

参赛队员姓名： 吕亦佳

中 学： 华东师范大学附属第二中学

省 份： 上海

国 家/地 区： 中国

指导教师姓名： 张晓东

指导教师单位： 上海交通大学数学科学学院

论 文 题 目： 基于抛物线方程和微分方程的

游泳出发起跳问题的数学模型与分析

# 基于抛物线方程和微分方程的 游泳出发起跳问题的数学模型与分析

吕亦佳

邮箱: lvyijia2005@outlook.com

华东师范大学附属第二中学

## 摘要

游泳既是一项全民健身运动,也是一项竞技体育活动,极具参与性和观赏性。出发起跳是游泳中的一个重要环节,直接影响了运动员的个人成绩。本文旨在研究起跳角度对个人游泳成绩的影响,为运动员提供个性化的最优起跳角度。目前,游泳起跳问题的研究基本上基于数据采集,少量研究基于简单的数学模型和粗糙的分析。这两种研究方法都无法针对运动员的个人数据提供个性化的指导。本文从游泳的基本过程出发,利用牛顿力学定律进行人体受力分析,通过理论推导,建立了两个数学模型,即抛物线和微分方程模型。最后,根据运动员的体重、起跳速度、游泳速度、身高等个人运动参数,通过 Mathematica 的数值求解,得到了个人的最优起跳角度,为运动员的游泳训练提供了参考。

**关键词:** 游泳出发起跳角度, 抛物线方程, 微分方程, 数值求解

## Abstract

Swimming is not only a national fitness activity, but also a competitive sport, which is very participatory and ornamental. Starting and taking off is an important process of swimming, which directly affects the individual performance of athletes. This article aims to study the impact of takeoff angle on individual performance, and provide personalized optimal takeoff angle for athletes. At present, researches on the issue of swimming takeoff are mainly based on data collection, with a small amount of researches depend on simple mathematical models and rough analysis. These researches cannot provide personalized guidance for athletes' personal actions. This article researches from the basic process of swimming and uses Newton's laws of mechanics

to analyze the forces on the human body. Through theoretical derivation, we construct two mathematical models, namely the parabolic model and the differential equation model. Finally, according to the individual sport parameters of athletes, such as weight, take-off angle, swimming speed, height, etc., we calculate the numerical solution of the optimal individual take-off angle through Mathematica, which provides a reference for the swimming training of athletes.

**Keywords:** The swimming take off angle, parabolic equation, differential equation, numerical calculation

# 目录

<b>1</b>	<b>引言</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>问题陈述</b>	<b>5</b>
2.1	相关变量与参数	5
2.2	物理关系	6
2.3	问题假设	7
<b>3</b>	<b>数学模型</b>	<b>7</b>
3.1	空中运动阶段	8
3.2	水中运动的抛物线模型	8
3.3	水中运动的微分方程模型一	10
3.4	水中运动的近似微分方程模型二	11
<b>4</b>	<b>实验部分</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>总结</b>	<b>14</b>
	参考文献	15
	致谢	16

# 1 引言

随着我国体育事业的发展，游泳运动作为全面健身运动的一项综合性运动被广泛推广，同时作为当代竞技体育的一个大项，游泳赛事极具趣味性和观赏性，深受大众的喜爱。根据文献 [8]，游泳比赛由出发、途中游、转身、终点冲刺和到边技术 5 个环节组成。游泳出发环节有时直接决定了比赛的成绩，文献 [8, 9] 全面总结了游泳出发技术的演变，以及常见的游泳跳台出发动作要领，并介绍了游泳出发中的诸多因素，例如，起跳角度、起跳时间、腾空时间、起跳速度等。

以往对以上影响游泳成绩因素的研究，大多采用了基于高速摄像机的影像采集和基于统计数据的分析的研究思路。张俊峰等人 [7] 介绍了一套游泳出发技术的生物力学测试系统，并根据运动员的真实运动采集了 20 多项运动参数，对抓台式出发和蹲踞式出发做了对比。文献 [5, 10] 分别采用了类似的研究方法对出发阶段的各项运动参数和爆发力做了采集与分析，得到了各个运动参数的均值及分布情况，提供了相关参数的推荐值，为运动员提供了指导意见。国外的学者们也一般采用这种方法来研究 [2, 3]。

基于影像采集和统计的研究方法，可以采集到大量的数据，研究高水平运动员的运动特点，并总结出各个参数的一般取值。但是这种基于统计的方法有两个明显的缺点：1) 不能深入研究各个运动参数和运动成绩之间的函数关系，没有揭示各个参数对最终成绩的重要程度。2) 不能根据运动员的基本运动参数（例如身高，体重，爆发力等），计算适合运动员自身的最优参数，为运动员提供定制化的指导。特别对非专业的运动员更没有指导意义。庄明谦等人 [6] 运用物理学知识建立了游泳出发的入水距离关于起跳角度，起跳速度，起跳高度的数学关系，运用遗传算法求解了最优参数。Abd Elazeem 等人 [1] 考虑了出发时双脚与地面的角度等参数，研究了入水距离与起跳角度、两脚的爆发力的关系，建立了数学方程，求解了入水距离最大的起跳角度为  $60^\circ$  的结论。但这两种方法建立的数学模型 [1, 6] 比较简单，分析过程比较粗糙，导致其结论无法为运动员提供个性化指导。

