

参赛队员姓名：喻科霖；张潇文

中学：重庆市育才中学校

省份：重庆

国家/地区：中国大陆

指导教师姓名：张和松；张程鑫

指导教师单位：重庆市育才中学校

论文题目：射流在可透界面的折射现象——
与光学折射的异同研究

射流在可透界面的折射现象

——与光学折射的异同研究

喻科霖，张潇文

摘要

本文研究了射流与可透界面（如肥皂膜、金属网等）相互作用后产生的折射现象。此处，折射指射流在穿过可透界面前后发生的方向偏转。基于定常层流流体的连续性方程和动量方程，我们推导了射流折射定律，即出射角的正弦值与入射角和入射角差值的正弦值成正比。理论还表明，当入射角超过某一特定值时（后称临界入射角），射流会与界面融合。在理论研究基础上，我们搭建了实验装置，定量研究了可透界面的属性和射流的韦伯数等因素对射流偏转规律的影响。结果表明：**1)** 在相同韦伯数下，射流的出射角与入射角大小呈正相关关系，且其在高韦伯数下具有明显偏离线性的现象；**2)** 在相同入射角下，射流出射角随韦伯数的增大而减小；**3)** 临界入射角与韦伯数呈正相关关系，且当韦伯数较小时，临界入射角随韦伯数增加而迅速增大；**4)** 当金属网与纱布折射体系的入射角、可透界面的孔隙目数与韦伯数较大时，实际测得的出射角比理论预测的出射角更大。通过研究多种可透界面的射流折射现象，本文明确了射流折射理论的适用范围，为基于射流折射现象的流体控制及应用提供了更加完整与严谨的分析框架。

关键词：射流；折射定律；肥皂膜；金属网；纱布



上述 3 幅图分别展示了射流在透过肥皂膜、金属网与纱布时的偏折现象

目录

1. 引言.....	4
2. 射流在不同界面的折射现象.....	5
3. 理论模型.....	7
3.1. 射流透过肥皂膜的偏折.....	7
3.1.1. 基于欧拉法的射流折射规律推导.....	7
3.1.2. 关于射流折射规律的讨论.....	9
3.2. 射流透过金属网偏折.....	11
3.3. 临界入射角.....	12
4. 定量实验研究.....	13
4.1. 肥皂膜射流折射实验装置.....	13
4.2. 射流透过肥皂膜的折射研究.....	14
4.2.1. 出射角与入射角关系.....	14
4.2.2. 临界入射角与韦伯数关系.....	15
4.3. 射流透过金属网的折射研究.....	17
4.3.1. 实验装置的调整.....	17
4.3.2. 出射角与入射角关系.....	18
4.3.3. 临界角与韦伯数及金属网目数关系.....	20
4.4. 射流透过纱布的折射研究.....	21
5. 总结与展望.....	22
参考文献.....	23
致谢.....	24
附录.....	25
I. 表面张力系数与韦伯数计算.....	25
I.1. 表面张力系数的测量——滴重法.....	25
I.2. 射流入射速度与韦伯数的推导.....	26
II. 肥皂膜射流折射定量实验数据集.....	29
III. 金属网射流折射定量实验数据集.....	30
IV. 极高入射流速下的金属网射流折射现象.....	33
V. 纱布射流折射定量实验数据.....	34

1. 引言

在日常生活中，我们可以在厨房见到许多有趣的物理现象。例如，在清洗筛网时，从水龙头流出的射流在穿过筛网等可透界面时会发生角度偏转，类似于几何光学中光线在穿过不同介质的分界面时发生的折射现象。该现象引起了我们的兴趣，也在近年吸引了流体领域诸多研究者的关注。

例如，G. Kirstetter 等人的研究表明[1-2]，当肥皂液以不同的角度透过肥皂膜时，肥皂膜因形变会对肥皂液射流施加一个力，即肥皂膜对肥皂液射流的表面力合力（压力与表面张力合力）会使得肥皂液射流产生偏折。随着肥皂液射流入射角的变化，可能会先后出现折射现象（如图 1(a)）和吸收现象（如图 1(b)），出射射流的性质取决于界面处流体的韦伯数。J. T. Chan 等人的研究也表明^[3]，射流折射与光学折射存在相似性，但实验得到的射流出射角-入射角关系与斯涅尔（Snell）折射定律的预测有所不同，因此我们将对射流的折射现象及其折射规律进行进一步探究。同时，J. T. Chan 等人通过倾斜肥皂膜并记录不同等效重力加速度（重力加速度相对于肥皂膜法向方向的分量）下的出射角，发现重力对肥皂膜体系的射流折射规律影响不大。这表明，斜向射入水平肥皂膜的射流与竖直射入倾斜肥皂膜的情况等效。另一方面，李翔城等人的研究则显示^[4]，与细射流相比，同等流速下，粗射流在透过肥皂膜时更加稳定，更不易破坏肥皂膜。

