - w^2}, z = w$. 由变换 (3.4) 和 (3.5), (3.3) 的第一个方程为常微分方程 (对于固定的 u, v):

$$\sqrt{v - w^2} \frac{d\overline{F_0}}{dw} = k_1 \overline{F_0}, \quad (3.6)$$

其中 $\overline{F_0}(u, v, w) = F_0(x, y, z)$. 经计算,

$$\overline{F_0} = \overline{G_0} \exp\left(k_1 \arcsin \frac{w}{\sqrt{v}}\right), \quad (3.7)$$

其中 $\overline{G_0}$ 是关于 u, v 的任意光滑函数, 则为了使 F_0 是一个权值齐次多项式, 我们必须使 $k_1 = 0$, 于是有

$$F_0(x, y, z) = \overline{F_0}(u, v, w) = \overline{G_0}(x^2 - 2bz, y^2 + z^2).$$

因此, 系统 (3.1) 的每个达布多项式的余因子是一个常数. 由于 u 和 v 在 x, y, z 中的权值分别是 2 和 4, 则 F_0 的权次应为 $l = 4n$ 或 $l = 4n - 2, n \in \mathbb{N}^+$. 所以 F_0 的形式为

$$F_0 = \sum_{i=0}^n a_i (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i}, \quad (3.8)$$

此处 $l = 4n$, 或

$$F_0 = \sum_{i=1}^n a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i}, \quad (3.9)$$

此处 $l = 4n - 2$. 对于这两种不同的情况, 我们将证明分为两部分.

3.1 F_0 的形式为 (3.8)

将 F_0 带入 (3.3) 的第二个方程, 我们可以证明

$$L[F_1] = \sum_{i=0}^n (k_0 + 4ic - 2(n-i)) a_i (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i} \\ + \sum_{i=1}^n (8c^2i - 4bci) a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i} z + \sum_{i=1}^n 2(1+b)(n-i) a_i (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z^2.$$

使用变换 (3.4) 和 (3.5), 以类似求解 $\overline{F_0}$ 的方法, 我们可以得到常微分方程 (对于固定的 u, v):

$$\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2} \frac{d\overline{F_1}}{dw} = \sum_{i=0}^n (k_0 + 4ic - 2(n-i)) a_i u^{2i-1} v^{n-i} \\ + \sum_{i=1}^n (8c^2i - 4bci) a_i u^{2i-2} v^{n-i} w \\ + \sum_{i=1}^n 2(1+b)(n-i) a_i u^{2i} v^{n-i-1} w^2.$$

此方程对 w 积分, 我们得到

$$\overline{F_1} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{c} (k_0 + 4ic - 2(n-i)) a_i u^{2i} v^{n-i-1} \sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2} \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \left((8c^2 - 4bc)(i+1)a_{i+1} + \frac{1}{c} (k_0 + 4ic - 2(n-i)) a_i \right) u^{2i+1} v^{n-i-1} \int \frac{wdw}{\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2}} \\ + \frac{1}{c} (k_0 + 4cn) a_n u^{2n} v^{-1} \int \frac{wdw}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}} \\ + \sum_{i=0}^{n-1} (3k_0 + 12ic + 2(b-2)(n-i)) a_i u^{2i} v^{n-i-1} \int \frac{w^2 dw}{\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2}} + \overline{G_1}(u, v).$$

这里 $\overline{G_1}(u, v)$ 是关于 u, v 的任意光滑函数, 则为了使 F_1 是一个权次齐次多项式, 其权次为 $4n-1$, 则有 $\overline{G_1}(u, v) = 0$, 且

$$(k_0 + 4cn) a_n = 0; \\ (8c^2 - 4bc)(i+1)a_{i+1} + \frac{1}{c} (k_0 + 4ic - 2(n-i)) a_i = 0, i = 0, \dots, n-1; \quad (3.10) \\ (3k_0 + 12ic + 2(b-2)(n-i)) a_i = 0, i = 0, \dots, n-1.$$

进一步, 条件 (3.10) 可等同以下条件:

- (i) $k_0 = -4cn, b = 2c, a_n \neq 0$, and $a_i = 0$ for $i = 0, \dots, n-1$.
- (ii) $k_0 = -4cn, b = 6c + 2, c \neq \frac{1}{2}, a_{n-i} = (-4c^2)^i C_i^n a_n$, and $a_n \neq 0$.

这里对两个条件进行说明, 我们首先假设 $b = 2c$. 于是条件 (3.10) 可以被简化为:

$$\begin{aligned}(k_0 + 4n) a_n &= 0; \\ \frac{1}{c} (k_0 + 4ic - 2(n-i)) a_i &= 0, i = 0, \dots, n-1; \\ (3k_0 + 12ic + 2(b-2)(n-i)) a_i &= 0, i = 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

由第一个等式得 $k_0 = -4cn$ 或 $a_n = 0$. 当 $k_0 = -4cn, a_n \neq 0$ 时, 由第二个等式知 $a_i = 0 (i = 0, \dots, n)$, 即为条件 (i); 当 $a_n = 0$ 时, 有 $k_0 \neq -4cn$, 要使第二个式子成立必须有 $a_i = 0 (i = 0, \dots, n-1)$, 因此 $F_0 = 0$, 将 $F_0 = 0$ 代入 (3.3) 计算 $F_1 = 0$, 同理可计算出 $F_i = 0 (i = 2, \dots, n)$ 即 $F = 0$, 达布多项式不存在. 现在我们假设 $b \neq 2c$, 令 $i = 0$ 有

$$\begin{aligned}(k_0 + 4cn) a_n &= 0; \\ 4c(2c - b)a_1 + \frac{1}{c} (k_0 - 2n) a_0 &= 0; \\ (3k_0 + 2(b-2)n) a_0 &= 0.\end{aligned}$$

由第二个等式有 $a_0 \neq 0$, 否则 $a_i = 0 (i = 0, \dots, n)$. 若 $k_0 = -4cn$, 从第三个等式我们有 $b = -1$, 而 b 是正实数, 故 $k_0 \neq -4cn$, 此时 $a_0 \neq 0$, 进而可知 $a_1 \neq 0$ 且由第三个等式知

$$3k_0 + 12c + 2(b-2)(n-1) = 0.$$

我们有 $b = 6c + 2$ 和 $k_0 = -4cn$, 而且, 从第二个等式我们可以得到 $a_{n-i} = (-4c^2)^2 C_n^i a_n$. 证明完成.