本文旨在研究游泳出发的起跳角度对游泳成绩的影响，建立相关的数学模型，并根据运动员的个人基本数据为其提供最合适的起跳角度，提供个性化的指导意见。本文将从游泳运动的基本过程出发，根据牛顿力学定律、抛物线方程、微分方程组等数学和物理知识，研究游泳运动的一般过程。本文中，游泳运动主要由起跳到入水、潜游、水面游三个阶段组成。运动员起跳后空中的运动轨迹建模为抛物线模型。运动员潜游的受力情况较为复杂，通过合理的假设，我们分别建立了抛物线模型和微分方程模型。水面游泳阶段人体做匀速运动。

本文剩余部分组织如下。在第2节，我们简要陈述了游泳起跳问题，相关变量和参数，基本的物理关系，以及问题的相关假设。在第3节，我们介绍了所建立的数学模型，即运动员空中运动的抛物线模型，运动员潜游阶段的抛物线模型以及微分方程模型。在第4节，基于上述建立的数学模型，根据我的个人运动数据，通过 Mathematica 软件数值求解出了抛物线模型和微分方程模型中的最优起跳角度。最后，在第5节，我们总结

了全文，提出了进一步研究的问题。

## 2 问题陈述

本问题是一个游泳出发中，求解最优出发角度的数学问题。游泳比赛的整个过程一般分为：反应、起跳、空中、入水、潜游、水面游等阶段。其中反应时间、起跳姿势、起跳角度、起跳速度、入水角度等都会影响运动员的成绩。一般的游泳基本过程如下图所示。本文将游泳运动分为三个阶段，第一阶段是从起跳到入水，期间人体主要受重力作用，忽略空气阻力的影响。此阶段人体的运动轨迹为抛物线。第二阶段是从入水到出水面的潜游阶段，期间人体主要受重力、浮力、水阻力、自身牵引力的作用，运动轨迹复杂，在不同的假设下可建立不同的模型。第三阶段是水面游过程，人体受重力、浮力、自身牵引力的作用，一般此阶段人体受力均衡，做匀速直线运动。

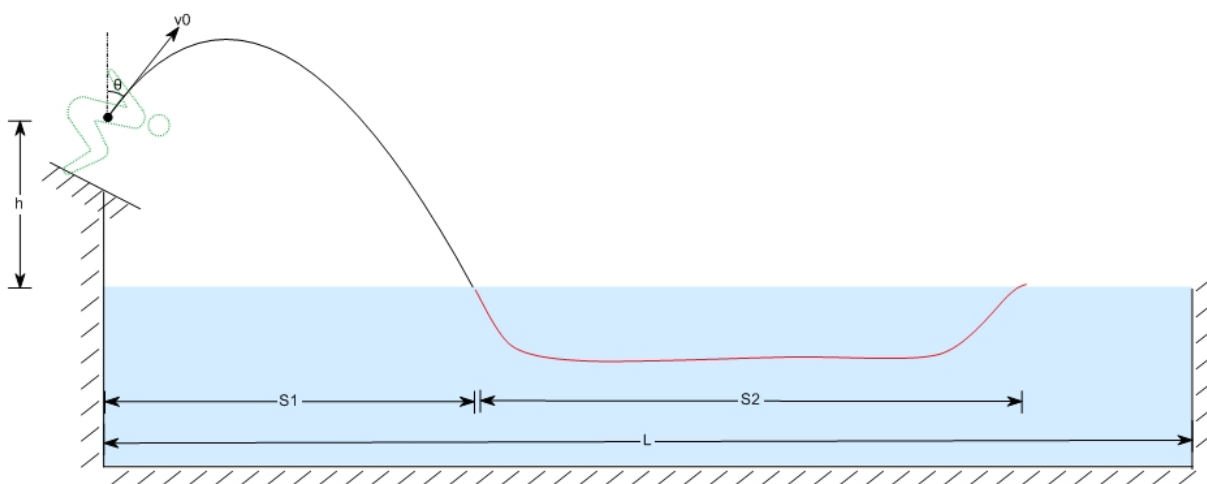


图 1: 游泳出发过程

现考虑起跳角度对运动员最终成绩的影响，即考虑最优起跳角度问题，目标是最小化全程的游泳时间。

### 2.1 相关变量与参数

本问题中，涉及到下列相关变量。

1. 起跳角度  $\theta$ ，单位为度，一般取  $63.16^\circ \sim 74.34^\circ$  [4]。
2. 入水角度  $\alpha_0$ ，单位为度，是人入水时速度方向与水平向右方向的夹角。
3. 人体质量  $m$ ，单位为  $kg$ ，一般取  $50kg \sim 70kg$ 。
4. 人体站立时，底面上的投影面积  $\bar{s}$ ，单位为  $m^2$ 。
5. 人跳台出发的速率  $v_0$ ，单位为  $m/s$ ，一般取  $3m/s \sim 5m/s$  [5, 10]。