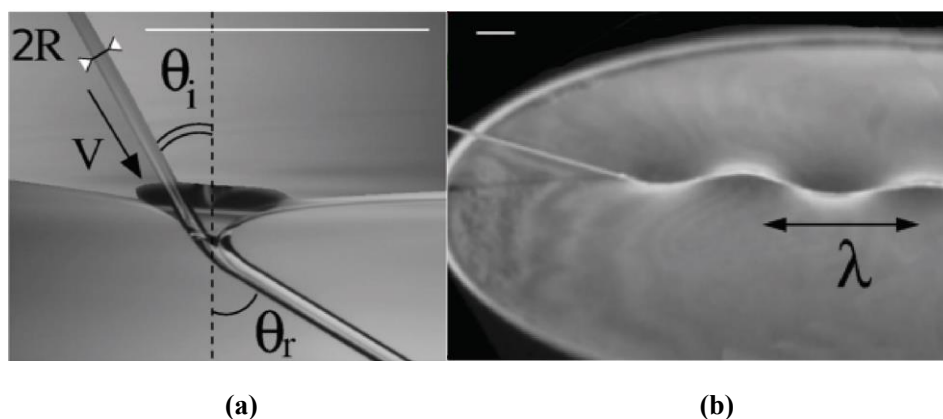


图 1 肥皂膜-肥皂液体系的射流折射现象与吸收现象（图引自文献[2]）。(a)图展示了肥皂膜体系的射流折射现象。其中， θ_i 为射流入射角， θ_r 为射流出射角， R 为入射射流半径， V 为入射射流速度。(b)图展示了超过临界入射角时的射流吸收现象，可观察到射流与界面融合并产生波动现象，其波动波长为 λ 。

此前的研究多注重将射流折射与光的折射进行类比，基于近似的方法进行理论研究，这些研究发现射流在小角度入射时发生的偏折现象与光的折射规律一致，即入射角与出射角的正弦值成正比。然而，已有的实验研究发现射流在大角度入射时的偏折现象与理论偏差明显，这意味着还缺乏理论上关于大角度入射及

在该范围内发生的临界现象（出射角为 90 度的吸收态）的定量描述。需要注意的是，光学折射的折射规律具有相当的普适性，对入射角的大小没有要求。这意味着液流折射的机制与光学折射具有本质的不同，物理图像上也不可能有直接的类比。因此，从理论上寻找对液流折射规律更普遍直接的描述框架是一个值得探索的方向。此外，此前的研究多集中于探究经过肥皂膜体系的射流折射现象，对于非肥皂膜体系的射流折射探究甚少。在光学折射中，光线经不同介质折射现象的不同仅体现在介质的折射率差异，而与其任何其他性质无关。因此，一个自然的问题是，对于除肥皂膜之外的可透界面，射流的折射也具有普遍规律吗？还是射流的折射现象与规律会被界面更复杂的性质所影响？对这一系列问题的理论回答与实验探索是一个颇有挑战的任务！在上述问题的驱动下，本文旨在探索射流在经过不同可透界面，尤其是在肥皂膜与金属网时的折射现象。本文的研究不仅在理论上有助于对流体跨界面运动的基本机制进行更深入的理解，对工业与民用流体控制领域也具有相当的实际应用价值。

本文的详细安排如下，在第二节中，我们展示了不同界面的射流折射现象，并定性分析了在以肥皂膜、金属网和纱布分别作为可透折射界面中射流折射现象的规律。在第三节中，基于定常不可压缩流动的连续性定理与动量定理，我们推导了肥皂膜体系的射流折射规律，并将其推广至金属网与纱布体系。与此同时，本文类比光学折射中的全反射现象，对射流折射现象与吸收现象之间的临界入射角进行了推导。在第四节中，我们自主搭建了定量实验平台，对肥皂膜、金属网与纱布分别作为可透折射界面的射流折射现象进行了定量实验，并与理论进行了对比。最终，我们将在总结部分讨论实验结果并对射流折射现象与光学折射现象。

2. 射流在不同界面的折射现象

本节中，我们选取肥皂膜、金属网与纱布作为界面，对射流经过其前后的运动状态进行初步的观察与分析。

首先，肥皂膜体系的射流折射现象如图 2 所示。为了更好地展示射流通过肥皂膜后发生的方向变化，我们利用绿色激光对射流进行示踪。如图所示，竖直的入射射流流经肥皂膜后发生了明显的偏折现象，且肥皂膜发生明显形变。



图 2 肥皂膜体系射流折射现象。可明显观察到入射射流向肥皂膜偏折，且肥皂膜产生了形变。

其次，金属网体系的射流折射现象如图 3(a)与图 3(b)所示。与肥皂膜类似，射流在透过金属网后同样发生了明显的偏折。



图 3 金属网体系射流折射现象。(a)展现了射流向肥皂膜偏折的现象。(b)展现了射流的出射角。

最后，纱布体系的射流折射现象如图 4(a)与图 4(b)所示。与肥皂膜与金属网体系类似，射流在透过纱布后也发生了明显的偏折现象。

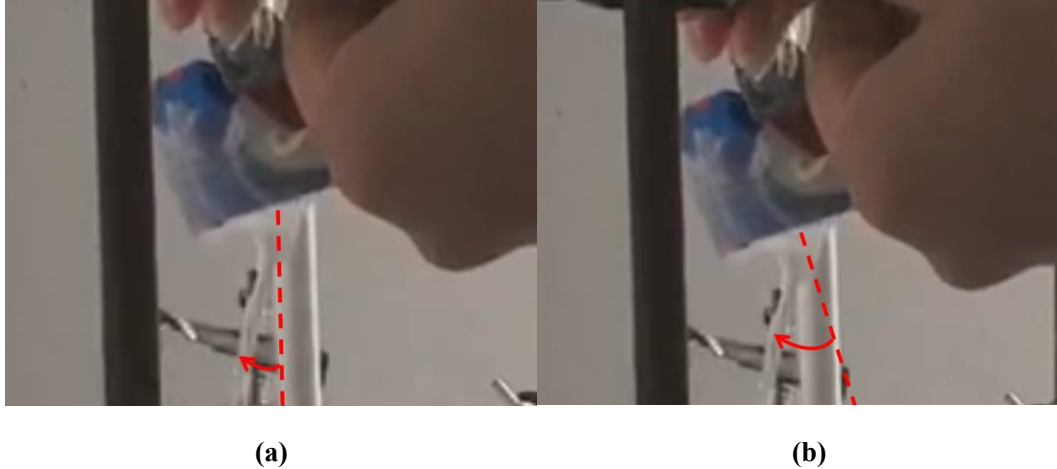


图 4 纱布体系射流折射现象的预实验图像。(a)展现了射流向纱布偏折的现象。(b)展现了射流的出射角。

3. 理论模型

上一节的实验展示了射流透过几种不同界面的折射现象，说明射流在可透界面上的偏折是一种较为普适的动力学行为。本节基于肥皂膜这种自由液膜的射流折射现象，利用定常不可压缩流动的连续性方程与动量方程推导了透过肥皂膜的射流折射规律，并将其推广至金属网。推导出射流折射规律后，本节将类比光学中的全反射现象，对射流折射现象转向吸收现象（发生膜流融合或射流被偏折至平行于肥皂膜）的临界入射角进行推导。