情况 (i) $k_0 = -4cn, b = 2c, a_n \neq 0$, and $a_i = 0$ for $i = 0, \dots, n-1$ 则有 $F_1 = 0, F_0 = a_n (x^2 - 2cz)^{2n}$ 由 (3.3), $j = 2$ 时, 计算得

$$L[F_2] = 0.$$

很容易证明

$$F_2 = \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i}.$$

计算可知

$$\begin{aligned}L[F_3] &= \sum_{i=1}^n (-4cn + 2c(2i-1) - 2(n-i)) a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n 2c(2i-1)(2c-b) a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i-2} (y^2 + z^2)^{n-i} z \\ &\quad + \sum_{i=1}^n 2(n-i)(1+b) a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z^2.\end{aligned}$$

使用变换 (3.4) 和 (3.5), 以类似求解 $\overline{F_0}$ 的方法, 我们得到

$$\begin{aligned}\overline{F_3}(u, v, w) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{c} (-4cn + 2c(2i-1) - 2(n-i)) a_i^{(2)} u^{2i-1} v^{n-i-1} \sqrt{u+2cw} \sqrt{v-w^2} \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{c} (-4cn + 2c(2i-1) - 2(n-i)) a_i^{(2)} + 2c(2i+1)(2c-b) a_{i+1}^{(2)} u^{2i} v^{n-i-1} \int \frac{wdw}{\sqrt{u+2cw} \sqrt{v-w^2}} \\ &+ \frac{1}{c} (-4cn + 2c(2n-1)) a_n^{(2)} u^{2n} v^{n-i-1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-12cn + 6c(2i-1) - 4(n-i) + 2(n-i)b) a_i^{(2)} u^{2i-1} v^{n-i-1} \int \frac{w^2 dw}{\sqrt{u+2cw} \sqrt{v-w^2}} + \overline{G_2}(u, v).\end{aligned}$$

其中 $\overline{G_3}(u, v)$ 是光滑函数. 由于 $F_3(x, y, z) = \overline{F_3}(u, v, w)$ 是权数为 $4n-3$ 的权齐次多项式, 我们有 $\overline{G_3}(u, v) = 0$, 且 $b = 2c$, 即

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} (-4cn + 2c(2i-1) - 2(n-i)) a_i^{(2)} &= 0; \\ \frac{1}{c} (-4cn + 2c(2n-1)) a_n^{(2)} &= 0; \\ (-12cn + 6c(2i-1) + 4(n-i)(c-1)) a_i^{(2)} &= 0, i = 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

即 $a_i^{(2)} = 0, i = 0, \dots, n$, 这就说明 $F_2 = F_3 = 0$. 通过循环计算我们可以证明 $F_i = 0, i = 4, \dots, m$. 因此, 对应的达布多项式是 $F = F_0 = a_n (x^2 - 2cz)$, 余因子为 $-2c$.

情况 (ii) $k_0 = -4cn, b = 6c + 2, c \neq \frac{1}{2}, a_n \neq 0, a_{n-i} = (-4c^2)^2 C_n^i a_n, i = 1, \dots, n$ 设 $a_n = 1$ 则有 $F_0 = \left[(x^2 - 2cz)^2 - 4c^2 (y^2 + z^2) \right]^n$. 由 (3.3), $j = 1$ 时, 计算得

$$\begin{aligned}F_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{c} (-4cn + 4ci - 2(n-i)) a_i (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i-1} xy \\ &= -\frac{4c+2}{c} \sum_{i=1}^n i (-4c^2)^i C_n^i (x^2 - 2cz)^{2(n-i)} (y^2 + z^2)^{i-1} xy \\ &= 4n \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2 (y^2 + z^2) \right)^{n-1} c(4c+2)xy.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}L[F_2] &= n((4c+2)(-4c-12c^2) + 8rc^2) \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2 (y^2 + z^2) \right)^{n-1} xy \\ &+ 16c^2(4c+2)^2 n(n-1) (y^2 + z^2) \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2 (y^2 + z^2) \right)^{n-2} xy \\ &- 16c^2(4c+2)^2 n(n-1) (x^2 - 2cz) \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2 (y^2 + z^2) \right)^{n-2} zxy.\end{aligned}$$

很容易得到 F_2 为

$$\begin{aligned} F_2 = & n((4c+2)(-4c-12c^2) + 8rc^2) \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-1} z \\ & + 16c^2(4c+2)^2 n(n-1) (y^2 + z^2) \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-2} z \\ & - 8c^2(4c+2)^2 n(n-1) (x^2 - 2cz) \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-2} z^2 \\ & + \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i}. \end{aligned}$$

由于 $F_3 = \overline{F_3}$ 是一个权次为 $4n-3$ 的权齐次多项式, 我们有 $\overline{G_3}(u, v) = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_i^{(2)} + 2n(4c+2) [rC_{n-1}^{i-1} + (4c+2)(n-1)C_{n-2}^{i-1}] &= 0, i = 1, \dots, n; \\ 16cn(3c+1)(c+1)[r - (2c+1)]C_{n-1}^i &= 0. \end{aligned}$$