6. 人在水面游泳的速度  $v_3$ , 单位为  $m/s$ , 一般取  $1.5m/s \sim 3m/s$ [5]。
7. 人在出发台的重心距台面高度  $h_1$ , 单位为  $m$ , 一般取  $0.45m \sim 0.55m$  [5, 10]。
8. 出发台距水面高度  $h_2$ , 单位为  $m$ , 一般取  $0.5m \sim 0.7m$ <sup>1</sup>。
9. 人在出发台的重心距水面高度  $h$ , 单位为  $m$ , 其中  $h = h_1 + h_2$ 。
10. 人在潜游时, 双腿摆动产生的向前动力为  $f_0$ , 向上的动力为  $f_1$ , 单位为  $N$ ,  $f_0$  一般取  $200N \sim 500N$  [5, 10]。
11. 游泳比赛的总距离为  $L$ , 单位为  $m$ 。
12. 第一阶段用时  $t_1$ , 单位为  $s$ 。水平位移为  $S_1$ , 单位为  $m$ 。
13. 第二阶段用时  $t_2$ , 单位为  $s$ , 水平位移为  $S_2$ , 单位为  $m$ 。

本问题中, 涉及到的常量参数如下。

1. 人体密度  $\rho_0$ , 取值为  $1.04 \times 10^3 kg/m^3$ 。
2. 水的密度  $\rho_1$ , 取值为  $1.0 \times 10^3 kg/m^3$ 。
3. 重力加速度  $g$ , 取值为  $9.80N/kg$ 。
4. 水的阻力系数  $C$  为固定值, 根据我个人的实验测试值, 取  $0.932$ <sup>2</sup>。

## 2.2 物理关系

在运动过程中人体主要受重力、浮力、水阻力的作用。以下假定向上运动为正, 水平前进方向为正。

其中, 人体重力  $G$  与质量  $m$ , 重力加速度  $g$  满足如下的重力公式

$$G = -mg. \quad (1)$$

人体受到的水的浮力  $f_2$ , 水的密度  $\rho_1$ , 重力加速度  $g$ , 浸入水中的体积  $V$  满足

$$f_2 = \rho_1 g V. \quad (2)$$

根据流体力学中的流体阻力计算公式, 人在水中游泳时收到的阻力  $f_3$ , 水的密度  $\rho_1$ , 水阻力系数  $C$ , 人体在与游行方向垂直的平面上的投影面积  $\bar{s}$ , 游泳的速度  $v$  满足

$$f_3 = \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} v^2. \quad (3)$$

本问题的目标为最小化游泳总时间  $t = t(\theta, m, \bar{s}, v_0, v_3, h, f_0, L)$ , 下面的  $t_1, t_2, S_1, S_2$  是  $\theta, m, \bar{s}, v_0, v_3, h, f_0, L$  等变量的函数。由于  $v_3$  和  $L$  在问题输入中是给定的常量, 因此

<sup>1</sup>标准游泳池尺寸, <https://zhuanlan.zhihu.com/p/483598276>。

<sup>2</sup>水的阻力系数, <https://zhidao.baidu.com/question/545646827.html>。

目标函数可以做如下转化。

$$t(\theta, m, S, v_0, v_3, h, f_0, L) = t_1 + t_2 + \frac{L - S_1 - S_2}{v_3} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow G(\theta) = v_3(t_1 + t_2) - S_1 - S_2. \quad (5)$$

我们将求解  $t$  的最小值问题转化为了求  $G(\theta)$  的最小值问题，这样不仅简化了目标，也有利于问题的求解。

本问题中，我们关心这样一个优化问题，即固定其他变量，分析游泳总时间  $t$  和  $\theta$  的关系，找到使得  $t$  取最小值的  $\theta^*$ ，一般通过  $\frac{dt}{d\theta} = 0$  来求解。

### 2.3 问题假设

1. 起跳出发阶段，将人看做是质点，起跳速度  $v_0$  大小固定，起跳角度  $\theta$  为待优化的变量。
2. 空中运动阶段，忽略空气阻力的影响，人体只受重力作用。即人在水平方向上做匀速直线运动，在竖直方向上做自由落体运动。
3. 入水阶段，人体看做是质点入水。
4. 入水时，人的水平速度  $v_0 \sin \theta > v_3$ 。由于潜游的速度比水面游有速度上的优势，所以此条对  $\theta$  的约束是合理的。
5. 潜游阶段，人体受重力、浮力、水阻力的作用。其中浮力  $f_2$  方向向上，水阻力  $f_3$ ，方向与速度方向相反。
6. 假设比赛长度  $L$  足够长，即  $S_1 + S_2 \leq L$ 。一般比赛中，运动员总会从潜游状态转为水面游，因此，这样的假设符合常理。
7. 潜游最大不超过  $15m$ ，这是游泳比赛中的一项规定。
8. 当潜游速度降低到  $v_3$  时，就浮出水面游泳。