3.1 射流透过肥皂膜的偏折

3.1.1 基于欧拉法的射流折射规律推导

首先，本节将讨论肥皂膜的射流折射现象，并利用欧拉法^[5]对其进行描述，如图 5 所示。

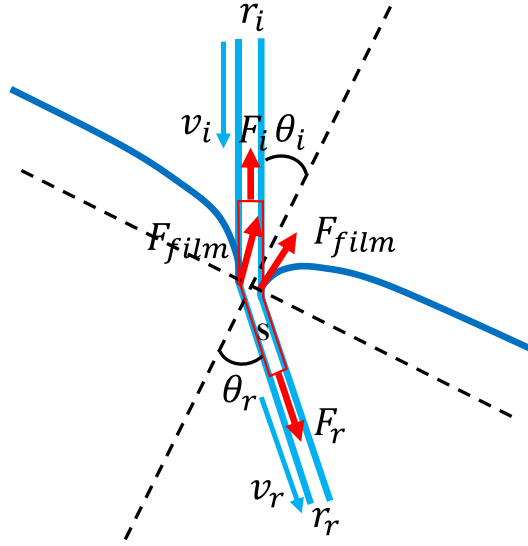


图 5 肥皂膜射流折射体系的示意图

为了在符合实际情况下保证理论推导的简洁性，本章假设入射射流与出射射流的流动均为定常不可压缩流动，折射过程中射流不带有质量损失，且射流不与肥皂膜发生混合，但肥皂膜完全浸润射流表面（该假设的合理性可见图 1a）。

图 5 中所示的控制体 S 可用如下连续性方程^[5]描述

$$Q = \pi r_i^2 v_i = \pi r_r^2 v_r \quad (1)$$

其中， Q 为通过控制体 S 的流体体积流量， r_i 为入射射流半径， v_i 为入射射流流速， r_r 为出射射流半径， v_r 为出射射流流速。控制体 S 的动量方程可以被分为沿肥皂膜切向方向的动量方程与法向方向的动量方程^[2]。沿切向方向的动量方程为

$$Q(\rho v_r \sin \theta_r - \rho v_i \sin \theta_i) = F_r \sin \theta_r - F_i \sin \theta_i \quad (2)$$

其中， ρ 为射流流体的密度， θ_i 为射流的入射角， θ_r 为射流的出射角， F_i 为入射射流给予控制体 S 的表面张力， F_r 为出射射流给予控制体 S 的表面张力。控制体 S 的法向动量方程^[2]为

$$Q(\rho v_r \cos \theta_r - \rho v_i \cos \theta_i) = F_r \cos \theta_r - F_i \cos \theta_i - F_{film} \quad (3)$$

其中， F_{film} 为肥皂膜形变所给予控制体 S 的表面力合力（表面张力与压力合力，方向近似为肥皂膜法向）。式(2)与式(3)中的 F_i 、 F_r 可分别表示为

$$F_i = \gamma_{jet} \pi r_i \quad (4)$$

$$F_r = \gamma_{jet} \pi r_r \quad (5)$$

由于本章假设了肥皂膜完全浸润射流表面，根据 C. Raufaste 等人的研究^[1]，可将 F_{film} 近似为

$$F_{film} \sim 4\pi\gamma_{film}r_r \quad (6)$$

考虑到在肥皂膜-肥皂液体系中， $\gamma_{film} = \gamma_{jet} = \gamma_{soap}$ ， $r_r \sim r_i$ ，式(6)可进一步变换为

$$F_{film} \sim 4\pi\gamma_{soap}r_i \quad (7)$$

其中， γ_{soap} 为肥皂液的表面张力系数。为简化求解，定义肥皂膜折射体系的界面韦伯数为

$$We = \frac{\rho v_i^2 r_i}{\gamma_{film}} = \frac{\rho v_i^2 r_i}{\gamma_{soap}} \quad (8)$$

结合式(1)至式(8)，解得的肥皂膜的射流折射规律为

$$\sin(\theta_r - \theta_i) = \frac{4}{(We - 1)} \sin \theta_r \quad (9)$$

3.1.2 关于射流折射规律的讨论

由式(9)可知，在韦伯数相同的情况下，射流折射规律表述为出射角的正弦值正比于出射角与入射角差值的正弦值。这与光学折射现象中的斯涅尔定律^[6]（出射角的正弦值正比于入射角的正弦值）有所不同。但在低入射角情况下，射流折射规律与斯涅尔定律可以通过适当近似拥有类似的形式。因为出射角与入射角较小， $\sin(\theta_r - \theta_i) \sim \theta_r - \theta_i$ ， $\sin \theta_r \sim \theta_r$ 。因此，可将式(9)改写为

