

参赛队员姓名： 王陈昊

中学： 中国人民大学附属中学

省份： 北京市

国家/地区： 中国大陆

指导老师姓名： 雷祥翠

指导老师单位： 中国人民大学附属中学

论文题目： 针对波波船发动机中相变与传热问题的建模与实验研究

针对波波船发动机中相变与传热问题的建模与实验研究

中国人民大学附属中学 王陈昊

摘要：波波船是利用管内水柱相变做功推动前进的玩具，其做功曲线呈现非常典型的周期性变化规律。为探究周期性规律产生的条件，本文首先通过对简化后的波波船发动机的预实验得出典型现象，并以此展开物理机理分析，综合动力学、传热学、热力学和流体力学分析方法建立了用于描述不同状态和阶段管内水柱运动的微分方程组，并得出用水柱运动估算热机功率的方法。然后对上述微分方程组进行了数值求解，并与实验测量数据进行对比，对理论部分忽略的繁多复杂传热进行了分析和修正。该研究可用于对利用相变提供动力的热机效率进行估计及改进。

关键词：波波船；相变；数值模拟；做功效率

目录

1. 引言.....	1
2. 预实验与典型实验现象.....	2
2.1 实验装置	2
2.2 预实验结果与初步分析	4
3. 理论模型.....	7
3.1 无上液柱时气液交界面的运动	7
3.1.1 动力学模型	7
3.1.2 热力学与传热学模型	9
3.2 有上液柱时气液交界面的运动	11
3.2.1 上液柱形成条件模型	11
3.2.2 综合运动模型	13
3.3 发动机做功效率模型	15
4. 数值模拟结果与理论修正.....	16
4.1 数值模拟结果	16
4.2 基于实验结果的复杂传热项修正	17
4.3 发动机做功效率分析	20
5. 总结与展望.....	21
参考文献.....	23

1. 引言

波波船是一种由明火推进的玩具船，船的中央立着一根 L 型的玻璃管，内部充满水，其上半部分被酒精灯的明火灼烧。不一会儿，玻璃管被灼烧的那一部分产生了气泡，随后气泡快速膨胀，将部分水挤出了向后的水平排水口，由于反作用力而使船向前移动一段距离。随后气泡消失，水又从排水口重新进入玻璃管当中。就这样一直重复着上述过程，仅仅靠着非常简单的装置就让船有了动力[1][2]。而现在轮船上较为常见的发动机是柴油发动机，其中包括进排气装置，燃料供给装置，润滑装置，冷却装置，启动装置等，结构极其复杂，造价较为昂贵[3]。我便对这种玩具船上的动力装置起了好奇，希望能研究明白其到底是如何工作的，气泡与水柱的周期运动规律以及输出的动力又与哪些参数有关。

首先将玩具船上的动力装置进行简化，由于 L 型玻璃管的下半水平部分并不受热，仅起到改变水柱排出方向的作用，因此可将 L 型玻璃管简化为一支顶部密封的竖直试管，将它灌满水后插入有水的烧杯当中，然后为了热源的稳定性和可测试性，采用电阻丝代替酒精灯的明火，将其缠绕在试管的一小段周围进行加热。过了一段时间后，装置内出现了气泡，气泡全部聚集在了管子顶端，形成了一个周期性变化且无上液柱的气泡。但是与之前玩具船上观察到的现象又有所不同。玩具船内的气泡的下液面会在下降后回升至玻璃管顶部，使气泡消失，下个周期再重现产生新的气泡。但在简化的试管实验中，有些时候这种无上液柱的气泡不会消失，而是下液面在电阻丝附近震荡。

为了解释上述各种现象产生的机理与机制，并定量分析各种现象与关键参数之间的联系，需要解决以下几个问题：(1)机理方面——从动力学、传热学、热力学、流体力学等方面入手，分析影响气泡膨胀与收缩等现象的关键因素。(2)计算方面——建立描述液面与气泡运动的微分方程组，并利用有效的数值求解方法对其进行计算。(3)实验方面——在有限的实验条件下，尽量建立起能有效控制误差的测试方案，并利用控制变量的方法进行测试。

为了解决这些问题，本文首先开展了预实验工作，通过观察现象进行了初步的定性分析。然后结合前人对于类似情况的研究，进一步建立了对应各种现象的理论模型和数值求解方法。并整理现有的实验器材，在现有条件下对理论计算中获得的几个关键变量进行重复测量，并合理选择实验环境，尽量排除难以控制的

额外影响因素。

本文的结构如下：通过少量的预实验观察典型现象——从现象出发展开机理分析——通过机理分析，基于合理假设建立起物理图像——基于物理图像建立对应的数学模型(微分方程)——利用模型开展不同变量的研究——利用实验来修正自己模型——最后利用模型研究了热机效率。

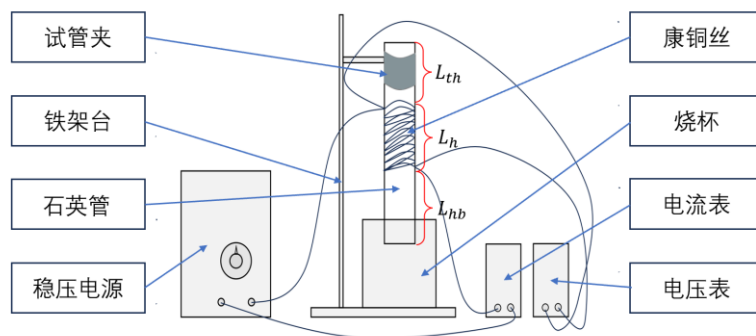
本文的创新点在于：尝试使用动力学模型作为描述液柱运动的框架，而并非直接引用气体状态方程分析热机循环。在动力学模型的大框架下，用热力学分析定量其中的吸放热项。这样做的好处有以下几点：

1. 由于模型建立在受力分析之上，因此可以帮助直观理解液柱运动的原因，反应热机做功的力学本质。
2. 可以得到与实验相符合的、由于物体惯性引起的微小震荡。
3. 得到的模型易于修正，只需要对吸放热项进行分析或拟合改进即可。

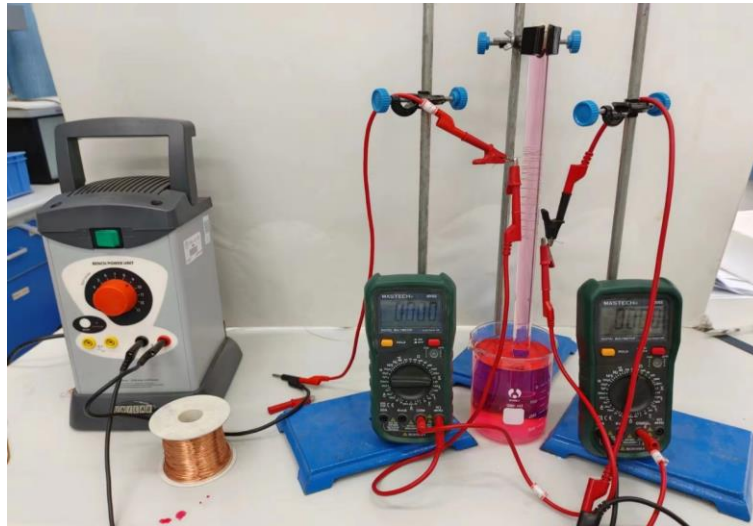
2. 预实验与典型实验现象

2.1 实验装置

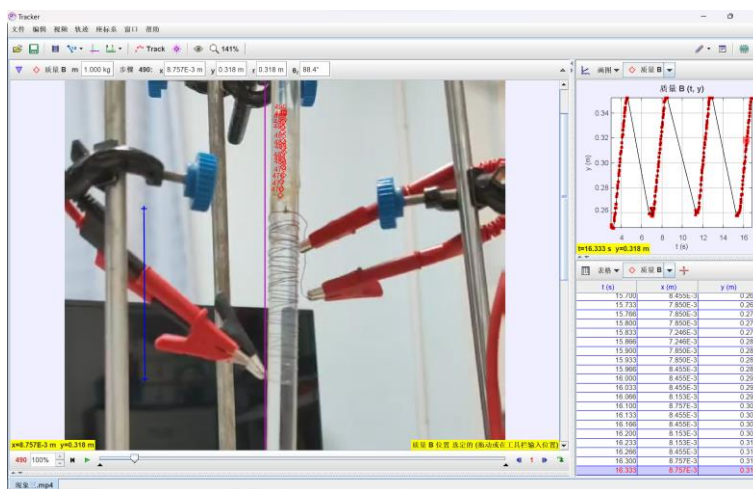
基于前文所述的简化模型搭建实验装置，随后改变了管径、电压等实验变量，并用手机摄像机(30 FPS)拍摄视频，最后采用视频处理软件 tracker 分析了液面的运动，其中将烧杯中的液面高度作为纵坐标零点。实验装置的基本原理如图 1 a) 所示，实物如图 1 b) 所示，tracker 液位分析页面示意如图 1 c) 所示。



a) 实验装置示意图



b) 实验装置实物图



c) tracker 液位分析页面示意

图 1 实验装置与软件

本实验中主要的传感器精度及测量范围如表 1 所示。

表 1 测量工具测量范围及精度

变量名称	测量工具型号	测量范围/测量精度
电阻丝两端电压 U/V	MASTECH MY65 万用表	0-20 (± 0.001)
电路电流 I/A	MASTECH MY65 万用表	0-10 (± 0.001)
管外直径 r_o /cm	SJ-455515 游标卡尺	0-15 (± 0.05)