最后两条假设是人浮出水面的条件，即达到二者任意一项就浮出水面。

由于第一阶段的运动较为简单， $t_1$  和  $S_1$  容易计算得到。而第二阶段人体受力  $f_3$  随速度不断变化，因此分析较为复杂，下面针对第二阶段人体的运动和受力，结合已学知识，给出几个模型，并进行分析。

## 3 数学模型

本节将针对本文提出的优化问题，结合已学知识，建立数学模型。第一小节根据牛顿定律，给出了第一阶段的运动时间和位移的关系式。后续三小节针对第二阶段的运动建立了不同的数学模型。首先，第二小节介绍了一个抛物线运动模型，这是一元二次函数、抛物运动的结合，描述了位移和时间的关系。其次，第三小节更加细致地分析了潜



游中人体的阻力、速率、位移的关系，建立了一个二元微分方程模型。最后，第四小节根据合理假设，介绍了另一个微分方程模型，其更容易求解。

### 3.1 空中运动阶段

在人从跳台出发到入水的过程中，人主要受重力作用的影响，因此运动加速度为  $g$ 。起跳时，人体具有水平速度  $v_0 \sin \theta$ ，竖直速度  $-v_0 \cos \theta$ 。运动位移、初速度、重力加速度、时间满足如下关系。

$$-h = v_0 \cos \theta t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (6)$$

根据公式6，解得

$$t_1 = \frac{v_0 \cos \theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}}{g}. \quad (7)$$

$$S_1 = v_0 \sin \theta t_1 = \frac{v_0 \sin \theta (v_0 \cos \theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh})}{g}. \quad (8)$$

人入水时的入水角  $\alpha_0$  满足

$$\tan \alpha_0 = -\frac{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}}{v_0 \sin \theta} \quad (9)$$

### 3.2 水中运动的抛物线模型

本模型用简单的抛物线描述人体在水下的潜游过程。设人体潜游运动的速度方向与前进方向的夹角为  $\alpha$ 。人体在前进方向和竖直方向上受到的合力  $F_0, F_1$  分别为

$$F_0 = f_0 - f_3 \cos \alpha. \quad (10)$$

$$F_1 = f_1 - f_3 \sin \alpha + f_2 - G. \quad (11)$$

本模型的假设如下。

1. 潜游阶段  $F_0$  始终为 0，即人体提供的向前的动力  $f_0$ ，随  $f_3$  和  $\alpha$  变化，见公式12。
2. 潜游阶段  $F_1$  始终不变，竖直方向的加速度始终不变，即人提供的向上的动力  $f_1$  随  $f_3$  和  $\alpha$  变化，见公式16。
3. 第二阶段运动的抛物线与第一阶段的抛物线速度连续（切向连续）。