$$\theta_r - \theta_i = \frac{4}{(We - 1)} \theta_r \quad (10)$$

通过对上式(10)进行整理，出射角-入射角关系变为

$$\theta_r = \frac{We - 1}{We - 5} \theta_i \quad (11)$$

斯涅尔折射定律的表达式为

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad (12)$$

其中 n_1 为入射介质折射率， n_2 为出射介质折射率。鉴于入射角与出射角较小， $\sin \theta_i \sim \theta_i$ ， $\sin \theta_r \sim \theta_r$ 。根据式(12)与上述近似，斯涅尔定律在低入射角下变为

$$\theta_r = \frac{n_1}{n_2} \theta_i \quad (13)$$

对比式(11)与式(13), 可见在低入射角下, 射流折射规律类似于斯涅尔折射定律, 该结论也在前人的研究中有所体现^[2]。然而, 对于任意入射角而言, 区别于斯涅尔光学折射定律, 给定入射角后式(9)本质上是关于出射角的超越方程, 无法给出出射角的显式解。因此, 不能直接将射流折射当作类光学折射处理。当然, 方便起见, 我们依然可以定义射流折射现象的“界面折射率”(后简称折射率)为

$$n(We) \equiv \frac{4}{(We - 1)} \quad (14)$$

折射率 $n(We)$ 随韦伯数 We 变化的规律可见图 6。可见折射率与韦伯数呈负相关关系。特别地, 当 $We \rightarrow 1, n(We) \rightarrow +\infty$; 当 $We \rightarrow +\infty, n(We) \rightarrow 0$ 。

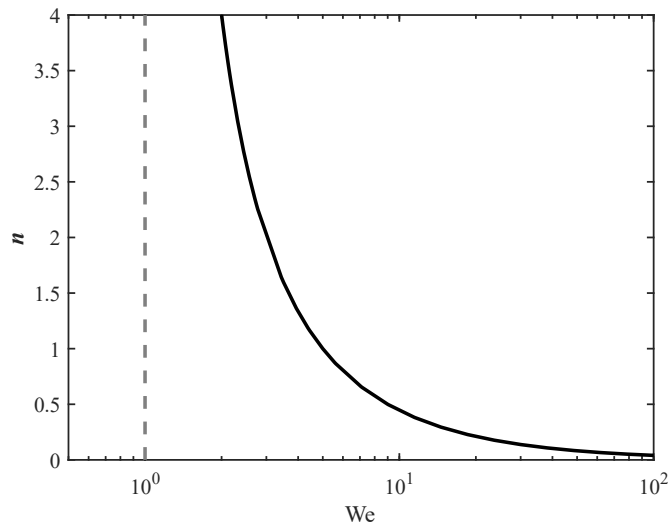


图 6 折射率 $n(We)$ 与韦伯数 We 的关系绘图。横轴采用对数刻度, 纵轴采用线性刻度。

出射角度 θ_r 与入射角度 θ_i 随折射率 $n(We)$ 变化的图像如图 7 所示。可见随着折射率的降低, 出射角度与入射角度将会逐渐趋同(射流趋近于“直进直出”状态, 如图中黑色虚线所示)。这意味着肥皂膜对射流的偏折作用会随着韦伯数的增大而减小, 进一步说明了作用于射流的表面力合力对射流偏转的贡献。另外, 红色点线在入射角度较大时具有明显偏离线性的趋势, 这与式(9)的非线性关系一致, 说明了前人研究中将射流折射近似为光学折射的局限性。

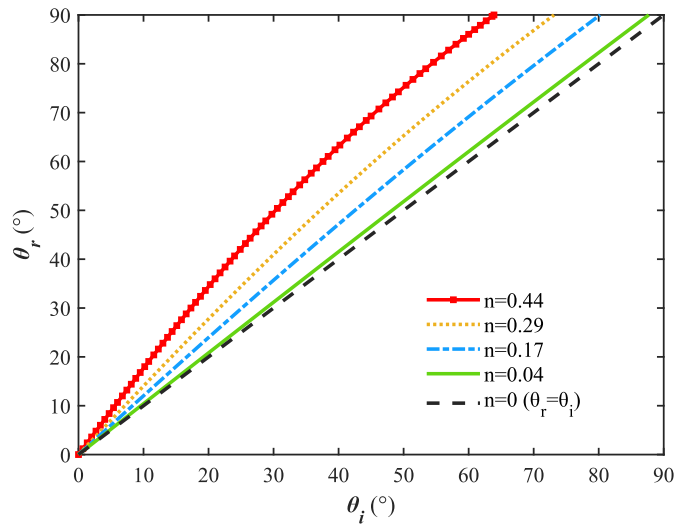


图 7 出射角 θ_r 与入射角 θ_i 随折射率 $n(We)$ 变化的关系绘图

3.2 射流透过金属网偏折

类比射流透过肥皂膜的偏折，射流透过金属网的偏折也可以用肥皂膜体系的理论进行描述，其原因为射流透过金属网时会在金属网表面浸润形成水膜，水膜会类比肥皂膜发生形变（如图 8 所示）。



图 8 金属网体系中的水膜形变

据此，射流透过金属网的折射规律也理应遵从式(9)与式(10)，但韦伯数 We 的表达式将变为

$$\text{We} = \frac{\rho v_i^2 r_i}{\gamma_{film}} = \frac{\rho v_i^2 r_i}{\gamma_{water}} \quad (15)$$

显然，水膜的表面张力系数较肥皂膜更大，因此导致在其余条件不变的情况下拥有更小的韦伯数。进而，根据图 6（折射率 $n(\text{We})$ 与韦伯数 We 的关系绘图），金属网-水射流体系具有更大的折射率，从而导致更强的偏折。然而，实际实验中，考虑体系本身的不同，水流流速和半径并非完全单独可控的量，关于该情景的具体讨论，在后续实验部分展示。