要使等式成立, 需要满足 $a_i^{(2)} = -2n(4c+2) [rC_{n-1}^{i-1} + (4c+2)(n-1)C_{n-2}^{i-1}]$ 和 $r = 2c+1$, 因此我们有

$$\begin{aligned} F_2 = & C_n^2(4c(4c+2)xy)^2 \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-2} \\ & + C_n^1 \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-1} - 4(2c+1)^2 x^2 + [(4c+2)(-4c-12c^2) + 4c(6c+2)(2c+1)] z. \\ F_3 = & C_n^3(4c(4c+2)xy)^3 \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-3} \\ & + 2C_n^2 \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-2} - 4(2c+1)^2 x^2 + [(4c+2)(-4c-12c^2) + 4c(6c+2)(2c+1)] z. \end{aligned}$$

我们利用第一数学归纳法可得

$$\begin{aligned} F_i = & C_n^i(4c(4c+2)xy)^i \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-i} \\ & + 2C_n^{i-1} \left((x^2 - 2cz)^2 - 4c^2(y^2 + z^2) \right)^{n-i+1} - 4(2c+1)^2 x^2 + [(4c+2)(-4c-12c^2) + 4c(6c+2)(2c+1)] z, \end{aligned}$$

其中 $i = 1, \dots, m$, 由于 F_i 分别是权数为 $4n-i$ 的权齐次多项式, 则有不可约的达布多项式

$$f = x^4 - 4cx^2z - 4c^2y^2 + 4c(4c+2)xy - (4c+2)^2x^2.$$

3.2 F_0 的形式为 (3.9)

将 F_0 带入 (3.3) 的第二个方程, 我们可以证明

$$\begin{aligned} L[F_1] &= \sum_{i=1}^n (k_0 + 2(2i-1)c - 2(n-i)) a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n ((4c^2 - 2cb)(2i-1)) a_i (x^2 - 2cz)^{2i-2} (y^2 + z^2)^{n-i} z \\ &\quad + \sum_{i=1}^n 2(n-i)(b+1)a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z^2. \end{aligned}$$

与第 3.1 节计算方法类似, 我们得到

$$\begin{aligned} \overline{F_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{c} (k_0 + 2(2i-1)c - 2(n-i)) a_i u^{2i-1} v^{n-i-1} \sqrt{u+2cw} \sqrt{v-w^2} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \left((4c^2 - 2cb)(2i+1)a_{i+1} + \frac{1}{c} (k_0 + 2(2i-1)c - 2(n-i)) a_i \right) u^{2i} v^{n-i-1} \int \frac{w dw}{\sqrt{u+2cw} \sqrt{v-w^2}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n 3(k_0 + 6(2i-1)c + (2b-4)(n-i)) a_i u^{2i-1} v^{n-i-1} \int \frac{w^2 dw}{\sqrt{u+2cw} \sqrt{v-w^2}} + \overline{G_1}(u, v). \end{aligned}$$

这里 $\overline{G_1}(u, v)$ 是关于 u, v 的任意光滑函数, 则为了使 F_1 是一个权次齐次多项式, 其权次为 $4n-3$, 则有 $\overline{G_1}(u, v) = 0$, 且

$$\begin{aligned} \left((4c^2 - 2cb)(2i+1)a_{i+1} + \frac{1}{c} (k_0 + 2(2i-1)c - 2(n-i)) a_i \right) &= 0, i = 0, 1, \dots, n, \\ 3(k_0 + 6(2i-1)c + (2b-4)(n-i)) a_i &= 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

这里的 $a_0 = a_{n+1} = 0$, 进一步, 条件 (3.11) 可等同以下条件:

- (i) $b = 2c, k_0 = -2(2n-1)c, a_n \neq 0, a_i = 0, i = 1, \dots, n-1$.
- (ii) $b \neq 2c, F_0 = 0$.

这里对两个条件进行说明, 我们首先假设 $b = 2c$. 于是条件 (3.11) 可以被简化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} (k_0 + 2(2i-1)c - 2(n-i)) a_i &= 0, i = 1, \dots, n; \\ (3k_0 + 6(2i-1)c + (2b-4)(n-i)) a_i &= 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

则若存在 $i_0 \in 1, \dots, n-1$ 使得 $a_{i_0} \neq 0$, 则将第一个式子带入第二个等式得 $(4c+2)(n-i)a_{i_0} = 0$, 但是 c 是正实数, 因此不存在 $i_0 \in 1, \dots, n-1$ 使得 $a_{i_0} \neq 0$, 即有 $a_i = 0, i = 1, \dots, n-1$, 此时由于 $a_n \neq 0$, 有 $k_0 = -2(2n-1)c$ 即为条件 (i); 若 $b \neq 2c$, 当 $i = 0$ 时, 第二个等式变为 $(3k_0 - 6c + (2b-4)n) a_0 = 0$, 第一个式子为 $2b(2c-b)a_1 + \frac{1}{c} [k_0 - 2c - 2n] a_0 = 0$, 要使以上同时成立有 $a_0 = 0, a_1 = 0$, 或 $k_0 = 2c + 2n$. 再后一种情况下可知 $a_1 = 0$, 此时当 $i = 1$ 代入

第一个式子计算得到 $a_2 = 0$, 循环可求得 $a_i = 0 (i = 2, \dots, n)$, 此时 $F_0 = 0$, 前一种情况显然也可得 $F_0 = 0$, 即为条件 (ii);

情况 (i) $b = 2c, k_0 = -2(2n-1)c, a_n \neq 0, a_i = 0, i = 1, \dots, n-1$. 那么 $F_1 = 0$ 由 (3.3), $j = 2$ 时, 计算得

$$L[F_2] = \sum_{i=1}^n (-2rxy)(n-i)a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i-1}.$$