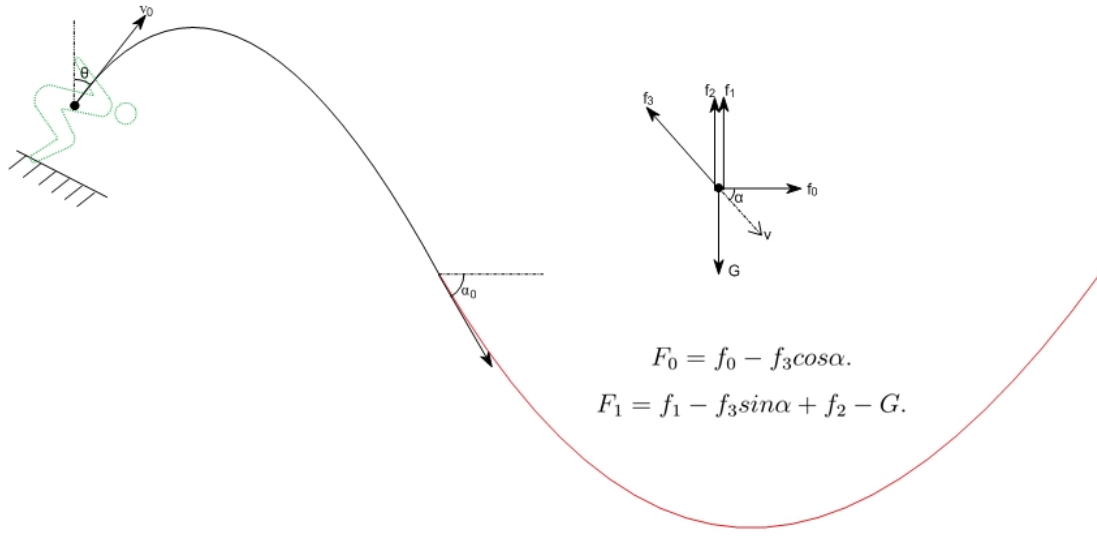


图 2: 模型一: 抛物线模型

假设 2 说明了第二阶段做抛物线型运动, 假设 3 说明两个运动过程是切向连续的, 即人体整个运动曲线是光滑的。

由于人水平方向受力  $F_0 = 0$ , 人水平方向做匀速直线运动, 而问题假设中  $v_0 \sin \theta > v_3$  保证了人水下速度始终大于  $v_3$ 。因此人浮出水面时一定满足  $S_2 = 15m$ 。同时由于  $F_0 = 0$ , 则人提供的向右的动力  $f_0$  满足如下等式。

$$f_0 = f_3 \cos \alpha. \quad (12)$$

根据牛顿第二定律, 人在水平方向上做匀速直线运动, 则

$$t_2 = \frac{15}{v_0 \sin \theta}. \quad (13)$$

根据动量定理和抛物运动的对称性有

$$F_1 t_2 = m(\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh} - (-\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh})) = 2m\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}. \quad (14)$$

根据公式11, 13和14, 解得

$$f_1 - f_3 \sin \alpha + f_2 - G = F_1 = \frac{2mv_0 \sin \theta \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}}{15}. \quad (15)$$

即人提供的向上的动力  $f_1$  满足如下等式。

$$f_1 = f_3 \sin \alpha - f_2 + G + \frac{2mv_0 \sin \theta \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}}{15} \quad (16)$$

根据公式7, 8, 13, 4和  $S_2 = 15$ , 便可得到本模型的目标。该模型中, 公式12和16对目标求解没有直接关系, 但是这对运动员在潜游阶段的发力提供了指导意见。

### 3.3 水中运动的微分方程模型一

本模型使用微分方程组准确地描述人在潜游阶段的受力、速度的关系, 准确刻画了人的运动过程。这里  $\alpha, F_0, F_1$  定义同抛物线模型。

本模型的相关假设如下。

1. 人提供的向前的动力  $f_0$  为常量, 保持不变。
2. 人提供的向上的动力  $f_1$  为常量, 保持不变。

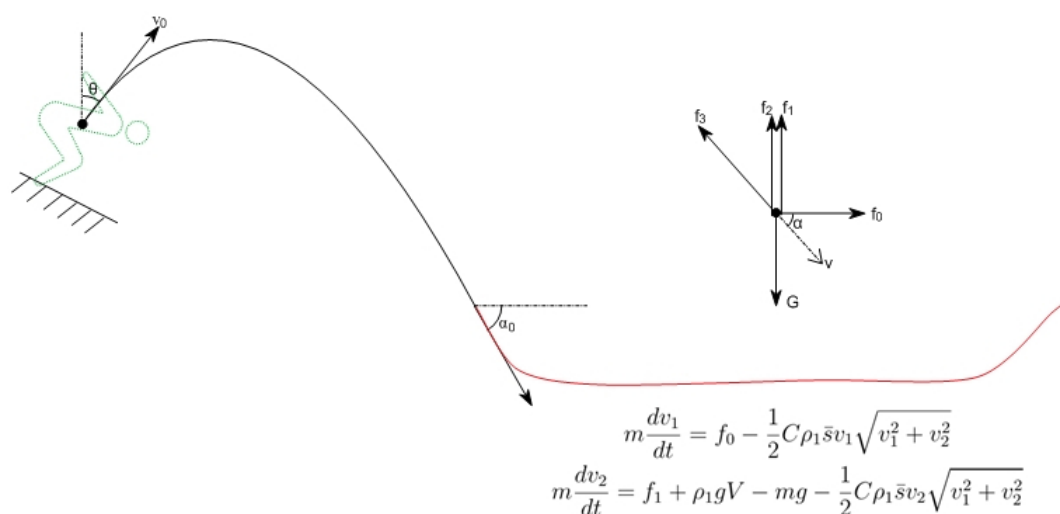


图 3: 微分方程模型一

假设潜游阶段人体向右和向上的速度分别为  $v_1 = v_1(t)$  和  $v_2 = v_2(t)$ , 则

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (17)$$

$$\tan\alpha = \frac{v_2}{v_1}, \cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \sin\alpha = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \quad (18)$$

此时,  $F_0, F_1$  如下。

$$\begin{aligned} F_0 &= f_0 - f_3 \cos\alpha \\ &= f_0 - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} (v_1^2 + v_2^2) \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ &= f_0 - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ F_1 &= f_1 - f_3 \sin\alpha + f_2 - G \\ &= f_1 + \rho_1 g V - mg - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} (v_1^2 + v_2^2) \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$= f_1 + \rho_1 g V - mg - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} v_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (20)$$