3.3 临界入射角

由图 7 可知，随着入射角的增大，出射角也会逐步增大并逐渐逼近 90 度。类比光学中的全反射现象（当光线由光密介质射向光疏介质且折射角达到 90 度时，折射光线消失，光线被折射界面全反射），当出射射流的出射角达到 90 度时，射流将会被肥皂膜或固体网状结构近壁面的水膜吸收，形成吸收现象（具体见后文图 14 与图 19）。类比光学中的临界入射角（发生全反射现象），我们定义射流发生折射现象转吸收现象的最小入射角为临界入射角 θ_c 。

基于前文推导的射流折射规律，可以计算出射流折射现象与吸收现象的临界入射角。类比光学中的全反射，令射流出射角 $\theta_r = 90^\circ$ 可以推导出临界入射角 θ_c 与韦伯数 We 之间的关系为

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[\frac{4}{(\text{We} - 1)} \right] = \frac{\pi}{2} - \arcsin[n(\text{We})] \quad (16)$$

临界入射角 θ_c 与韦伯数 We 之间的关系绘图如图 9 所示。可见 θ_c 随 We 单调递增，变化的趋势随着韦伯数的增加呈现先快后慢的趋势，这意味着，在韦伯数较小的区间内，韦伯数的小幅度增加（如增加入射速度或者射流半径），可以获得相当程度液流偏折量的增益；反之，当韦伯数较大时，再想获得临界入射角的有效增加，需要数倍地增加韦伯数来实现。当 $\text{We} \rightarrow +\infty$ 时， $\theta_c \rightarrow 90^\circ$ ，这种情况下接近垂直界面入射的射流也会被偏折至接近平行于界面甚至被吸收。

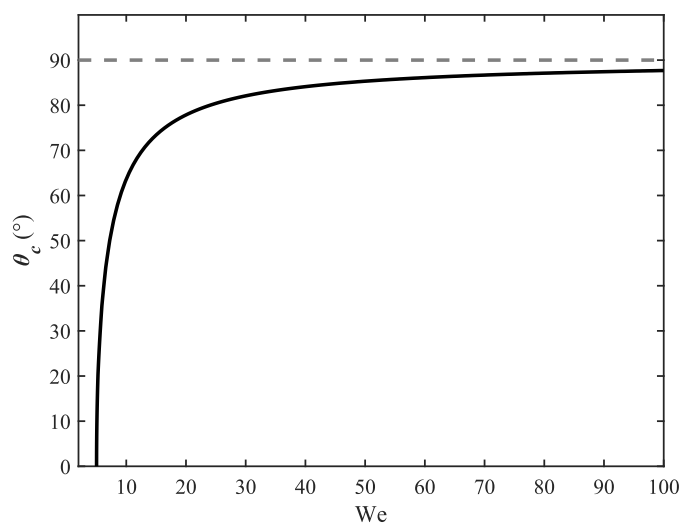


图 9 临界入射角 θ_c 随韦伯数 We 变化的关系绘图

4. 定量实验研究

承接上节的理论分析，本节将会对肥皂膜、金属网与纱布这三种可透界面的射流折射现象进行定量实验并与理论对比，从而验证理论分析推导出的肥皂膜射流折射规律的正确性。若理论分析与部分实验不完全符合，本节将提出这部分实验数据偏离理论预测的定性解释并提出进一步的实验计划。

4.1 肥皂膜射流折射实验装置

承接上文的理论分析，射流的出射角应与射流入射角和韦伯数相关。基于此，我们在探究肥皂膜的射流折射现象时自主搭建了基于可调速的螺旋注射泵（远航动力 ZS1T-V5 型注射泵）与注射器的实验装置（见图 10），其使用的界面为由铝箔纸环约束的圆形肥皂膜。实验装置中界面的倾斜角度可通过旋转刻度盘改变，进而等效为改变射流的入射角度。实验过程中，我们利用录影设备拍摄射流折射的影像并将其导入 Tracker 进行角度测量与分析。

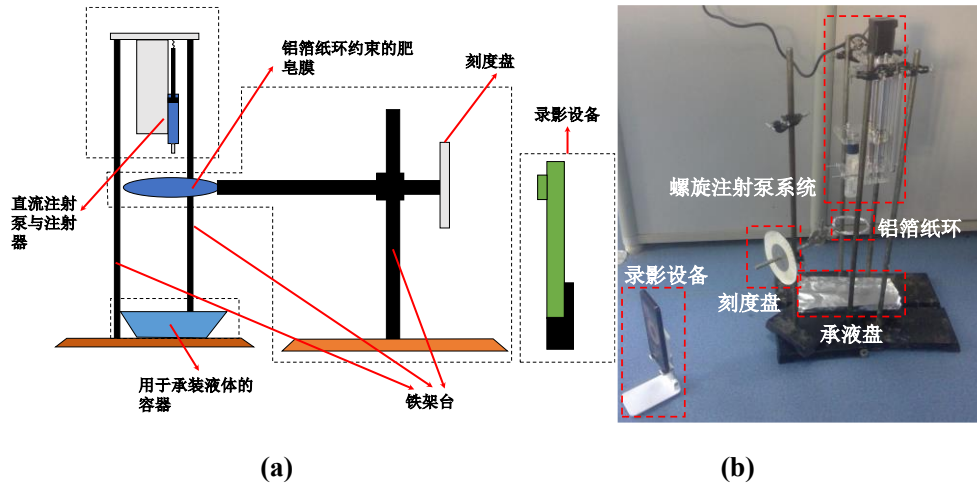


图 10 实验装置 1 的示意图 (a) 与实物图 (b)