按照之前类似的计算, 我们能够得到

$$\frac{d\overline{F_2}}{dw} = - \sum_{i=1}^n 2r(n-i)a_i u^{2i-1} v^{n-i-1}.$$

将上式关于 w 求积分, 得到

$$\overline{F_2} = - \sum_{i=1}^n 2r(n-i)a_i u^{2i-1} v^{n-i-1} w + \overline{G_2}(u, v),$$

其中 $\overline{G_2}(u, v)$ 是光滑函数. 由于 $F_2(x, y, z) = \overline{F_2}(u, v, w)$ 是权数为 $4n-4$ 的权齐次多项式, 我们有

$$\begin{aligned} F_2 = & - \sum_{i=1}^{n-1} 2r(n-i)a_i (x^2 - 2bz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i-1}. \end{aligned}$$

这里 $a_i^{(2)}, i = 0, 1, \dots, n-1$ 是实常数. 由 (2.3), $j = 3$ 时, 计算得

$$\begin{aligned} L[F_3] = & \sum_{i=1}^{n-1} (-2(2n-1)c - 8rc(n-i)i + 4r(n-i)(n-i-1))a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} ((-8rc^2(n-i)2i-1) + 8rc^2(n-i)(2i-1)) a_i (x^2 - 2cz)^{2i-2} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-4r(n-i)(n-i-1) - 8rc(n-i)(n-i-1))a_i (x^2 - 2cz)^{2i-1} (y^2 + z^2)^{n-i-2} z^3 \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} (-2(2n-1)c + 4ic)a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i-1} \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} 2(1+2c)(n-i-1)a_i^{(2)} (x^2 - 2cz)^{2i} (y^2 + z^2)^{n-i-1} z, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
\overline{F}_3(u, v, w) = & \sum_{i=1}^{n-1} (-2(2n-1)c - 8rc(n-i)i + 4r(n-i)(n-i-1))a_i u^{2i-1} v^{n-i-1} \int \frac{wdw}{\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2}} \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} (-8rc^2(n-i)2i-1) + 8rc^2(n-i)(2i-1) \left. \right) a_i u^{2i-2} v^{n-i-1} \int \frac{w^2 dw}{\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2}} \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} (-4r(n-i)(n-i-1) - 8rc(n-i)(n-i-1))a_i u^{2i-1} v^{n-i-2} \int \frac{w^3 dw}{\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2}} \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{c} (-2(2n-1)c + 4ic)a_i^{(2)} u^{2i} v^{n-i-2} \sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2} \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} (2(1+2c)(n-i)a_{i+1}^{(2)}a_i^{(2)}) u^{2i} v^{n-i-2} \int \frac{wdw}{\sqrt{u+2cw}\sqrt{v-w^2}} \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} 3(-2(2n-1)c + 4ic)a_i^{(2)} u^{2i} v^{n-i-2}.
\end{aligned}$$

由于 F_3 是权数为 $4n-5$ 的权齐次多项式, 则有 $\overline{G}_3(u, v) = 0$, 且

$$\begin{aligned}
& (-8rc^2(n-i)2i-1) + 8rc^2(n-i)(2i-1) a_i = 0, i = 1, \dots, n-1 \\
& (-4r(n-i)(n-i-1) - 8rc(n-i)(n-i-1))a_i = 0, i = 1, \dots, n-1 \\
& 2(1+2c)(n-i)a_{i+1}^{(2)}i^{(2)} = 0, i = 0, \dots, n-1 \\
& 3(-2(2n-1)c + 4ic)a_i^{(2)} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

这表明 $F_3 = 0$, 且有 $a_i^{(2)} = 0 (i = 0, \dots, n-1)$, $a_i = 0 (i = 1, \dots, n-1)$ 则 $F_2 = 0$, 循环计算, 可以得到 $F_i = 0, i = 4, \dots, m$. 由此可得, 系统 (3.1) 的达布多项式为 $a_n (x^2 - 2cz)^{2n-1}$, 余因子为 $-2(2n-1)c$. 则相应的不可约达布多项式为 $f = x^2 - 2cz$.

情况 (ii) $b \neq 2c, F_0 = 0$. 显然易见, 这种情况下, 系统 (2.1) 没有达布多项式.

由上述分析知系统 (3.1) 有 2 个不可约达布多项式, 分别是 $x^2 - 2cz$ 与 f , 对应的余因子为 $-2c$ 与 -2 . 将其用最初的变量替换进行变换得当 $\gamma = 2\sigma$ 时, 达布多项式为 $f = \frac{\alpha\beta}{\mu^2}x^2 - 2\frac{\alpha\beta}{\mu^2}z$, 余因子为 $k = -2\frac{\sigma}{\mu}$; 当 $\gamma = 6\sigma + 2\mu, \delta = 2\frac{\sigma^2}{\mu}$ 时, 达布多项式为 $f = \frac{\alpha^2\beta^2}{\mu^4}x^4 - \frac{4\sigma^2\alpha}{\mu^2\delta}x^2z - \left(16\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 8\frac{\sigma}{\mu}\right)\frac{\gamma\alpha\beta}{\mu^2}xy - \left(4\frac{\sigma}{\delta} + 2\right)^2\frac{\alpha\beta}{\mu^2}x^2$, 余因子为 $k = -2$; 即可证明定理 1.

3.3 总结

本文使用加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 研究了 *The Shapovalov* 中型企业模型的达布多项式和不变量代数曲面问题. 最终得到, 在适当的参数条件下, 得到了 *The Shapovalov* 中型企业模型的两类不变代数曲面.

4 无穷远点分析

上面 2 节我们分析了系统(1.1)的不变代数曲面, 并得出系统有两个不变代数曲面, 为了研究系统在不变代数曲面上的动力学行为, 我们考虑对三维系统无穷远点的分析. 因此本文利用 *Poincaré* 紧化首先对系统(1.1)的无穷远点情况进行分析.