根据牛顿第二定律，在水平方向和竖直方向上， $F_0$  和  $v_1$ ， $F_1$  和  $v_2$  满足如下关系。

$$F_0 = m \frac{dv_1}{dt} \quad (21)$$

$$F_1 = m \frac{dv_2}{dt} \quad (22)$$

联立公式19，21，20，22得到如下方程组。

$$m \frac{dv_1}{dt} = f_0 - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (23)$$

$$m \frac{dv_2}{dt} = f_1 + \rho_1 g V - mg - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} v_2 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (24)$$

以上等式23和24是关于  $v_1$  和  $v_2$  的非线性微分方程组。其初值条件为  $v_1|_{t=0} = v_0 \sin \theta$ ， $v_2|_{t=0} = -\sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}$ 。最终可解得  $v_1(t)$  和  $v_2(t)$ ，又根据

$$\frac{dS}{dt} = v_1(t) \quad (25)$$

和初值条件  $S|_{t=0} = 0$  可解得水平位移  $S(t)$ 。

通过解方程  $v_1(t) = v_3$  得  $t'_2$ ，解  $S(t) = 15$  得  $t''_2$ ，则

$$t_2 = \min\{t'_2, t''_2\} \quad (26)$$

即两个出水条件满足其一就出水面。再通过  $S(t_2) = S_2$  得到位移。最后根据公式4，7，8， $t_2, S_2$ ，便可得到本模型的目标函数。

### 3.4 水中运动的近似微分方程模型二

在3.3节中建立的模型中，方程组23，24是非线性的微分方程组，在  $f_0 \neq 0$ ， $f_1 + \rho_1 g V - mg \neq 0$  时难以理论求解。因此，本小节对其进行近似处理。由于在潜游过程中，人的速度主要是水平方向，所以本部分，我们只分析水平方向的运动，竖直方向的速度和受力忽略。

本模型中的相关假设如下。

1. 人提供的向前的动力  $f_0$  为常量，保持不变，且其始终保证  $F_0 < 0$ 。
2. 水平方向的水阻力与水平方向的速度满足公式3。

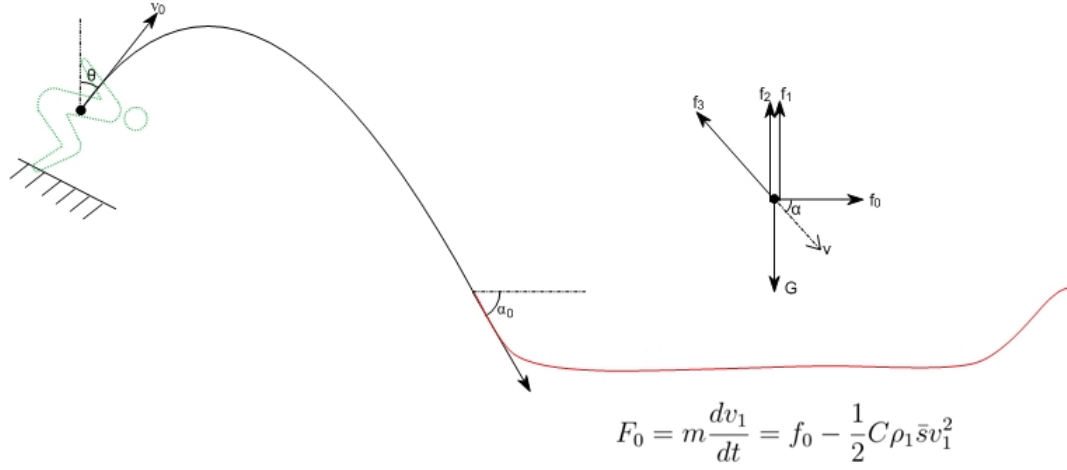


图 4: 微分方程模型二

假设潜游阶段人体向右的速度为  $v_1 = v_1(t)$ , 则

$$F_0 = m \frac{dv_1}{dt} = f_0 - \frac{1}{2} C \rho_1 \bar{s} v_1^2 \quad (27)$$

这是关于  $v_1$  的微分方程, 根据  $x > 1$  时  $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C_0$ , 其中  $C_0$  为一常数, 和初始条件  $v_1|_{t=0} = v_0 \sin \theta$  解得

$$v_1(t) = \frac{2}{\left( \frac{C_1 v_0 \sin \theta + 1}{C_1 v_0 \sin \theta - 1} e^{\frac{2C_1 f_0 t}{m}} - 1 \right) C_1} + \frac{1}{C_1} \quad (28)$$

其中  $C_1 = \sqrt{\frac{C \rho_1 \bar{s}}{2f_0}}$ 。再根据  $\frac{dS}{dt} = v_1$ ,  $\int \frac{1}{ke^t - 1} dt = \ln(ke^t - 1) - t + C_0$ , 其中  $C_0$  为一常数, 和初始条件  $S|_{t=0} = 0$ , 解得

$$S(t) = \frac{2m}{C \rho_1 \bar{s}} \ln \left( \frac{C_1 v_0 \sin \theta + 1}{2} e^{\frac{2C_1 f_0 t}{m}} - \frac{C_1 v_0 \sin \theta - 1}{2} \right) - \frac{t}{C_1} \quad (29)$$