4.2 射流透过肥皂膜的折射研究

4.2.1 出射角与入射角关系

基于上一小节的实验装置，我们对射流透过肥皂膜的折射现象进行了定量实验。定量实验的具体流程如图 11 所示，本研究计划完成 3 组韦伯数下的实验，每组相同韦伯数下的实验都会重复 3 次取平均。其中肥皂液的配置过程、表面张力系数的测量与韦伯数的计算详见附录 I。

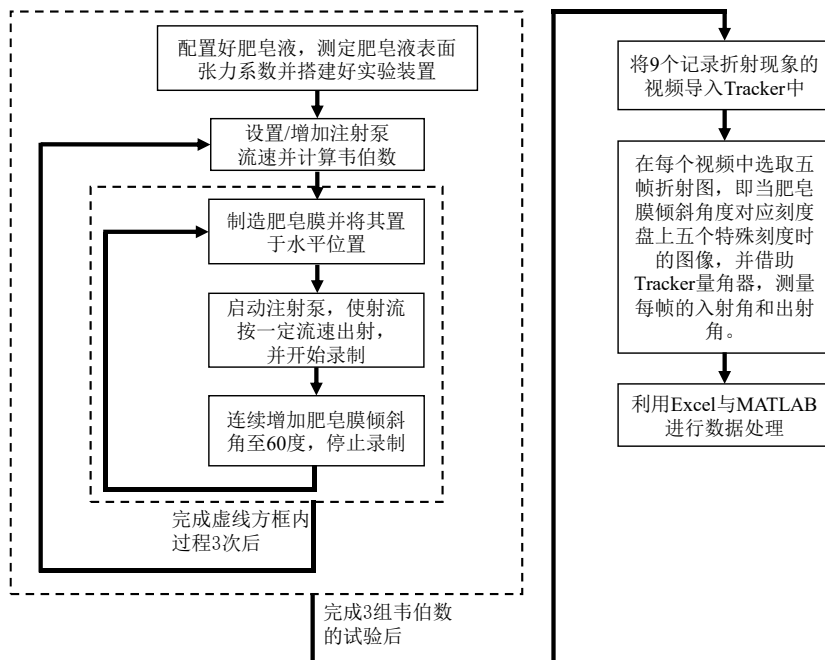


图 11 肥皂膜射流折射出射角-入射角定量实验的实验流程图

通过改变注射泵的推进速度，我们得到了 3 个不同的韦伯数（韦伯数的实验测定在附录 I 给出），分别为 9.03，14.5，28.3。图 12 展现了三种不同韦伯数情况下的出射角与入射角关系。其中，红色、黄色与蓝色的实线分别代表了韦伯数为 9.03，14.5，28.3 下的出射角-入射角关系理论预测，3 种相应颜色的数点代表了实际定量实验得到的结果。可见在同一韦伯数下，出射角大小与入射角大小正相关；在同一入射角下，出射角大小与韦伯数负相关。

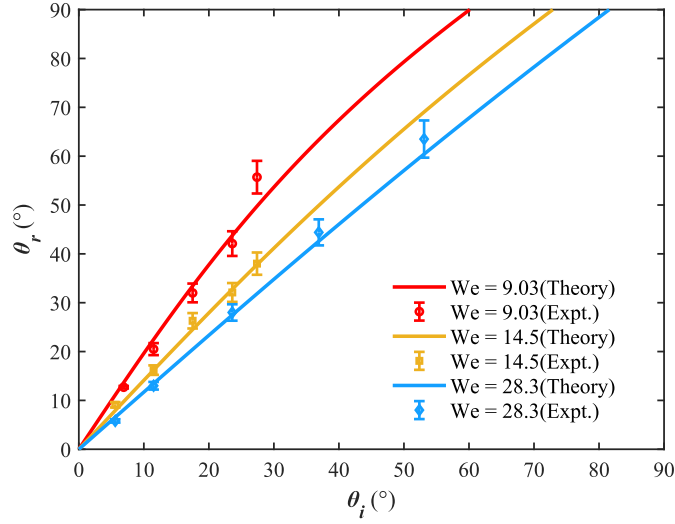


图 12 三种韦伯数（9.03, 14.5, 28.3）下的出射角-入射角关系。图内数据点的误差棒数据来源于重复实验的数据标准差。图 12 的原始数据集详见附录 II 表 2。

定量实验中出射角随入射角与韦伯数的变化关系也在误差范围内说明理论模型给出的结果是合理的。鉴于肥皂膜体系的射流折射现象的动力学分析基于作用于射流的表面力合力，且定量实验的结论与理论吻合，我们认为射流折射现象的物理本质如下：射流周围的流体给予射流以多种表面力，表面力的合力使得射流发生偏转，进而形成射流折射现象。基于理论预测，当韦伯数增大时，射流所受的表面力合力对射流偏转的影响逐渐弱于惯性影响，更难改变其运动状态。故射流更倾向于“直进直出”，出射角减小。该推论与定量实验的结论一致，进一步验证了肥皂膜射流折射定律的正确性。

4.2.2 临界入射角与韦伯数关系

如图 13 所示，（图 13 插到这后面）不同于上一小节针对出射角-入射角定量实验的实验流程，探究临界入射角-韦伯数关系的定量实验无需测量多组出射角-入射角数值，只需增大肥皂膜倾斜角直至射流被吸收并测量临界入射角即可。