初步的预实验中，仅考虑了两种变量，分别为加热丝的功率和石英玻璃管的内径。其它变量暂时保持不变，具体取值如表 2 所示。

表 2 固定变量表

变量名称	值
管壁厚度 δ/mm	1.5
电阻丝顶端与试管顶的距离 L_{th}/cm	8
电阻丝分布长度 L_h/cm	8
电阻丝底端与烧杯液面的距离 L_{hb}/cm	22
环境温度 T_e/K	300
康铜丝表面积 A_h/m^2	9.42×10^{-4}

管内直径选取了 3 种，为[0.5cm,1cm,1.5cm]，功率在 0.1W 至 40W 范围内连续变化。

2.2 预实验结果与初步分析

按照上述条件开展预实验，观察到的现象大致可以分为 2 种，其分布如图 2 所示。

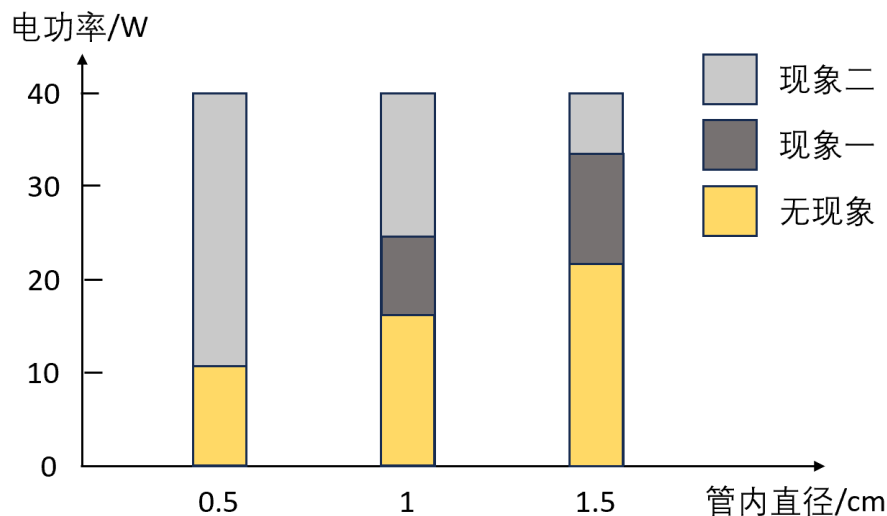
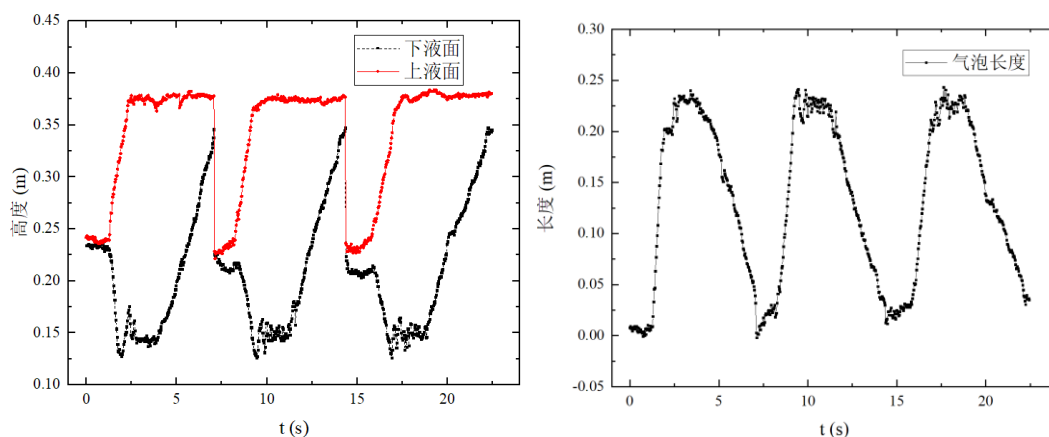


图 2 实验现象与电功率和管内直径的关系图

可以看出现象一是现象二和无现象的一种过渡形态，随着加热功率的增加，最终会过渡到现象二中。在管径较小的实验中无法观测到现象一，合理推测认为是由于试管内部的体积过小，导致现象一出现的“窗口”很窄，以至于未能在预实验中显著地观察到，但实际也应该是存在的。

现象一的主要特征是会在试管内周期性产生一个直通顶部的大气泡。产生大气泡的过程又分两个步骤，首先试管中的水在达到沸点后会在电阻丝的中部产生一个有上液柱的柱状气泡，柱状气泡会同时膨胀并向试管顶部运动。气泡的上液

面会用时 1s 左右上升至试管顶端并使气泡上液柱消失，从而形成一个直通顶部的大气泡。随后大气泡的下液面会用时 1s 左右下降至一个平衡位置，随后用时 5s 左右回升至试管顶部，因此大气泡消失。上述过程为一个周期。用 tracker 追踪现象一中液面高度关于时间的变化图像如图 3 a)所示，气泡长度如图 3 b)所示，实验照片如图 4 所示。此处使用的试管直径为 1.5cm，加热功率为 30W。



a) 上下液面随时间的变化规律

b) 气泡长度随时间的变化规律

图 3 现象一液面变化规律

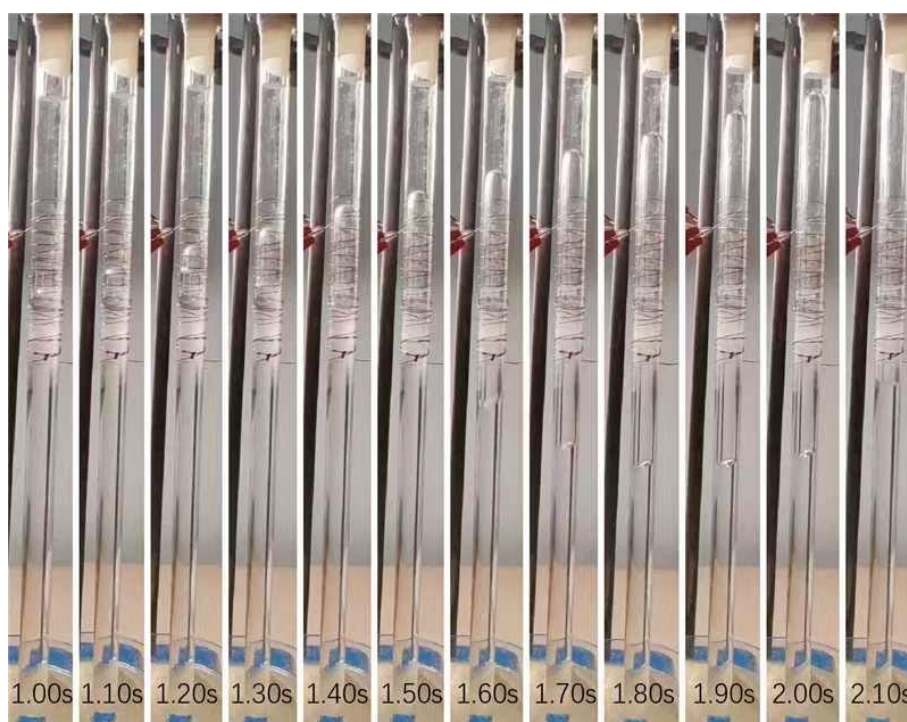


图 4 现象一实验照片

现象二与现象一具有一定的相似性，主要体现在会在试管内生成一个直达试

管顶部的大气泡，但与现象一不同之处在于这个气泡不会消失，即上液面消失后无法恢复，下液面也无法回升至电阻丝上部，其下液面会在电阻丝下边缘附近持续振荡，其振荡间隔约为 2.5s，其规律如图 5 所示，实验照片如图 6 所示。此处使用的试管直径为 1.5cm，加热功率为 40W。