通过解方程  $v_1(t) = v_3$  和  $S(t) = 15$  分别得到解  $t'_2$  和  $t''_2$ , 则

$$t_2 = \min\{t'_2, t''_2\} \quad (30)$$

再通过  $S(t_2) = S_2$  得到位移, 最后根据公式4, 7, 8,  $t_2, S_2$ , 便可得到本模型的目标函数。

在水平方向的受力  $F_0$ , 对比公式27和19, 可以发现本模型使用  $v_1^2$  替换了上一个模型中的  $v_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ 。一般潜游阶段的水平速度  $v_1$  比竖直速度  $v_2$  更大, 因此, 本模型中的近似处理是合理的。

## 4 实验部分

本部分使用本人游泳的相关数据，根据抛物线模型和微分方程模型二，通过 Mathematica 软件计算了适合我的最优的起跳角度。

此处，重力加速度  $g = 9.8N/kg$ ，重心距台面高度  $h_1 = 0.5m$ ，出发台面距水面高度  $h_2 = 0.7m$ ，重心距水面  $h = 1.2m$ ，水的阻力系数  $C = 0.932$ ，人体密度  $\rho_0 = 1.04 \times 10^3 kg/m^3$ ，水的密度  $\rho_1 = 0.997 \times 10^3 kg/m^3$ 。

我的相关数据主要包括：初始起跳速度  $v_0 = 4.0m/s$ ，水面游的速度  $v_3 = 1.6m/s$ ，身高  $1.7m$ ，体重  $m = 55kg$ 。根据身高体重估算出地面投影面积  $\bar{s} = 0.031m^2$ ，向前的牵引力  $f_0 = 300N$ 。

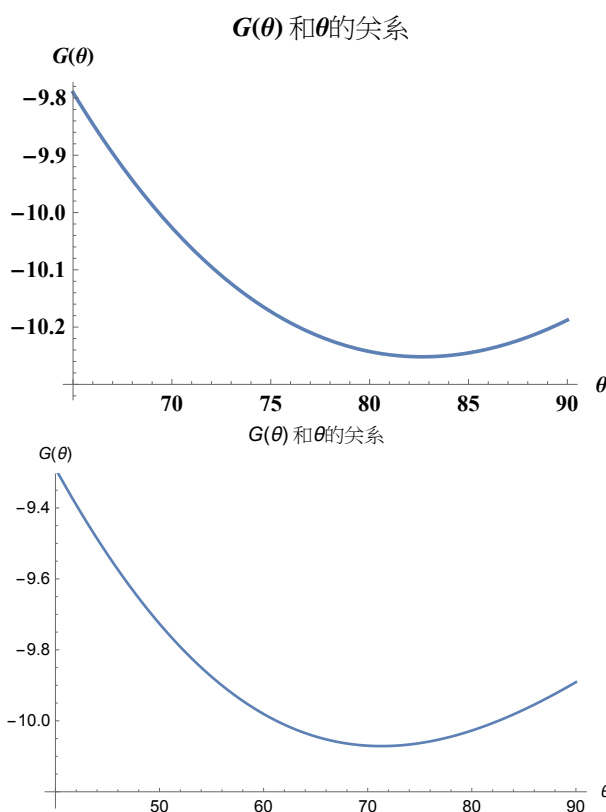


图 5: 左: 抛物线模型中  $G(\theta)$  和  $\theta$  的关系, 右: 微分方程二中的  $G(\theta)$  和  $\theta$  关系

在抛物线模型中，根据公式7, 8, 13, 4和  $S_2 = 15$ ，得到  $G(\theta)$  关于  $\theta$  的具体表达式

$$G(\theta) = \frac{v_0 \cos \theta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + 2gh}}{g} (v_3 - v_0 \sin \theta) + \frac{15v_3}{v_0 \sin \theta} - 15.$$

将  $G(\theta)$  对  $\theta$  求导，可以得到最优的  $\theta^* = 82.67^\circ$ ， $G(\theta)$  和  $\theta$  的关系用 Mathematica 软件进行绘制，见下图中左图所示。

在微分方程模型二中，根据公式4, 7, 8, 30, 29可知， $G(\theta)$  和  $\theta$  的关系较为复杂，难以直接建立这二者的关系，因此采用了数值求解的方法。对离散的  $\theta$ ，求解相应的  $t_2$ ，

进而求得  $G(\theta)$ ，这也是在 Mathematica 中完成。最终  $G(\theta_0)$  和  $\theta_0$  的关系绘制在了下图中的右图中，最优的  $\theta^* = 71.21^\circ$ 。