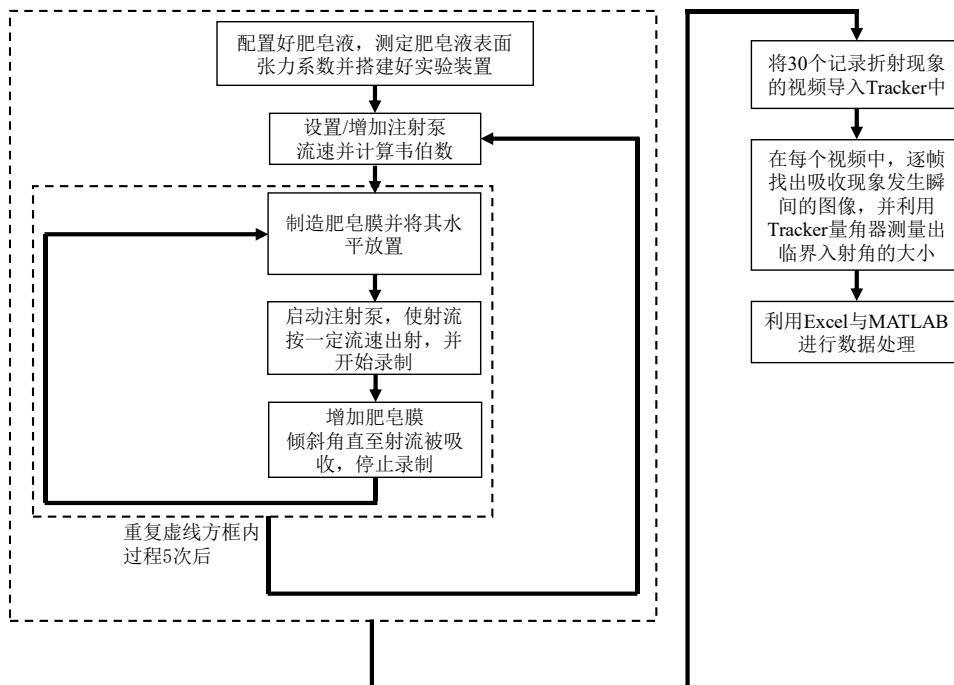


图 13 肥皂膜临界入射角定量实验的实验流程图

此处，折射体系达到临界入射角的判据如图 14 所示。当射流被肥皂膜偏折至与肥皂膜平行或汇入肥皂膜时，我们认为此时射流由折射转变为吸收，测得的入射角便为临界入射角。

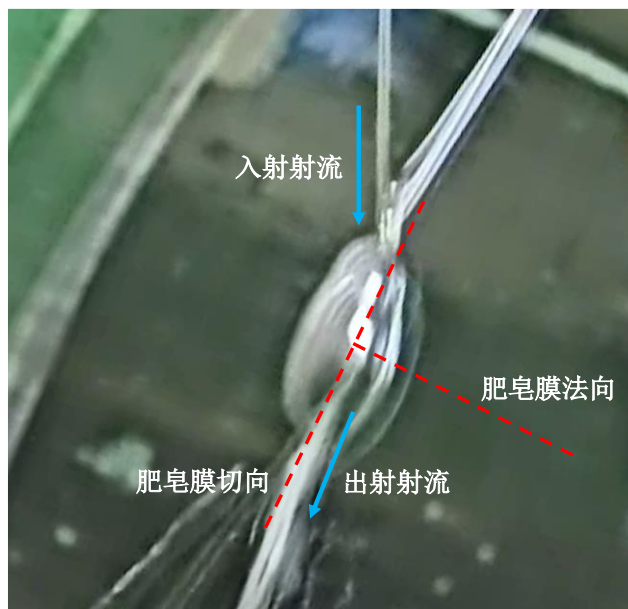


图 14 肥皂膜体系从折射现象转为吸收现象

图 15 的红色数据点展现了 6 个不同韦伯数下对应的临界入射角；黑色实线展示了理论预测的临界入射角与韦伯数之间的关系。可见临界入射角的大小与韦伯数大小正相关，定量实验所得数据与理论预测较为符合。

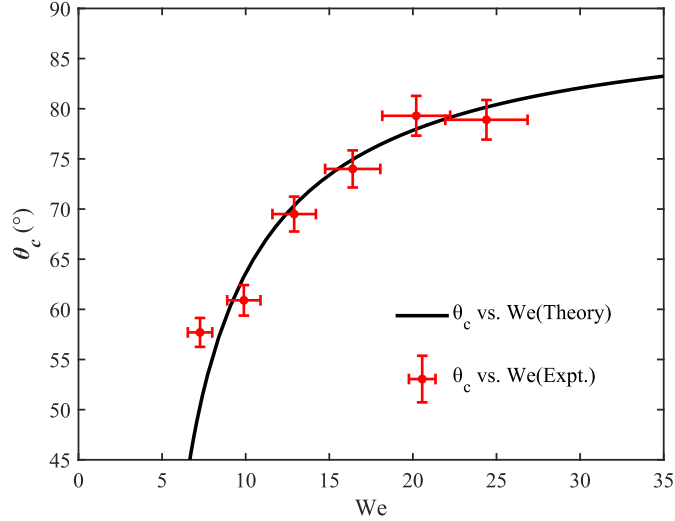


图 15 临界入射角与韦伯数的关系。图内数据点的横向误差棒数据来源于韦伯数的不确定度计算；纵向误差棒数据来源于重复实验的数据标准差。图内数据点的原始数据集详见附录 II 表 3。

根据上一小节所述，随着韦伯数的增大，射流所受表面力合力对折射体系的影响逐渐减小。因此，射流出射角度逐渐趋同于入射角度，临界入射角逐渐增大。该推论与定量实验的结论吻合，故证明肥皂膜射流折射定律的正确性。