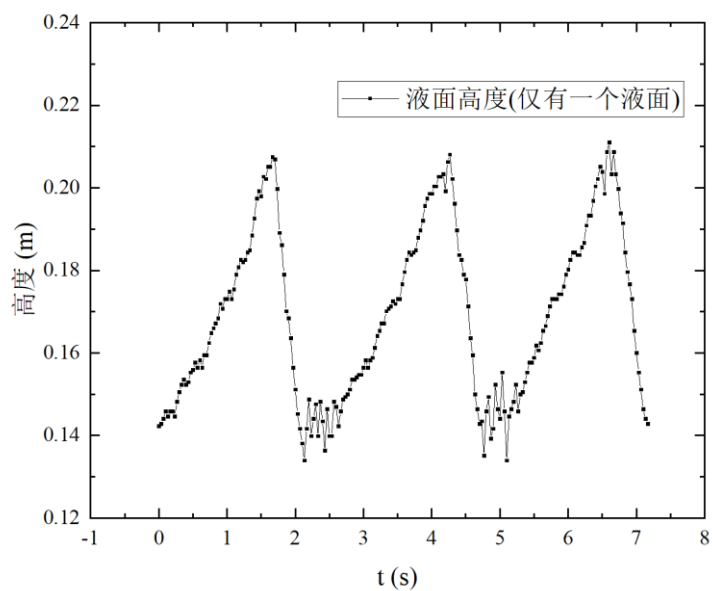


图 5 现象二液面变化规律

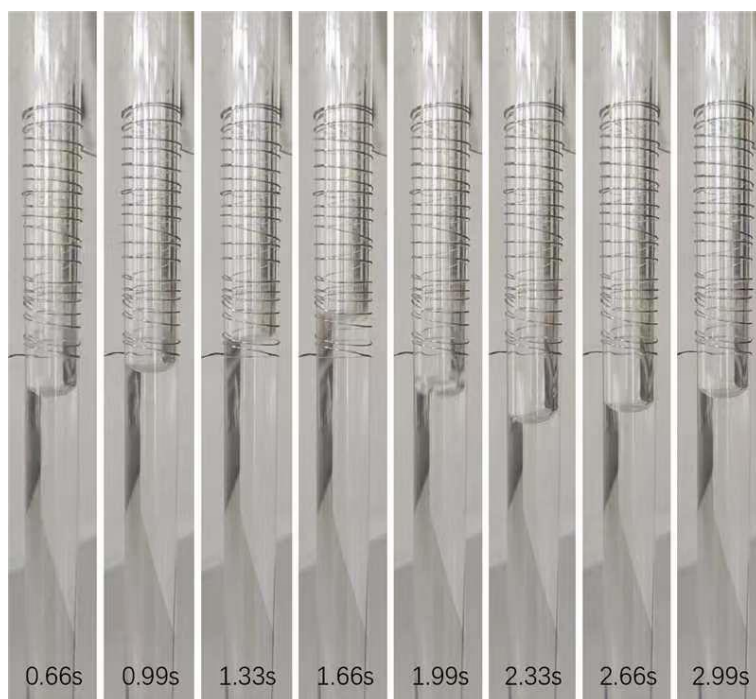


图 6 现象二实验照片

3. 理论模型

3.1 无上液柱时气液交界面的运动

3.1.1 动力学模型

在现象二中不存在上液柱，仅存在一个运动的气液交界面，分析起来较为容易，因此首先针对现象二开展分析和建模。为了便于分析建模，首先做一些合理假设：

1. 假设由相变导致的液体总质量(含烧杯中的液体)变化可以忽略不计。
2. 由于烧杯的容积远大于试管，因此假设烧杯中的液位高度保持不变，不随试管液位的变化而波动，即试管的纵坐标零点保持不变。
3. 液体视为不可压缩流体，密度均匀且保持不变。
4. 忽略气体质量，仅考虑液体质量。

认为液面运动受牛顿运动学第二定律影响，即：

$$F=ma \quad (1)$$

式 1 中 F 为试管内液柱所受到的合力, m 为该液柱的质量, a 为瞬时加速度。
合力 F 大致由几部分组成，如图 7 所示。

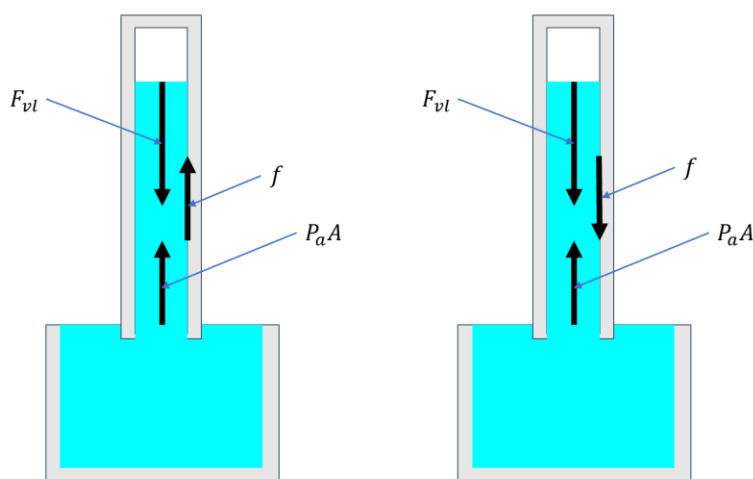


图 7 水柱向下和向上运动的受力分析图

图 7 中， F_{vl} 为气泡施加给水柱的力，等于气泡绝对压力与截面积 A 之间的乘积。 $P_a \cdot A$ 表示大气压施加给水柱的力，上述这两个力合起来等于气泡内表压与试管截面积 A 的乘积。而 f 表示水柱所受到的摩擦阻力和耗散阻力，这里面包括液体与壁面之间的摩擦阻力，也包括液体内部由黏性产生的耗散阻力，还包括

液柱冲入烧杯所产生的冲击阻力，总的来说，这部分阻力与液柱的速度呈正相关关系。

首先考虑气泡的绝对压强 P_{vl} ，通过气体状态方程进行计算，压强、体积与物质的量的关系为[5]：

$$V_v dP_{vl} + P_{vl} dV_v = RT_v \cdot dn_v \quad (2)$$

P_{vl} 为气泡内的绝对压强，Pa； R 为普适气体常数，J/mol·K； T_v 为气泡(水蒸气)的温度，K； V_v 为气泡的体积，m³。 dn_v 为无限小时间内产生的水蒸气的物质的量，可以通过蒸发潜热的定义进行计算：

$$dn_v = \frac{dQ_l}{k} \quad (3)$$

Q_l 为系统的净增长能量，J； n_v 为产生的水蒸气的物质的量，mol； k 为水的蒸发潜热，J/mol。

f 中包含多个摩擦阻力和耗散阻力项，此处暂时仅考虑与壁面之间的摩擦阻力，采用完全发展段管内径流的管道切应力计算公式，可得其由粘性产生的阻力为：

$$f = \int \mu \frac{dv}{dr} dS = \mu S \frac{2v}{(r_o - \delta)} = 4\mu\pi h_l \frac{dh_l}{dt} \quad (4)$$

h_l 为气泡长度，m； v_l 为液柱运动的速度，m/s； S 为液柱与管壁的接触面积，m²； μ 为水的粘性系数，由于液柱大部分位于电阻丝以下，温度接近于环境温度，因此可以取平均值 2e-3 Pa·s 进行计算。

将式(2)(3)(4)引入式(1)，并将式(1)中的加速度 a 写成微分形式，得到气泡长度随时间变化的动力学描述方程式(5)，具体推导过程较为冗长，具体可以参见附录 1。

$$\begin{aligned} \pi(r_o - \delta)^2 \left(\rho_l \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - 4h_l) \frac{dh_l}{dt} \frac{d^2 h_l}{dt^2} + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^3 h_l}{dt^3} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^3 \right) + P_a \frac{dh_l}{dt} \right) + 4\pi\mu \left(-h_l \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 + (L_{th} + L_h + L_{hb}} \right. \\ \left. - h_l) \left(h_l \frac{d^2 h_l}{dt^2} + \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right) \right) = \frac{RT_v}{k} \frac{dQ_l}{dt} \quad (5) \end{aligned}$$

3.1.2 热力学与传热学模型

在式(5)中, 气泡的压强需要利用系统的净增长能量 Q_l 进行计算, Q_l 受传热学定律的影响。在进行传热学建模之前, 同样基于分析做出一些合理假设:

1. 假设除了与电阻丝接触部分 L_h , 试管其余部分的管壁与管内流体温度相同。
2. 假设电阻丝温度均匀。
3. 假设电阻丝加热处外壁温度与电阻丝温度相同, 内壁温度与管内流体相同。
4. 假设在出现实验现象时, 加热丝及加热丝上部的水柱或水蒸气的温度维持在沸点附近。
5. 假设电阻丝仅向管壁和空气传热, 石英管轴向的导热忽略不计, 气体导热忽略不计。
6. 水柱的吸热功率与水柱和电阻丝的接触长度成正比。

由于水柱在不同位置时, 系统吸放热的影响因素不同, 因此基于液面位置将吸热过程分为三个阶段。液位完全越过加热丝时为阶段一, 位于电阻丝接触部分中间为阶段二, 完全位于电阻丝以下时为阶段三, 如图 8 所示。

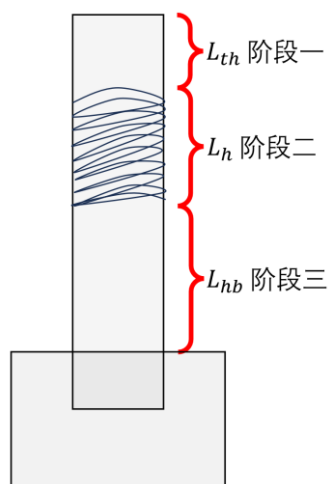


图 8 阶段示意图

当阶段一的时候, 液面在加热丝上部, 水柱与电阻丝的接触长度等于电阻丝的分布长度。当阶段二的时候, 水柱一部分与电阻丝接触。当阶段三的时候, 可认为此时水柱不受热, 并向外散热。根据上述假设, 则有三个阶段的吸收功率。

$$\frac{dQ_l}{dt} = \begin{cases} IU - \frac{dQ_{ha}}{dt} - \frac{dQ_{la}}{dt}, & (h_l < L_{th}) \\ \left(IU - \frac{dQ_{ha}}{dt}\right) \frac{L_{lh}}{L_h} - \frac{dQ_{la}}{dt}, & (L_{th} < h_l < L_{th} + L_h) \\ -\frac{dQ_{la}}{dt}, & (h_l > L_{th} + L_h) \end{cases} \quad (6)$$

I 为电流，A； U 为电阻丝两端电压，V； Q_{ha} 为电阻丝向环境空气传递的能量，J； Q_{la} 为水柱向系统外传递的能量，J； L_{lh} 为水柱和电阻丝的接触长度，m。

上式中， Q_{ha} 和 Q_{la} 应写成关于参量的函数形式，其中包括管壁向空气的传热、水向烧杯的传热、电阻丝向空气的热传导等，接下来尝试一一分析并建模。

首先计算通过电阻丝传入管壁的热量，根据假设4和假设5，利用单层圆柱壁面导热定律进行计算[6]。

$$\frac{dQ_{hl}}{dt} = \frac{2\pi\lambda_q L_h (T_h - T_s)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_o - \delta}\right)} \quad (7)$$