本文得出的最优起跳角度与文献 [4] 的推荐范围  $63.16^\circ - 74.34^\circ$  基本相符，并且本文的模型和方法可以根据运动员的个人参数为其计算适合自己的最优起跳角度。

## 5 总结

本文从个人兴趣爱好出发，提出了一个游泳运动的最优起跳角度问题。通过牛顿定律、阻力计算公式，我分析了游泳运动的一般过程、受力情况、速度、位移等情况，并结合所学知识和游泳比赛规则，通过数学推导和微积分知识，我建立了潜游阶段的抛物线模型和微分方程模型一，得到了游泳成绩与起跳角度的数学关系。通过合理假设与简化，得到了一个更合理的，更易求解的微分方程模型二。最后，结合我的个人相关参数，通过理论求解和 Mathematica 数值求解得到了相关模型的推荐起跳角度。

本文提出的模型基于游泳运动的物理分析，建立了变量与目标的数学关系，给出了具体的求解方程和方法。运动员根据个人的数据，利用这些模型，可以求出最适合自己的起跳角度，进而提供个性化指导。

## 参考文献

- [1] Khaled Abd Elmowgoud Abd Elazeem. A mathematical model for analyzing and employing static and dynamic forces for a 50 meter freestyle starting position. *The International Scientific Journal of Physical Education and Sport Sciences*, 8(1):51–67, 2020.
- [2] Sebastian Fischer and Armin Kibele. The biomechanical structure of swim start performance. *Sports biomechanics*, 15(4):397–408, 2016.
- [3] Ludovic Seifert, Julien Vantorre, Didier Chollet, Huub M Toussaint, Joao-Paulo Vilas-Boas, et al. Different profiles of the aerial start phase in front crawl. *The Journal of Strength & Conditioning Research*, 24(2):507–516, 2010.
- [4] Don S Wilson and G WAYNE Marino. Kinematic analysis of three starts. *Swimming Technique*, 19(4):30–34, 1983.
- [5] 刘鹏. 上海游泳队健将与一级运动员蹲踞式出发运动学与动力学分析. PhD thesis, 北京体育大学, 2017. 期: 11.
- [6] 庄明谦, 亓圣华. 竞技游泳出发台出发过程中各影响因素的量化分析. *济南大学学报 (自然科学版)*, (03):289–290+294, 2002.
- [7] 马保雷, 张俊峰, 仲宇. 游泳出发技术生物力学测试系统的研制与应用. *中国体育科技*, 49(01):117–121, 2013. 11-2284/G8.
- [8] 王琰, 张铭. 游泳出发技术的文献综述 (上). *中国学校体育*, (02):43–44, 2004.
- [9] 王琰, 张铭. 游泳出发技术的文献综述 (下). *中国学校体育*, (03):40–42, 2004.
- [10] 蒋臣东. 新型游泳出发台上蹲踞式出发技术的生物力学研究. PhD thesis, 西安体育学院, 2013. 期: S2.



## 致谢

本论文选题来源于本人的兴趣爱好，我从小喜欢游泳运动，一直是校游泳队成员，曾获得 2018 年上海市“万国体育-洲克杯”青少年业余游泳比赛女子 100 米自由泳第六名、2019 年上海市中小学阳光大联赛女子中学组 50 米自由泳决赛第七名、2023 年上海市中小学阳光大联赛女子中学组 25 米自由泳决赛第六名的好成绩。同时，我对数学、物理学科有浓厚的兴趣，数学、物理成绩一直名列前茅。我热爱思考，喜欢钻研问题，对数学建模有浓厚的兴趣。在平时的游泳训练中，我发现不同的起跳角度对游泳成绩有较大的影响。现有的对于起跳角度的研究往往基于统计数据的分析，没有针对运动员的个人特点提供定制化的参数推荐，我渴望根据个人的身体条件、运动参数得到最佳的起跳角度，这是本文研究的初衷和基本背景。

本文是我独立完成的。在选题阶段，我与指导老师张晓东教授进行了深入的讨论，包括：选题的可行性、文献的查阅等。在课题研究过程中，我学习了相关的微积分和微分方程的知识，掌握了 Mathematica 软件的基本功能，分析了游泳的基本过程，整理了运动过程中的相关参数，建立了游泳过程的基本模型。经过与张晓东教授的反复讨论和验证，确定了本文的基本内容，并在张晓东教授的指导下，用 Mathematica 进行了模型数值求解的编程实现。

本文是在张晓东教授的悉心指导下完成的，张晓东教授的指导是无偿的。在选题阶段，张教授提出了以最优起跳角度为核心的研究问题，并对问题研究的难度、意义进行了评估，并和我一起查阅了相关文献，了解了当前游泳起跳问题的现状。在研究过程中，张晓东教授对我建立的数学模型提出了改正意见，并对编程工作提供了指导。

在此，我要对张晓东教授悉心的指导表示由衷的感谢。