4.1 *Poincaré* 紧化

对这一方法我们在 [24] 中可以获得更多细节. 在 \mathbf{R}^3 中考虑下列多项式微分系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z),\end{aligned}\tag{4.1}$$

或者此系统等价的向量场 $X = (P_1, P_2, P_3)$. X 的次数定义为 $n = \max \{ \deg(P_i) : i = 1, 2, 3 \}$, 设 $S^3 = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : \|y\| = 1\}$ 为 \mathbf{R}^3 的单位球, $S_+ = \{y \in S^3 : y_4 > 0\}$ 和 $S_- = \{y \in S^3 : y_4 < 0\}$ 分别为 S^3 的南北半球. \mathbf{R}^3 在点 y 处的切空间用 $T_y S^3$ 表示, 并且

$$T_{(0,0,0,1)} S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 1) \in \mathbf{R}^4 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3\}.\tag{4.2}$$

令 $f_+ : \mathbf{R}^3 = T_{(0,0,0,1)} S^3 \rightarrow S_+$ 与 $f_- : \mathbf{R}^3 = T_{(0,0,0,1)} S^3 \rightarrow S_-$ 是被 $f_{\pm}(x) = \pm \frac{(x_1, x_2, x_3, 1)}{\Delta(x)}$ 的中心投影, 这里的 $\Delta(x) = \left(1 + \sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 利用这些投影, \mathbf{R}^3 被分为南半球和北半球, 它的赤道为 $S^2 = \{y \in S^3 : y_4 = 0\}$. 在 S^3 上定义 f_{\pm} , 其中 $Df_+ \circ X$ 在北半球, $Df_- \circ X$ 在南半球. 由于 S^3 是一个可微流形, 为了计算 $p(X)$ 的表达式, 我们可以考虑 8 个局部图 $(U_i, F_i), (V_i, G_i)$, 其中

$$U_i = \{y \in S^3 : y_i > 0\} \text{ and } V_i = \{y \in S^3 : y_i < 0\}, i = 1, 2, 3, 4$$

当 $i = 1, 2, 3, 4$ 时, 差分同构 $F_i : U_i \rightarrow \mathbf{R}^3$ 和 $G_i : V_i \rightarrow \mathbf{R}^3$ 是原点到切线超平面在点 $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0)$ 和 $(0, 0, 0, \pm 1)$ 的中心投影的逆. 现在我们对 U_1 做计算. 设 S_3 在 $(1, 0, 0, 0)$ 处的切线超平面上的原点 $(0, 0, 0, 0)$ 、点 (y_1, y_2, y_3, y_4) 、点 $(1, z_1, z_2, z_3)$ 是共线的. 我们有

$$\frac{1}{y_1} = \frac{z_1}{y_2} = \frac{z_2}{y_3} = \frac{z_3}{y_4}.$$

因此在 U_1 上定义了坐标 $F_1(y) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1} \right) = (z_1, z_2, z_3)$. 有

$$DF_1(y) = \begin{pmatrix} -\frac{y_2}{y_1^2} & \frac{1}{y_1} & 0 & 0 \\ -\frac{y_3}{y_1^2} & 0 & \frac{1}{y_1} & 0 \\ -\frac{y_4}{y_1^2} & 0 & 0 & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix}$$

和 $y_4^{n-1} = \left(\frac{z_3}{\Delta(z)^{n-1}} \right)$, 则 $p(X)$ 在局部图 U_1 上的解析向量场变为

$$\frac{z_3^n}{\Delta(z)^{n-1}} (-z_1 P_1 + P_2, -z_2 P_1 + P_3, -z_3 P_1),$$

这里的 $P_i = P_i \left(\frac{1}{z_3}, \frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right)$.

利用相似的方法, 我们可以推导出 $p(X)$ 在局部图 U_2 上的解析向量场

$$\frac{z_3^n}{\Delta(z)^{n-1}} (-z_1 P_3 + P_1, -z_2 P_2 + P_3, -z_3 P_2)$$

这里的 $P_i = P_i \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right)$. $p(X)$ 在局部图 U_2 上的解析向量场

$$\frac{z_3^n}{\Delta(z)^{n-1}} (-z_1 P_3 + P_1, -z_2 P_3 + P_2, -z_3 P_3),$$

在 U_4 中, $p(X)$ 的表达式是 $z_3^{n+1} (P_1, P_2, P_3)$, 在局部图 V_i 中, $p(X)$ 的表达式等于 U_i 中的 $p(X)$ 乘以 $(-1)^{n-1}$, 其中 n 是 X 的次数.

对时间进行缩放我们可以省略向量场 $p(X)$ 表达式中的公因数 $\frac{1}{(\Delta z)^{n-1}}$. 这里的 $P_i = P_i \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3}, \frac{1}{z_3} \right)$.

从现在开始, 我们只考虑 $p(X)$ 从北半球到 $y_4 = 0$ 的正交投影. 由封闭的北半球的投影是一个半径为 1 的封闭球, 用 B 表示, 其内部与 R_3 是微分的, 其边界 S_2 对应于 R_3 上的无穷远. $p(X)$ 是以这样的方式定义在整个封闭球 B 上, 使边界上的流是不变的. $p(X)$ 在 B 上诱导的向量场称为 X 的 *Poincaré* 紧化, B 称为 *Poincaré* 球. 在任意局部图 U_i 和 V_i 的坐标中, 不变球面 S_2 的无穷远上的所有点都有 $z_3 = 0$. 为了简化符号 $(z_1, z_2, z_3) = (u, v, w)$.