Q_{hl} 为电阻丝向管壁传递的能量，J； λ_q 为石英的传热系数，W/m·K； T_h 为电阻丝的温度，K； T_s 为水的沸点，K。

电阻丝向空气的散热量用对流传热定律进行计算，根据假设3，此处可将电阻丝视为一层均匀包裹在管壁上的加热膜，因此其向环境的散热量可以按 L_h 段管壁外表面积进行计算，即：

$$\frac{dQ_{ha}}{dt} = h A_h (T_h - T_e) \quad (8)$$

h 为电阻丝和空气的对流换热系数，W/m²·K； A_h 为 L_h 段的管壁外表面积，这是一个很容易计算的常数，m²； T_e 为环境温度，K。

根据能量守恒定律，式(7)和式(8)之和等于电阻丝的总功率 IU ，在这两个式子中，对流换热系数根据经验可以取一常数，其它都是可测量值，因此只有一个未知量 T_h ，可以直接求出。求出后反带入式(7)，即可获得式(6)中 $(IU - \frac{dQ_{ha}}{dt})$ 这一项的值。

接下来计算水柱向系统外传递的能量 Q_{la} ，不过由于水柱无法向空气直接散热，其实质仍然是通过管壁向环境空气散热。根据假设，管壁在轴向上的温度是突变的，电阻丝以上的管壁温度与水的沸点保持一致，与电阻丝接触的部分管壁温度与电阻丝相同，电阻丝以下的管壁温度情况又会因液面位置的不同而发生改变。

比如，阶段一与阶段二下，此部分管壁温度在轴向上与管内的水的温度梯度保持一致；在阶段三下，以液面为界将电阻丝以下的管壁也分为两部分，液面以上的部分管壁温度与水的沸点保持一致，液面以下的部分管壁温度在轴向上与管内的水的温度梯度保持一致。阶段一与阶段二下的管壁轴向温度分布如图 9 a)所示，阶段三下的管壁轴向温度分布如图 9 b)所示。（其中 L_l 为液面高度）

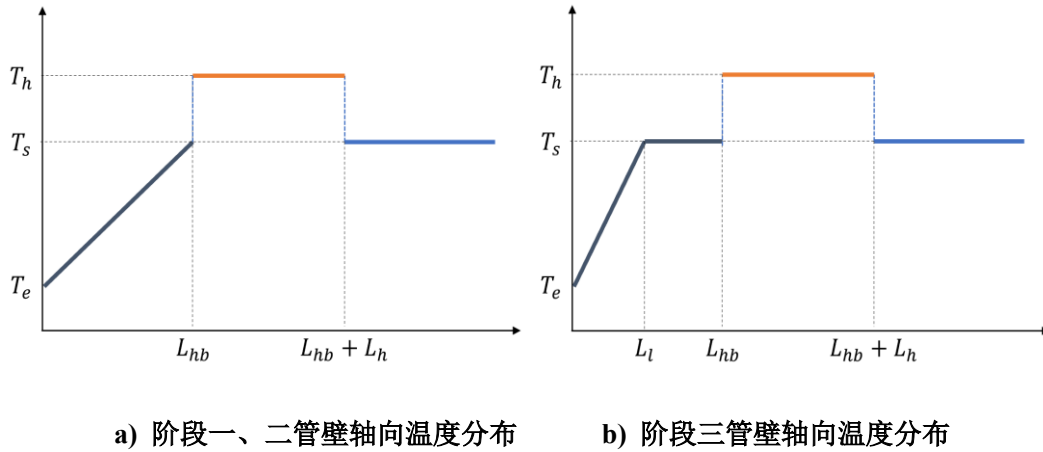


图 9 管壁轴向温度分布示意图

根据对流传热定律，电阻丝以上的管壁向空气的传热功率按水的沸点与环境温度之间的温差进行计算，公式类似于式(8)。与电阻丝接触部分管壁向空气的散热量视为电阻丝向空气散热量的一部分，已经在式(8)中计算过了，此处不再重复计算。而由于电阻丝以下的管壁的温度在轴向线性变化，因此温度可以取上下端温度的平均值，也就是水的沸点与室温的平均值，由此可以得到电阻丝以下的管壁向空气的传热功率。

将 Q_{la} 的表达式带入式(6)后可以得到各种情况下气液系统的吸热功率，再将其带入式(5)中分段求解即可得到无上液柱气泡下液位的运动轨迹。（完整的三个微分方程见附录二）。

3.2 有上液柱时气液交界面的运动

3.2.1 上液柱形成条件模型

当试管的直径合适且加热功率较低时，首先会出现一个无法直通试管顶部的柱状气泡，此时会有两个气液交界面，即现象一中所描述的有上液柱的气泡。这时计算建模会变得更加复杂，首先分析出现这种现象的原因。

柱状气泡是由与管壁接触处的液体沸腾相变产生的小气泡汇聚而成的，柱状

气泡一方面受到小气泡的“补给”而扩大，一方面又由于局部冷凝而缩小。显然对于存在上液柱的工况来说，气泡里的水蒸气是一个饱和状态，靠近加热丝的部分在不断的补充，而靠近上液柱的部分则在冷凝。另外，上液柱之所以能够维持住不向下坠，也与液体的表面张力有关，直径较小的试管中才会出现上液柱，直径较大的试管中，沸腾产生的细小气泡还来不及汇聚成一个柱状气泡就已经完全上升至试管顶部了，因此也无法产生上液柱。关于表面张力部分的分析这里不做讨论，仅考虑由小气泡汇聚形成大气泡的情况。

在利用工程热力学中的克劳修斯-克拉贝龙（Clausius-Clapeyron）方程[6]，可得出产生柱状气泡所需的过热度与水的温度，气泡密度以及气泡大小有关。水的过热是由于电阻丝附近的水所吸收的热无法快速传向系统其它部位而造成的热流不均引起的。因此定义无量纲常数 Gu ，选取电阻丝附近的水为一个独立系统，考虑这一部分水从加热丝处的吸收功率与这一部分水向其它水或水蒸气的传热功率的比值，即：

$$Gu = \frac{P_{\text{受}}}{P_{\text{传}}} \quad (9)$$

Gu 可以表示主要受热部分的水的积累能量的速率，而能量应该是相对均匀的分布于空间内的，因此过热度只与单位体积内的积累能量速率有关。体积大小与管内半径的平方和电阻丝的分布长度成正比，因此可得单位体积内的积累能量速率 Ze 可表示为：

$$\frac{Gu}{V} \propto \frac{Gu}{(r_o - \delta)^2 L_h} = Ze \quad (10)$$

上述两式中变量过多，不易直接进行理论计算，因此通过实验数据进行拟合。实验中，取管外半径分别为[0.008m,0.0085m,0.009m,0.0095m]、管壁厚度均为0.002m 的石英管，将功率从小到大连续调整，直到得到能产生有上液柱的柱状气泡为止，记录临界功率，结果如图 10 所示。

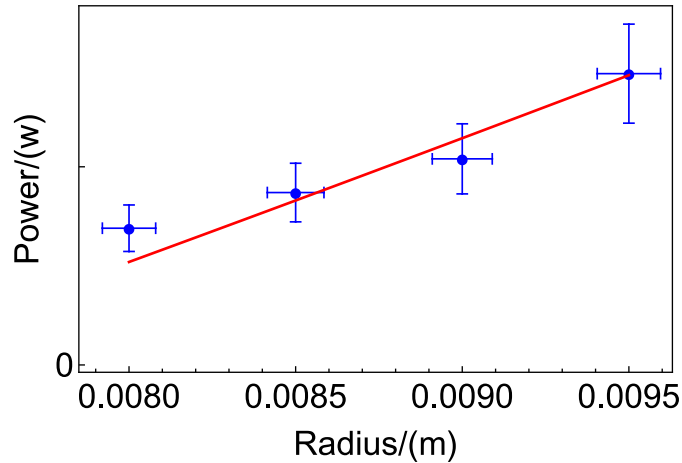


图 10 不同管径下的临界功率

由此得到气泡状态与参量的关系：

$$\text{气泡状态} = \begin{cases} \text{不接触管壁的随机小气泡,} & (Ze \leq 1 \times 10^6 m^{-3}) \\ \text{接触管壁的柱状气泡,} & (Ze > 1 \times 10^6 m^{-3}) \end{cases} \quad (11)$$

3.2.2 综合运动模型

在现象一中，由于上液柱的存在，会使气泡产生上下液位。气泡首先会经历一个快速扩大的阶段，然后慢慢缩小直至消失，在液位重合前，小气泡还会经历一个较短时间的振荡。另外在气泡消失的过程中，上液位界面会逐渐升高，下液位界面也逐渐升高，这是气泡逐渐向上运动的结果。气泡在上升的过程中，会受到浮升力、重力和阻力的影响。在向上的运动过程中，气泡逐渐冷凝，体积逐渐变小。气泡的运动示意图如图 11 所示。

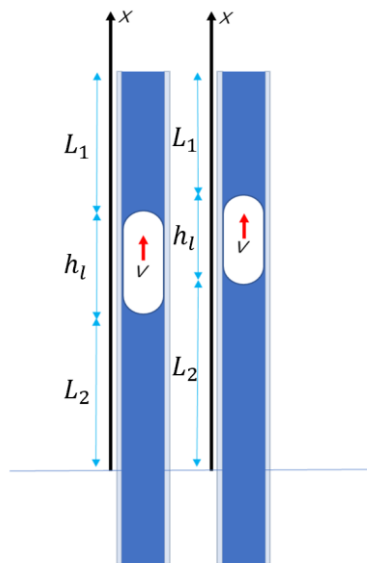


图 11 气泡运动示意图

系统总共包含两个自由度，一个是气泡质心的轴向坐标 x ，一个是气泡的总长度 h_l 。建模之前同样基于分析进行合理假设：

1. 假设气泡温度不变且等同于水的沸点。
2. 假设气泡从电阻丝中部产生。
3. 假设气泡的膨胀和收缩为准静态过程。
4. 假设气泡内的水蒸气密度不变，为不可压缩气体。
5. 假设气泡与管壁直接接触。

通过分析系统的吸放热，可得气泡的质量变化方程：

$$\frac{dm_b}{dt} = \frac{dQ_l}{dt} \frac{M}{k} = \rho_v \pi (r_o - \delta)^2 \frac{dh_l}{dt} \quad (12)$$

m_b 为气泡的质量，kg； ρ_v 为水蒸气的密度，kg/m³； M 为水蒸气的摩尔质量，kg/mol。

变换后可得气泡长度的表达式为

$$h_l = \frac{dQ_l}{dt} \frac{M}{k \rho_v \pi (r_o - \delta)^2} t \quad (13)$$

通过对气泡的受力分析，可得气泡的动量变化方程为：

$$\rho_l g V_v - \rho_v g V_v - \frac{1}{2} \rho_l C_D v^2 \pi (r_o - \delta)^2 = \frac{dm_b v}{dt} \quad (14)$$

$$m_b = \rho_v h_l \pi (r_o - \delta)^2 \quad (15)$$

g 为重力加速度，m/s²； V_v 为气泡体积，m³； v 为气泡质心运动速度，m/s； C_D 为无量纲阻力系数，计算方式为[7]：

$$C_D = \begin{cases} \frac{16}{Re}, & Re \leq 1 \\ \frac{32}{Re}, & Re > 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$Re = \frac{2(r_o - \delta)v\rho_l}{\mu} \quad (17)$$

Re 为雷诺数。根据量级估计，气泡上下管内的雷诺数在 10^2 量级，远大于 1，因此阻力系数 C_D 取 $32/Re$ 。

不考虑气体直接从电阻丝或者管壁处的吸热量，认为其能量传递完全由蒸发和冷凝带来，因此能量变化方程应与（6）式中阶段一一致。求解上述方程，可以得到气泡的质心轴向运动方程为：

$$\frac{M}{k} \frac{dQ_l}{dt} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} t + \frac{dx}{dt} - \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_v} g t \right) + 8\pi\mu(r_o - \delta) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (18)$$

方程的初始条件为:

$$\begin{cases} h_l(0) = 0 \\ x(0) = L_{hb} + 0.5L_h \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

(18)式仅在气泡有上液柱的时候适用,当气泡的上液位与试管顶部接触以后,会受到试管顶部的约束力的限制,则方程不再适用,系统也变为单自由度系统,只需分析气泡的长度即可,方程退化为无上液柱的运动方程。

3.3 发动机做功效率模型

将加热试管视为一个对外做功的发动机(外燃机),通过对发动机结构的分析可以认为发动机的输出功等于排出水的动能。取排出水的一个微元柱,由动能的定义可知其动能表达式为。

$$dE_r = \frac{1}{2}v^2 dm \quad (20)$$

E_r 为排出水的动能, J; m 为排出水的质量, kg

根据流体不可压缩假设,排出水的体积等于气泡的体积 V_b ,其速度等于气泡长度随时间的变化率,因此可确定 m 和 v 的表达式为

$$m(t) = \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 h_l \quad (21)$$

$$v(t) = \frac{dh_l}{dt} \quad (22)$$

由于发动机不止会向外排水,当气泡体积减小的时候发动机向内吸水,此时发动机做负功,所以此微元柱的微元功为负值。但如果在发动机上设置两个单向阀,让排水时船后方的阀门打开,吸水时前方的阀门打开,则发动机始终做正功,避免了动能损失。发动机阀门设计如图 12 所示。

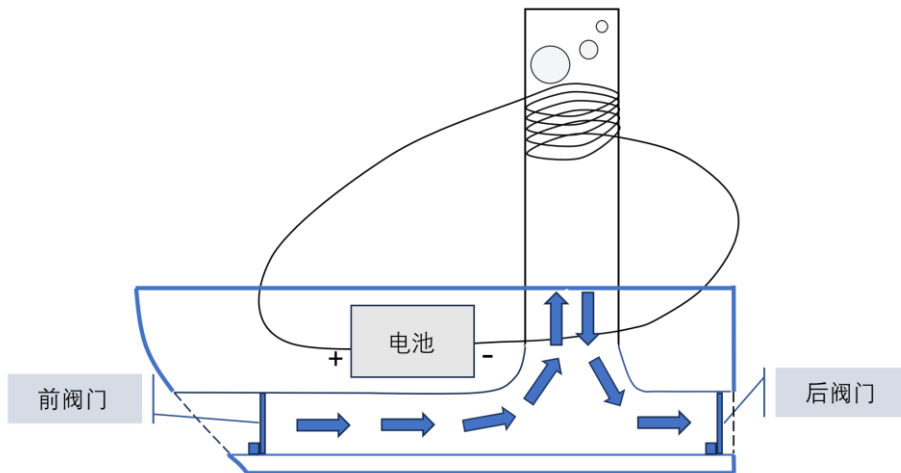


图 12 发动机阀门设计示意图

将 (21) (22) 式带入 (20) 式，并用绝对值避免微元功的正负随 v 的方向而改变，即

$$dE_r = \frac{1}{2} \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 |dh_l| \quad (23)$$

积分后可得出在 $0 \sim T$ 时间内发动机的输出功，当气泡周期性运动的时候， T 为其周期大小。若气泡非周期性运动，则 T 取足够长的时间，达到若 T 再增大输出功也不再大幅波动的效果。积分式如下

$$\int_0^{E_r} dE_r = \int_0^T \frac{1}{2} \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 \left| \frac{dh_l}{dt} \right|^3 dt \quad (24)$$

由于高度非线性微分方程没有解析解，因此在数学上可以用求矩形面积和的方法数值求解，其物理意义是计算发动机对每一个微元柱的输出功然后再求和，具体表达式如下

$$E_r \approx \sum_{i=0}^z \frac{1}{2} \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 |v_i|^3 \frac{T}{z} \quad (25)$$

结合发动机的输入功率为电功率，通过发动机效率的定义即可得知其效率的计算方式如下

$$\eta \approx \sum_{i=0}^z \frac{1}{2UI} \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 |v_i|^3 \frac{1}{z} \quad (26)$$

η 为发动机的效率； z 为 T 时间内所取的微元数量，在计算中取值越大，算出来的效率越准确。

4. 模拟结果与分析

4.1 数值模拟结果

利用 Python 语言中的数值求解包 Scipy 进行数值计算，对上述建立的微分方程模型进行求解。

选择试管内无气泡，且水温已达到 99.5 摄氏度作为初始条件，程序的计算流程如图 13 所示。

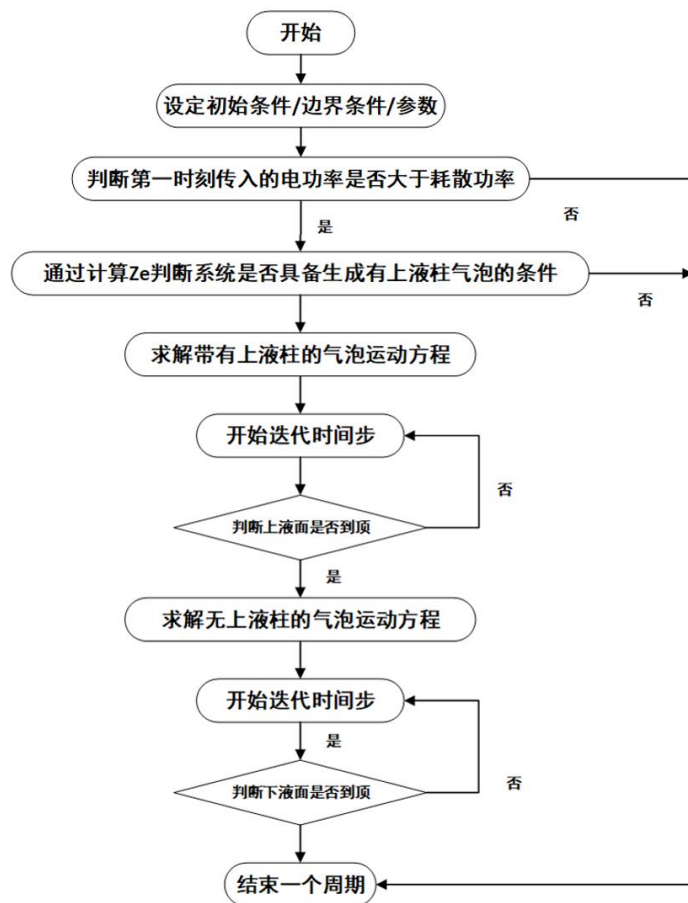


图 13 程序的计算流程

首先选择图 5 和图 6 中的现象二进行模拟，管径、加热功率等参数均与之相同，初始液位设为电阻丝的中部。得到的计算结果与实验结果的对比如图 14 所示。数值求解的核心代码部分见附录 3。