4.2 主要过程

在本节中, 我们使用上节介绍的技术, 通过分析系统在局部图 U_i 和 V_i 中的 *Poincaré* 紧化, 研究系统 (1.1) 在无穷远的流, 其中 $i = 1, 2, 3$. 注意, 因为 V_i 中的压紧向量场 $p(X)$ 与 U_i

中的向量场 $p(X)$ 乘以 -1 是一致的, 所以局部图 v_i 中的流与局部图 U_i 中的流是相同的. 因此, 这里我们只研究局部图 U_i 上的流, 其中 $i = 1, 2, 3$.

4.2.1 U_1 中的紧化

通过 Sec.4.1 的描述, 对系统(1.1)做变换

$$x = \frac{1}{w}, \quad y = \frac{u}{w}, \quad z = \frac{v}{w},$$

则有

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu(1+u) - \frac{\beta v}{w} + u(\sigma - \beta u), \\ \dot{v} = -\gamma v + \frac{\alpha u}{w} - v\sigma + \beta v u, \\ \dot{w} = \sigma w - \beta w u. \end{cases} \quad (4.3)$$

再做时间尺度变换 $\tau = wt$, 系统(1.1)在 U_1 中等价于

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu(1+u)w - \beta v + uw(\sigma - \beta u), \\ \dot{v} = -\gamma v w + \alpha u - v w \sigma + \beta v u w, \\ \dot{w} = \sigma w^2 - \beta u w^2. \end{cases} \quad (4.4)$$

由 $w = 0$ 对应于球面 S^2 上的无穷远点, 因此上述系统变为

$$\begin{cases} \dot{u} = -\beta v, \\ \dot{v} = \alpha u. \end{cases} \quad (4.5)$$

由于系统的 Jacobian 矩阵有特征值 $\pm\sqrt{\alpha\beta}$, 并且有首次积分 $h(u, v) = -(\alpha u^2 + \beta v^2)$ (限制在 U_1 上), 即这个系统的原点是唯一的中心型奇点.

4.2.2 U_2 中的紧化

再次通过 Sec.4.1 的描述, 对系统(1.1)做变换

$$x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{1}{w}, \quad z = \frac{v}{w},$$

则有

$$\begin{cases} \dot{u} = -\sigma + \beta u + u\left(-\mu u - \mu + \frac{\beta u v}{w}\right), \\ \dot{v} = -\gamma v + \frac{\alpha u}{w} + v\left(-\mu u - \mu + \frac{u v \beta}{w}\right), \\ \dot{w} = -\mu u w - \mu w + u v \beta. \end{cases} \quad (4.6)$$

再做时间尺度变换 $\tau = w t$, 系统(1.1)在 U_2 中等价于

$$\begin{cases} \dot{u} = -\sigma w + \beta u w + u w \left(-\mu u - \mu + \frac{\beta u w}{w} \right), \\ \dot{v} = -\gamma v w + \alpha u + v w \left(-\mu u - \mu + \frac{u w \beta}{w} \right), \\ \dot{w} = -\mu u w^2 - \mu w^2 + u v w \beta. \end{cases} \quad (4.7)$$

系统限制在 $w = 0$ 上变为

$$\begin{cases} \dot{u} = \beta u^2 v, \\ \dot{v} = \alpha u + \beta u v^2. \end{cases} \quad (4.8)$$

这个系统的曲线 $u = 0$ 充满了奇点.

4.2.3 U_3 中的紧化

如前所述, 对系统(1.1)做变换

$$x = \frac{u}{w}, \quad y = \frac{v}{w}, \quad z = \frac{1}{w},$$

再做时间尺度变换 $\tau = w t$, 系统(1.1)在 U_3 中等价于

$$\begin{cases} \dot{u} = -\sigma u w + \beta v w + u(-\gamma w + \alpha u w), \\ \dot{v} = \mu u w + \beta v w - \beta u w + v(-\gamma w + \alpha u w), \\ \dot{w} = -\gamma w^2 + \alpha u v w. \end{cases} \quad (4.9)$$

系统限制在 $w = 0$ 上变为

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u^2 v, \\ \dot{v} = -\beta u + \alpha u v^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

这个系统的曲线 $u = 0$ 充满了奇点. 因此我们可以得到图所示的相对图像 (1).

5 在不变曲面上的动力学分析

从第三节中我们得到了系统(1.1)的两个不变代数曲面, 为了了解具有不变代数曲面的系统的动力学, 我们需要在不变曲面上进行研究.

我们以 $f = \frac{\alpha\beta}{\mu^2}x^2 - 2\frac{\alpha\beta}{\mu^2}z$, 余因子为 $k = -2\frac{\sigma}{\mu}$ 为例. 系统被限制为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \delta y = P(x, y, z), \\ \dot{y} = \mu x + \mu y - \frac{\alpha\beta}{2\delta}x^3 = Q(x, y, z). \end{cases} \quad (5.1)$$

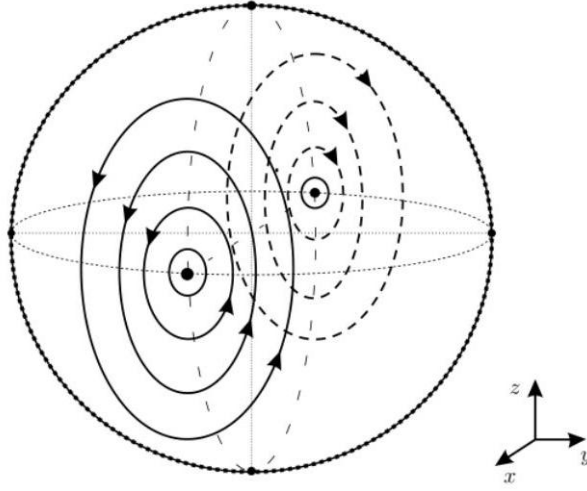


图 1: 无穷远处的相图

因此此系统的散度为

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\sigma + \mu.$$

情况 (i) $\sigma = \mu$. 此时系统 (5.1) 的散度为 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\sigma + \mu = 0$, 系统简化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \delta y = P(x, y, z), \\ \dot{y} = \mu x + \mu y - \frac{\alpha\beta}{2\delta}x^3 = Q(x, y, z). \end{cases} \quad (5.2)$$

首次积分

$$\left\{ H(x, y) = -\frac{1}{2}(\mu x^2 - \delta y^2) + \mu xy - \frac{\alpha\gamma}{\gamma}x^4. \right. \quad (5.3)$$

因此, 系统 (5.2) 没有极限环. 为了进一步了解系统 (5.2) 的动力学行为, 我们研究它的奇异点情况.