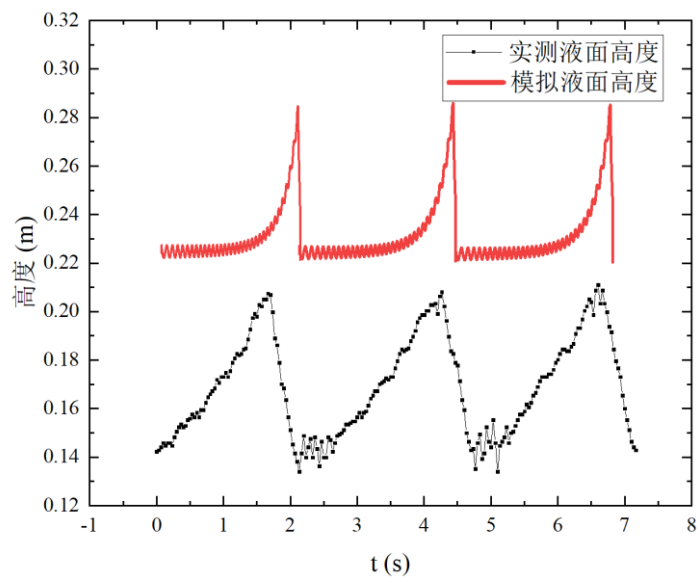


图 14 现象二模拟与实验结果的对比

可以看出现有的计算模型可以较好的模拟出气泡变大以及缩小的变化规律，计算获得的波动周期与实验测试值基本相同，计算曲线上的锯齿波动推测为水柱本身拥有惯性而在平衡位置附近振动导致的，与实验中的现象也基本吻合。但是在上升的过程中，模拟显示的增长曲线呈现先缓后急的趋势，同时下降的曲线过于陡峭，这点与实验测试值不符，另外计算获得的液位也比实验测试值高。推测认为这是与假设中忽略了气体传热和管壁轴向所致，实际上电阻丝对水蒸气也存在直接传热，电阻丝以下的水柱也会通过管壁吸收一部分热量，这些因素导致实际的振荡发生在电阻丝以下的位置，而在计算中，只有液位升高到与电阻丝接触的部分才能吸热，所以振荡发生在更高的位置，而且振荡的曲线也更加陡峭。

然后选择图 3 和图 4 中的现象一进行模拟。初始气液交界面设置在电阻丝中部，初始气泡长度设为 0。得到的计算结果如图 15 所示。

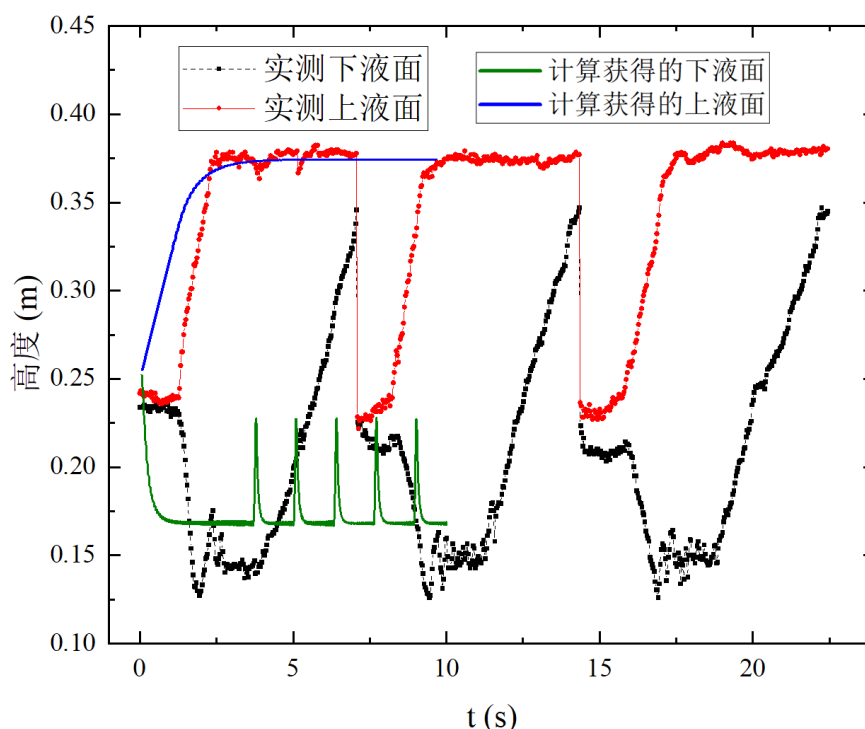


图 15 现象一模拟与实验的对比

由图 15 可以看出，用实验中得出的现象一的初始数据带入理论当中，却求解得到了类似于现象二的曲线，无法得出实验中测量得到的大周期的变化，最终吸热量和放热量会找到一个平衡，气泡在经过快速膨胀后可以缩小，但无法缩小到完全消失，在缩小到一定程度后吸热量和放热量就达成了平衡，气泡开始上下振荡，出现了和现象二类似的准平衡状态。

分析认为，大周期的变化实际是由传热迟滞性导致的，即沸腾发生时带来大量的蒸汽，而后吸热量减少，令系统总吸热量变为负数，水蒸气缓慢冷凝导致水位上升。而水柱在下降再回升后，由于从外界烧杯中吸入了低温水，导致其温度也不能维持在沸点附近了，需要经过一段时间才能重新恢复至沸点。这一时间差是产生大周期的主要原因。除此以外，管壁本身具有一定的热容，在吸热和放热的过程中也会引入一定的迟滞性，当加热功率足够大时，由管壁热容补充进来的热量足以快速抵消掉液柱恢复至沸点所需要的时间，不至于令气泡完全消失。而这些因素在现有的计算模型中都是不能体现的，现有的计算模型没有考虑到传热过程的迟滞性，导致无法模拟出大周期的变化。

4.2 基于实验结果的复杂传热项修正

如上一节所述，理论中有多种复杂的传热项未能充分的考虑，因此导致所建立的模型不能模拟出现象一中的大周期气泡生成/消失现象，而这些复杂的传热项又很难一一从机理的层面定量进行计算，因此考虑引入 S 型的 Logistics 曲线来拟合传热的迟滞性，将其作为液柱净吸热量的修正项，如图 16 所示。

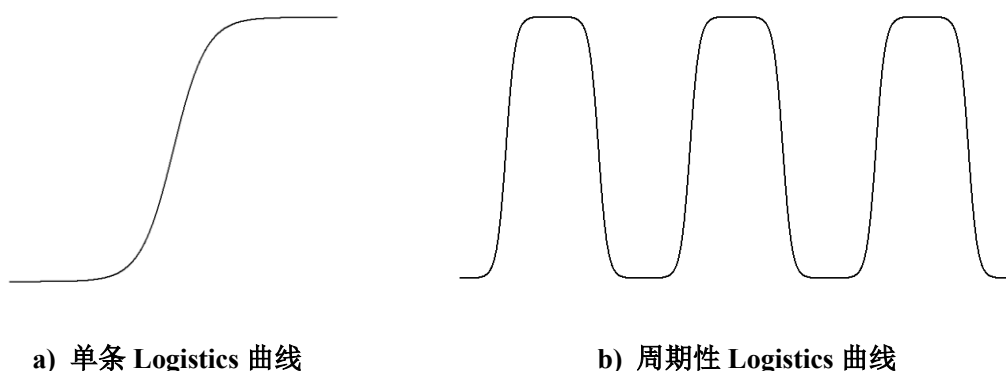


图 16 Logistics 曲线示意图

Logistic 曲线表达式如下，其中的 a 、 b 、 c 均为系数：

$$S = a * \frac{e^{(bt-c)}}{1 + e^{(bt-c)}} \quad (27)$$

将单条 Logistics 曲线首尾相连并写成周期性的形式，则获得图 16 b) 中类似于方波或者正弦波的形式，用以表示水柱的吸热和放热存在滞后性，并不完全由液面位置决定。之所以不采用方波或者正弦波是因为方波的上升下降沿过于陡峭，不符合物理机理，而正弦波又过于平滑，不容易体现迟滞特点。

Logistic 曲线中的系数、周期性曲线的频率、相位等均由实验数据进行反向

拟合获得。引入 Logistics 曲线来表示复杂传热项后获得的液位曲线如图 17 所示。

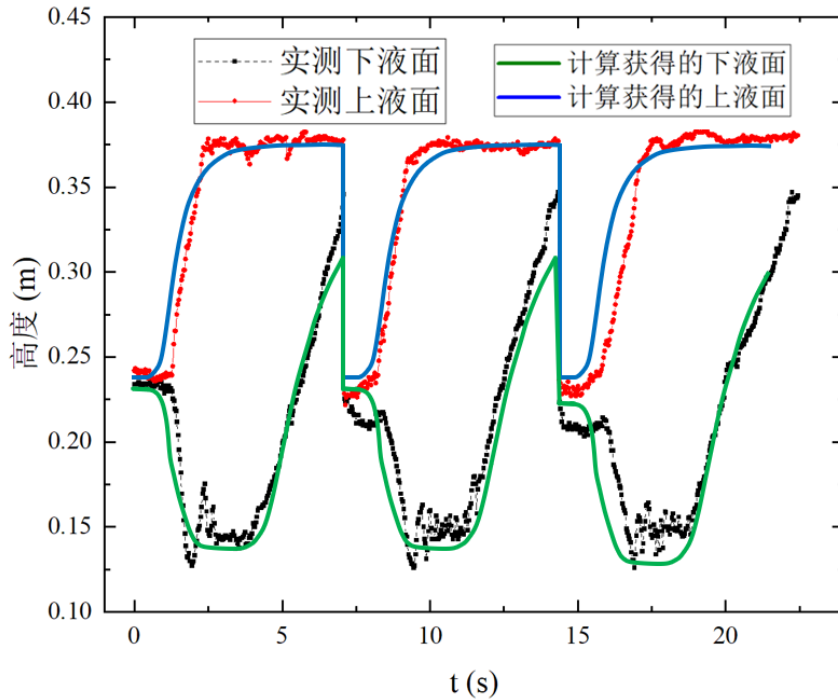


图 17 修正复杂传热项后的现象一模拟与实验的对比

可以看出利用 Logistics 曲线表示复杂传热项的迟滞性后，模拟结果出现了与实验符合良好的周期性气泡了，气泡的大小和周期性规律均可以通过 Logistics 曲线中的参数进行调节，最终可以令上下液面的变化规律与实测结果吻合较好。

这证明了前文中对气泡周期生成原因分析的合理性，另外，尽管 Logistics 曲线中的参数是通过拟合实验数据而非机理分析得到的，但在特定工况下仍然具有一定的合理性和普适性，可以用于后续发动机做工效率的进一步分析。

4.3 发动机做功效率分析

利用建立完成的数学模型分析两种现象下发动机的输出功率。其中现象一的加热功率为 30W，现象 2 的加热功率为 40W。计算获得现象一发动机的输出功率为 $1.12e-5W$ ，其效率仅为 $3.7e-5\%$ ，现象二发动机的输出功率为 $1.42e-5W$ ，其效率仅为 $3.55e-5\%$ 。当改变理论中的各类参数的时候，实验现象有所改变，但是做功效率并无实质性的变化，总体来说效率随着功率的增大呈减小趋势。由于绝大多数情况下热机的效率远低于生产生活的需求，因此没有在热机参数上进行改进的必要，转而分析发动机效率很低的原因。

两种现象的输出效率都很低，分析认为这是由于这种热机对外做功主要依赖

工质相变产生的体积变化，但是大部分的输入能量被用于克服蒸发潜热了，而没有直接转化为气体膨胀对外做功。除此以外，由于整个系统未作任何绝热措施，因此加热丝绝大部分的热量都散失了，只有很少的一部分热量传入了水中。这就是此类发动机只能作为玩具而不能真正走向实用的原因。而现象一的效率要比现象二更大一些，可能是由于加热功率变大后，对外散热量也会更大，传入水中的热量所占的比例就变得更少了。

根据上述分析可以合理推测，如果希望提高此类热机的做功效率有两条可行的路径，其一是做好绝热或者能将热量回收利用，令大部分的热量都能进入工质中而不是浪费掉。其二则是要令做功工质的状态远离冷凝点，即温度要尽可能的高，这样才能令气体接近理想状态，使输入的热能尽可能的全部转化为气体膨胀功。

而实际上，按照此条思路继续优化下去就会得到斯特林发动机，距离真正实用化的发动机已经较为接近了。

5. 总结与展望

本文以玩具波波船的发动机作为灵感来源，首先通过建立简化的实验装置开展定性分析，了解了这种热机做功的力学机理以及传热特性，然后分别建立了三个模型对热机进行描述。

1. 用动力学模型描述由于水的吸热相变导致的气体膨胀、液柱运动与系统吸放热功率的关系。
2. 用传热学模型描述系统的吸放热功率与气泡状态的关系。
3. 用做功效率模型描述热机效率与气泡运动的关系。

通过将传热学模型向动力学模型的带入，得出了气泡运动与热机各种初始参量之间的关系。然后通过实验拟核的方法对传热学模型当中的繁多复杂传热以及传热的迟滞性进行了修正。最后通过将两个模型所解出的气泡运动向做功效率模型中带入，得出了热机效率与各种参量之间的关系。

尽管最终求解得到的热机效率十分低，而且并不能简单通过改良热机初始参数让效率有实质性的提升，但不管是实验测量还是理论求解出来的气泡运动都是非常有意思的物理现象，并且通过定性分析得到了对热机结构进行改进的思路。

同时，在理论分析和实验过程中仍有不足，比如未对气泡的最终形态的确定提出更直观的判断方法，未严格控制环境气流的稳定。这些不足将在之后的探索过程当中一步步改进。同时，本文讨论的发动机设计到了水的相变，对于相变传热导致的热损耗过大、总体效率并不高等问题，希望在以后的研究当中能够改进热机结构，提出一种保持简单便宜的优点，但效率有本质提升的发动机结构。

参考文献

- [1] Opalzikor. Pop pop boat[OL]. Wikipedia. Retrieved February 5, 2023.
- [2] Crane, H. R. The Pop-Pop boat[J]. *The Physics Teacher*, 35(3): 176-177.
- [3] 船舶用柴油发动机的结构与原理[OL] - 百度文库
- [4] 费曼 莱顿 桑兹. 费曼物理学讲义 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2020: 102-108.
- [5] 宋峰. 热学基础教程[M]. 北京: 科学出版社, 2023: 56-65.
- [6] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [7] 王洪伟. 我所理解的流体力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014: 168.
- [8] 梁慧慧. 微通道内气泡运动特性和聚并行为研究[D]. 北京: 北京化工大学, 2023: 45-46.
- [9] <https://www.iypt.org/problems/problems-for-the-36th-iypt-2023/>

附录

附录 1——气泡长度动力学描述方程式具体推导

将(3)式带入(2)式中，得到

$$V_v dP_{vl} + P_{vl} dV_v = RT_v \cdot \frac{dQ_l}{k}$$

将图 7 中的受力分析用公式描述，可得气泡对水柱的压力为

$$F_{vl} = F_{net} + P_a A + f$$

将 V_v 拆成高度与面积的乘积，可得

$$h_l A dP_{vl} + P_{vl} A dh_l = RT_v \cdot \frac{dQ_l}{k}$$

压强与面积的乘积得到力，因此有

$$h_l dF_{vl} + F_{vl} dh_l = RT_v \cdot \frac{dQ_l}{k}$$

根据微分形式的牛顿第二运动定律

$$F = \frac{dmv}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

其中

$$m = \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l)$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 \frac{d(L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l)}{dt}$$

将牛顿运动定律带入前式中，得到

$$\rho_l \pi (r_o - \delta)^2 h_l \left(d(L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) \frac{d^2 h_l}{dt^2} - d \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right) + h_l df$$

$$+ \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) \frac{d^2 h_l}{dt^2} - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right) dh_l$$

$$+ P_a A dh_l + f dh_l = \frac{RT_v}{k} dQ_l$$

带入阻尼项的表达式 (4)，可得

$$\begin{aligned}
& \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 h_l \left(d \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) \frac{d^2 h_l}{dt^2} \right) - d \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right) \\
& + h_l d \left(4\pi\mu \frac{dh_l}{dt} (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) \right) \\
& + \rho_l \pi (r_o - \delta)^2 \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) \frac{d^2 h_l}{dt^2} - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right) dh_l \\
& + P_a A dh_l + 4\pi\mu \frac{dh_l}{dt} (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) dh_l = \frac{RT_v}{k} dQ_l
\end{aligned}$$

将方程两边同时除 dt ，得到最终的运动方程

$$\begin{aligned}
\pi (r_o - \delta)^2 & \left(\rho_l \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - 4h_l) \frac{dh_l}{dt} \frac{d^2 h_l}{dt^2} + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^3 h_l}{dt^3} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^3 \right) + P_a \frac{dh_l}{dt} \right) + 4\pi\mu \frac{v_l}{|v_l|} (-h_l \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 + (L_{th} + L_h + L_{hb} \\
& - h_l) \left(h_l \frac{d^2 h_l}{dt^2} + \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right)) = \frac{RT_v}{k} \frac{dQ_l}{dt}
\end{aligned}$$