有计算可得系统 (5.2) 的三个平衡点 $O(0, 0)$, $A\left(\sqrt{2T_1}\frac{\delta}{\mu}\sqrt{2T_1}\right)$, $B\left(-\sqrt{2T_1}-\frac{\delta}{\mu}\sqrt{2T_1}\right)$, 这里的 $T_1 = \frac{\delta}{\alpha\beta}\left(\mu + \frac{\mu^3}{\delta}\right)$. 我们可以通过首次积分来检验 O 点是鞍点, A, B 点是中心. 因此, 从 $H(x, y)$ 的对称性我们得到图 2 中给出的局部相位图.

情况 (ii) $\sigma \neq \mu$. 由 Bendixson -Dulac 判别法, 取 $B(x, y) \equiv 1$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\sigma + \mu$$

不变号, (5.2) 在此种情况下没有极限环. 下面我们研究 (5.2) 的奇异点情况:

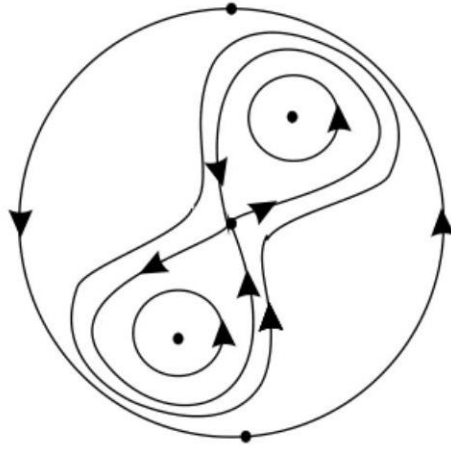


图 2: $\sigma = \mu$

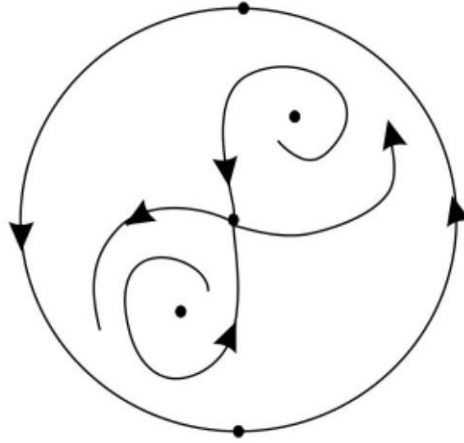


图 3: $\sigma \neq \mu$

引理 1. 令 $T_2 = \frac{\mu(\sigma+\delta)}{\alpha\beta}$, $T_3 = -\sigma + \mu$, $\theta = \sigma^2 - \sigma\mu + \mu^2 - 8\mu\delta$, 显然 $T_2 > 0$. 系统的平衡点分别是 $O(0,0)$, $A\left(\sqrt{2T_2}, \frac{\sigma}{\delta}\sqrt{2T_2}\right)$, $B\left(-\sqrt{2T_2}, -\frac{\sigma}{\delta}\sqrt{2T_2}\right)$. (1) 若 $T_3 > 0, \theta < 0$ ($T_2 < 0, \theta < 0$), O 是鞍点, A, B 是不稳定 (稳定) 的焦点; (2) 若 $T_3 > 0, \theta \geq 0$ ($T_2 < 0, \theta \geq 0$), O 是鞍点, A, B 是不稳定 (稳定) 的节点.

证明: 得到 (5.2) 的三个平衡点是容易的, 且将 O, A, B 点分别代入 Jacobian matrix 求得对应的特征值为

$$\begin{cases} O : \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(T_3 \pm \sqrt{4\delta\mu + \mu^2 - 2\mu\sigma + \sigma^2 + 4\sigma\mu} \right), \\ A, B : \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(T_3 \pm \sqrt{\theta} \right). \end{cases}$$

显然 O 在参数都为正数得条件下, 特征值为一正一负的实数, 即 O 鞍点. 对于 A, B , 当 $T_3 > 0, \theta < 0$ ($T_2 < 0, \theta < 0$) 时, A, B 的两个特征值是实部大于 0 (小于 0) 的虚数, 且虚部大于 0, 此时 A, B 是不稳定 (稳定) 的焦点. 同理当 $T_2 > 0, \theta \geq 0$ ($T_3 < 0, \theta \geq 0$) 时, A, B 是不稳定 (稳定) 的焦点. 最后我们研究了无穷远处的奇点. 通过 *Poincaré* 紧化得到系统在无穷远处有一个唯一的奇点, 它位于系统轴的两端. 考虑变量替换 $x = \frac{1}{v}, y = \frac{u}{z^2}$ 和时间尺度变换 $\tau = v^{-1}t$, 我们有

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu v^2 + \mu u z^2 - \frac{\alpha\beta}{2\delta} + 2u(\theta v - \delta u), \\ \dot{v} = \theta v^2 - \delta u v. \end{cases} \quad (5.4)$$

它在 $v = 0$ 上没有奇点, 且在其逆时间上也得到同样的结论. 做同样的变换, 补齐最后, 我们得到了系统(1.1)在不变代数曲面上的动力学拓扑描述, 见图 2 和图 3.