附录 2——无上液柱气泡下液位的三个完整运动方程

$$\begin{aligned}
\pi (r_o - \delta)^2 & \left(\rho_l \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - 4h_l) \frac{dh_l}{dt} \frac{d^2 h_l}{dt^2} + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^3 h_l}{dt^3} - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^3 \right) \right. \\
& \left. + P_a \frac{dh_l}{dt} \right) + 8\pi\mu \frac{v_l}{|v_l|} (-h_l \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) \left(h_l \frac{d^2 h_l}{dt^2} \right. \\
& \left. + \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 \right)) \\
& = \frac{RT_v}{k} (IU - (h_{na} A_h \\
& + 2\pi r_o L_h h_{qa}) \frac{IU + 2\pi\lambda_q L_h (T_s - T_e) / \ln(r_o / (r_o - \delta))}{2\pi\lambda_q L_h / \ln(r_o / (r_o - \delta)) + h_{na} A_h + 2\pi r_o L_h h_{qa}} \\
& - \pi r_o h_{qa} (2L_{th} + L_{hb}) (T_s - T_e)) \downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi(r_o - \delta)^2 \left(\rho_l \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - 4h_l) \frac{dh_l}{dt} \frac{d^2h_l}{dt^2} + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^3h_l}{dt^3} - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^3 \right) \right. \\
& \quad \left. + P_a \frac{dh_l}{dt} \right) + 8\pi\mu \frac{v_l}{|v_l|} (-h_l \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^2h_l}{dt^2} \\
& \quad + \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2) \\
& = \frac{RT_v}{k} \left(IU \right. \\
& \quad \left. - h_{ha} A_h \frac{IU + 2\pi\lambda_q L_h (T_s - T_e) / \ln(r_o / (r_o - \delta))}{2\pi\lambda_q L_h / \ln(r_o / (r_o - \delta)) + h_{ha} A_h + 2\pi r_o L_h h_{qa}} \right) \frac{L_h + L_{th} - h_l}{L_h} \\
& \quad - \pi r_o h_{qa} ((2L_{th} + L_{hb})(T_s - T_e) \\
& \quad + 2L_h \frac{IU + 2\pi\lambda_q L_h (T_s - T_e) / \ln(r_o / (r_o - \delta))}{2\pi\lambda_q L_h / \ln(r_o / (r_o - \delta)) + h_{ha} A_h + 2\pi r_o L_h h_{qa}}) \downarrow \\
& \pi(r_o - \delta)^2 \left(\rho_l \left((L_{th} + L_h + L_{hb} - 4h_l) \frac{dh_l}{dt} \frac{d^2h_l}{dt^2} + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^3h_l}{dt^3} - \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^3 \right) \right. \\
& \quad \left. + P_a \frac{dh_l}{dt} \right) + 8\pi\mu \frac{v_l}{|v_l|} (-h_l \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2 + (L_{th} + L_h + L_{hb} - h_l) h_l \frac{d^2h_l}{dt^2} \\
& \quad + \left(\frac{dh_l}{dt} \right)^2) \\
& = -\frac{RT_v}{k} \pi r_o h_{qa} ((h_l + L_{hb} + L_{th} - L_h)(T_s - T_e) \\
& \quad + 2L_h \frac{IU + 2\pi\lambda_q L_h (T_s - T_e) / \ln(r_o / (r_o - \delta))}{2\pi\lambda_q L_h / \ln(r_o / (r_o - \delta)) + h_{ha} A_h + 2\pi r_o L_h h_{qa}}) \leftarrow
\end{aligned}$$

附录3——数值求解核心代码

```

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from scipy.integrate import ode
fac=np.zeros(15)
roul = 1000.0
rouv=0.8
r0 = 0.0065
bihou = 0.0015
Lth = 0.08
Lh = 0.08
Lhb = 0.22

```

```

R = 8.31
Ts = 374.0
Te = 300.0
k = 40700
U = 7.0
i = 2
hha = 12.0
hqa = 12.0
Ah = 3.42*10**-4
lamendaq = 1.5
Pa = 100000.0
miu = 2.0*10**-3
M = 0.018
sigema = 0.06
fac[0]=np.pi*(r0-bihou)**2
fac[1]=Lth+Lh+Lhb
fac[2]=8*np.pi*miu
fac[3]=R*Ts/k
fac[4]=i*U
fac[5]=hha*Ah+2*np.pi*r0*Lh*hqa
fac[6]=(i*U+2*np.pi*lamendaq*Lh*(Ts-Te)/np.log(r0/(r0-bihou)))/(2*np.pi*lamenda
q*Lh/np.log(r0/(r0-bihou))+hha*Ah+2*np.pi*r0*Lh*hqa)
fac[7]=np.pi*r0*hqa*(2*Lth+Lhb)*(Ts-Te)
fac[8]=M*(fac[4]-fac[5]*fac[6]-fac[7])/k
fac[9]=((roul-rouv)/rouv)*10
fac[10]=(8*miu*np.pi*(M*sigema)**2)/((r0-bihou)*(rouv*R*Ts)**2)
fac[11]=M*(fac[4]-fac[5]*fac[6]-fac[7])/(k*rouv*np.pi*(r0-bihou)**2)
fac[12]=-fac[5]*fac[6]-fac[7]
def solout(t,y):
    if y[3] + 0.5*y[0]>=fac[1]+0.01:
        return -1
    else:
        sol_data.append([t, *y])
        return 0
def solout2(t,y):
    if y[0]<=0.01:
        return -1
    else:

```

```

        sol_data.append([t, *y])
        return 0
def ode1(t,y):
    h, h_dot,h_ddot, x, x_dot = y
    x_ddot = 0.05
    h_dot=fac[11]
    h_ddot = 0.0
    h_ddd=0.0
    dydt = [h_dot,h_ddot,h_ddd, x_dot,x_ddot]
    return dydt
def ode2(t,y):
    h, h_dot,h_ddot, x, x_dot = y
    x_dot=0.0
    x_ddot = 0.0
    if h<=Lth:
        h_ddd = (fac[3]*(fac[4]-fac[5]*fac[6]-fac[7])-h_ddot*h_dot*fac[0]\
                *roul*(fac[1]-4*h)+ fac[0]*roul*h_dot**3\
                -fac[0]*Pa*h_dot-fac[2]*(h_dot/abs(h_dot))\
                *(-h*h_dot**2+(fac[1]-h)*(h*h_ddot+h_dot**2)))/(fac[0]*roul*(fac[1]-h)*h)
        elif (h>Lth and h<=Lth+Lh):
            h_ddd = (fac[3]*((fac[4]-hha*Ah*fac[6])*(Lh+Lth-h)/Lh-fac[7]\
                +2*Lh*fac[6])-h_ddot*h_dot*fac[0]*roul*(fac[1]-4*h)\
                +
                fac[0]*roul*h_dot**3-fac[0]*Pa*h_dot-fac[2]*(h_dot/abs(h_dot))\
                *(-h*h_dot**2+(fac[1]-h)*(h*h_ddot+h_dot**2)))/(fac[0]*roul*(fac[1]-h)*h)
            elif h>Lth+Lh:
                h_ddd =
                (-1*fac[3]*np.pi*r0*hqa*((h+Lhb+Lth-Lh)*(Ts-Te)+2*Lh*fac[6])-h_ddot*h_dot*fac
                [0]*roul*(fac[1]-4*h)\
                +
                fac[0]*roul*h_dot-fac[0]*Pa*h_dot-fac[2]*(h_dot/abs(h_dot))\
                *(-h*h_dot**2+(fac[1]-h)*(h*h_ddot+h_dot**2)))/(fac[0]*roul*(fac[1]-h)*h)
            dydt=[h_dot,h_ddot,h_ddd,x_dot,x_ddot]
            return dydt

```

```

T = []
data_final = []
for i in range(1):
    sol_data = []
    y0 = [0.0, fac[11], 0.0, 0.1, 0.0]
    t0 = 1e-10
    solver = ode(ode1).set_integrator('dopri5', nsteps = 100000, atol = 1e-15)
    solver.set_solout(solout)
    solver.set_initial_value(y0, t0)
    solver.integrate(1);
    y0_2 = np.array(sol_data)[-1, 1:6]
    solver = ode(ode2).set_integrator('dopri5', nsteps = 100000, atol = 1e-15)
    solver.set_solout(solout2)
    solver.set_initial_value(y0_2, np.array(sol_data)[-1, 0])
    results = solver.integrate(100)
    data_final.extend(sol_data)
T.extend(np.array(sol_data)[: , 0] + np.array(sol_data)[-1, 0] * (i))
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(np.array(T), np.array(data_final)[: , 1])
plt.xlabel('t')
plt.grid()
plt.show()

```


致谢

我对于波波船发动机的兴趣来源于对生活中看到的事物的好奇，因于这份好奇，我对这个问题才展开分析和研究。但是在分析过程中我的理论其实经历过很多次的改进，就像科学研究一样，每一次理论的迭代都伴随着考虑了更多的因素。每一次理论思路的变换，都离不开我的理论知识的增长以及他人的帮助。在这里我要郑重的感谢许多人对我的帮助，这些帮助不仅仅体现在这份研究的改进和完成，更在于对我物理思想上的启发和我研究方法的提点。

首先，我要感谢我的指导老师雷祥翠老师的指导和鼓励。我对热力学问题的原理解以及对于很多理论的推导离不开雷老师的教导和提点。当我提出问题的时候，雷老师总会第一时间帮我进行分析并尝试解答，也曾告诉我许多解答的思路，让我豁然开朗。在数据可视化表达上，雷老师教会了我许多方法，让我在论文撰写上轻松很多。

其次，我要感谢我的父母对我的帮助和支持。他们积极帮助我将家里收拾出一块空地供我做实验，同时在我进行研究的时候给予我鼓励。这让我在奋斗的过程中有了依靠，也进展的更加顺利。他们在背后的付出有时候比理论上的支援更为重要，也是我完成这项研究不可或缺的一部分。

然后，我要感谢北京大学的罗煜东博士。由于我刚接触编程，对于很多计算机语言的逻辑表达和格式不太了解，而论文中又涉及到微分方程的分段数值求解与不同阶段的切换求解等复杂的操作，因此独立完成程序的编写对我来说有很大的挑战。而罗煜东博士热心的帮我解答程序上的相关问题，指导我完成了程序的编写，让我少走了许多弯路。

最后，我要感谢人大附中对我的栽培和支持。人大附中诸多老师的教导，让我真正有了定量分析物理现象、建立物理图像的能力，也对物理产生了浓厚的兴趣。同时在进行实验的时候需要很多实验设备和耗材，而我并不了解应该采购哪些品牌的设备比较合适，便向学校求助。感谢实验室的张永平老师支持我的想法并借给了我所有我需要的实验器材，支持我完成了实验。

大家的帮助如同强大有力的后盾，令我大胆而无忧的进行探索。他们的努力是至关重要的，也直接或间接的使我的物理能力得到了提升。但我理论知识仍有欠缺，研究仍有许多不足，往后道路坎坷艰难，感谢你们的支持让我有了走下去的勇气！