6 结论

本文通过高中所学微积分内容, 拓展学习了动力学理论, 使用加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 研究了 *The Shapovalov* 中型企业模型的达布多项式和不变代数曲面问题. 由于不变代数曲面的集合意义, 我们将系统的动力学行为限制在了不变代数曲面上, 并对其降维后的动力学行为进行了分析, 利用 \mathbf{R}^3 中的多项式向量场的 *Poincaré* 紧化, 给出了它在无穷远点 *Poincaré* 球面上的完整描述, 对研究系统的定性行为与动力学现象极具现实意义.

7 致谢

- (1) 不变代数曲面的研究源于代数几何学科. 代数几何是几何学的一个分支, 它利用代数工具和方法来研究几何对象. 代数几何的起源可以追溯到 17 世纪. 当时, 法国数学家 René Descartes 引入了坐标系的概念, 将代数和几何联系在一起. 他发展了解析几何, 通过代数方程来描述几何对象, 例如平面、曲线等. 这为后来的代数几何奠定了基础. 19 世纪初, 法国数学家 Augustin-Louis Cauchy 和 Jean-Victor Poncelet 等人对代数几何进行了深入研究. 他们提出了投影几何的概念, 并将代数式与点集之间的关系进行了系统化的研究. 随着时间的推移, 代数几何逐渐发展壮大, 并与其他数学分支相互交叉. 其中一个重要的发展方向就是不变代数曲面的研究. 不变代数曲面是由代数变换保持不变的曲面, 它是代数几何中的一个重要研究对象. 19 世纪末和 20 世纪初, 意大

利数学家 Luis Bianchi 和法国数学家 Elie Cartan 等人对不变代数曲面进行了深入研究. 他们发展了一种基于对称性和变换群的方法, 用于研究不变代数曲面的性质和分类. 此后, 不变代数曲面的研究得到了持续发展, 并且在数学的其他领域中也有广泛的应用. 例如, 在微分几何、群论、物理学等领域, 不变代数曲面的概念和方法被广泛应用, 为相关领域的研究提供了重要工具和框架. 因此, 不变代数曲面的研究源于代数几何的发展历程, 是代数几何中的一个重要研究方向. 它通过代数方法来描述和研究几何对象, 在数学和其他领域中具有广泛的应用价值. 受到启发, 我们决定用代数和动力学的的方法来研究不变代数曲面与限制其上的动力学行为.

- (2) 每一个队员在论文撰写中承担的工作以及贡献:
两位队员在论文撰写中平分工作, 共同探讨课题, 进行计算证明等工作.
- (3) 指导老师与学生的关系, 在论文写作过程中所起的作用: 一位指导老师在论文选题, 方向指引, 论文架构上进行指导, 对论文总体框架与内容进行指导.
是否有偿: 无偿.
- (4) 他人协助完成的研究成果: 无.

参考文献

- [1] LORENZ E. Deterministic nonperiodic flow. J Atmos Sci 1963; 20(2):130-41.
- [2] BEHABIB J, NISHIMURA K. The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multi sector models of optimal economic growth. J Econ Theory, 1979 ; 21: 421-44.
- [3] BROCK WA, HOMMES CH. A rational route to randomness. 1997 ; 65: 1059-95.
- [4] DAY RH. Complex economic dynamics: obvious in history, generic in theory
- [5] BAENETT WA, ERYILMAZ U Hopf bifurcation in the Clarida, Gali, and Gertler nodel. Econ Model 2013;31:401-4.
- [6] BAENETT WA, ERYILMAZ U. An analytical and numerical search for bifurcations in open economy New Keynesian models. Macroecon Dyn 2016;20:482-503.

- [7] HOMMES C. Handbook of Computational Economics, 2. Elsevier; 2006. p. 1109-86. Ch. 23
- [8] TIWARIA AK, GUPTAC R. Chaos in G7 stock markets using over one century of data: a note. Res Int Bus Finance 2019, 47: 304-10.
- [9] BORGHEZAN M, RECH PC. Chaos and periodicity in Vallis model for El Nino. Chaos Solitons & Fractals, 2017, 97:15-18.
- [10] PILYUGIN SY. Shadowing in dynamical systems. Springer; 2006.
- [11] ALEXEEVA T A, BARNETT W A, KUZNETSOV N V, et al. Dynamics of the Shapovalov mid-size firm model[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 140: 110239.
- [12] DARBOUX G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré(mélanges) [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 1878, 2(10): 60-200.
- [13] LABRUNIE S. On the polynomial first integrals of the (a, b, c) Lotka-Volterra system [J]. Journal of Mathematical Physios, 1996, 37(11): 5539-5550.
- [14] OLLAGNIER J M. Rational integration of the Lotka-Volterra system[J]. Bulletin of Mathematical Sciences, 1999, 123(6): 437-466.
- [15] LLIBRE J, ZHANG X. Invariant algebraic surfaces of the Rikitake system [J]. Journal of Physios A: Mathematical and Theoretical, 2000, 33(42): 7613-7635.
- [16] LLIBRE J, ZHANG X. Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system[J]. Journal of Mathematical Physics, 2002, 43(3): 1622-1645.
- [17] SWINNERTON-DYER P. The invariant algebraic surfaces of the Lorenz system [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2002, 132(3): 385-393.
- [18] LU T H, ZHANG X. Darboux polynomials and algebraio integrability of the Chen system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2007, 17(8): 2739-2748.
- [19] DENG X J, CHEN A Y. Invariant algebraic surfaces of the Chen system [J]. International Journal of Bifuroation and Chaos, 2011, 21(6): 1645-1651.

- [20] MURILO O, LLIBRE J, CLAUDIA V. Invariant algebraic surfaces and Hopf bifurcation of a finance model[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(12): 1850150.
- [21] YBAR I K, AYBAR O O, DUKARIO M, et al. Dynamical analysis of a two prey-one predator system with quadratic self interaction [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 333(15): 118-132.