4.3 射流透过金属网的折射研究

4.3.1 实验装置的调整

考虑到过细的射流透过金属网时会因为网线的“碰撞”干扰变为非定常流动，且金属网强度显著高于肥皂膜强度，金属网与纱布等固体网状可透界面的射流折射定量实验需要不同于肥皂膜定量实验的实验装置。具体来说，需要增大入射射流的半径与流速。通过替换注射泵与注射器的组合为直径固定（5mm）、可调节流速的出水口，我们可进行金属网与纱布折射体系的定量实验。实验过程中，我们利用希玛 AS816 型流速计对入射射流的流速进行直接计量，并计算其韦伯数。

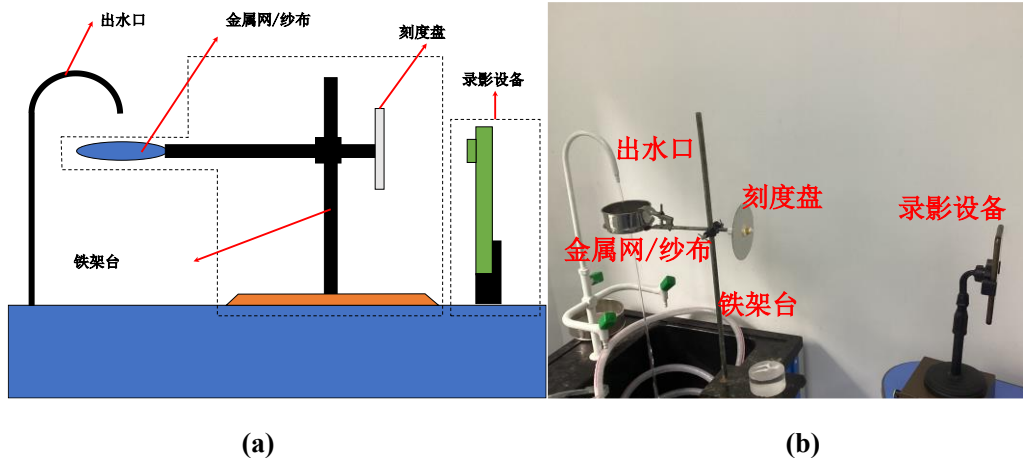
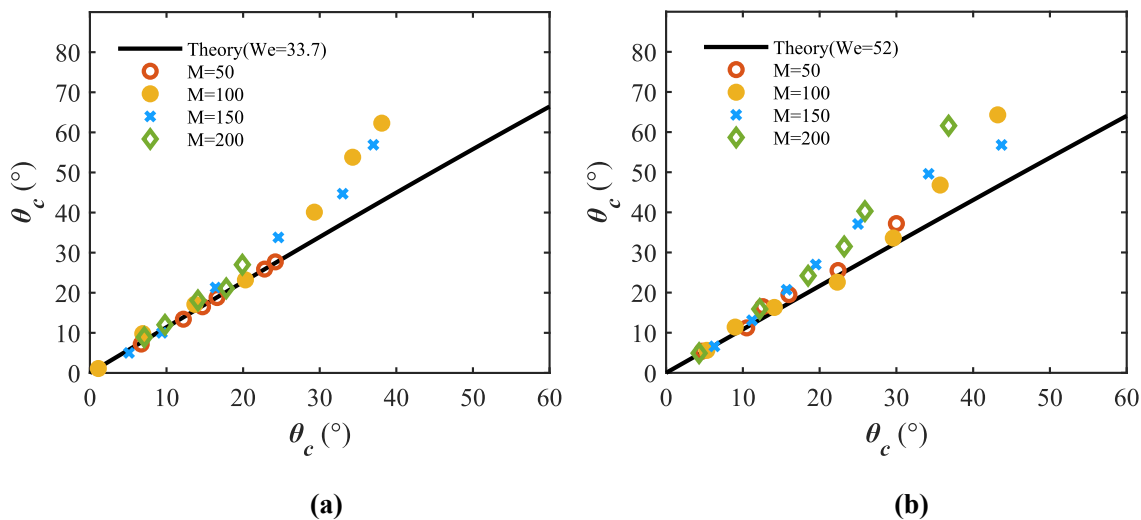
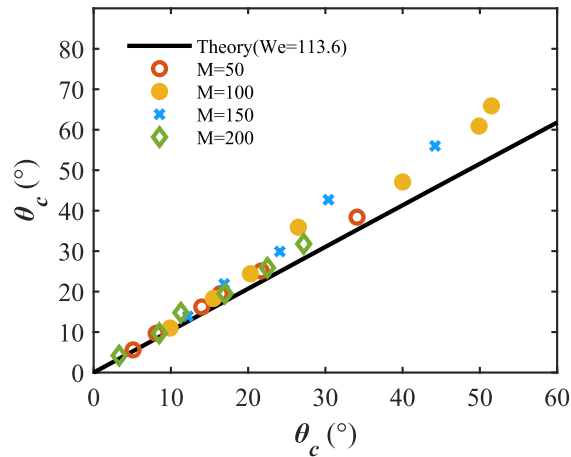


图 16 实验装置 2 的示意图 (a) 与实物图 (b)

4.3.2 出射角与入射角关系

利用调整后的实验装置，本章对射流透过金属网的折射现象进行了定量探究。金属网射流折射现象的定量实验流程与肥皂膜射流折射定量实验的流程类似，只是实验过程中改变了金属网的疏密程度，但可近似认为金属丝的粗细一致。图 17(a), 17(b)与 17(c)展示了三种韦伯数 (33.7, 52.0, 113.6) 下的射流出射角-入射角关系。定量实验中使用了四种金属网，图例中的 M 代表金属网的目数 (每平方英寸的孔数，衡量了金属网的疏密程度)。由图 17 可知，在低入射角时，定量实验结果与理论符合较好。但在大入射角下，定量实验得到的出射角比理论预测的出射角偏高。随着韦伯数的增加，定量实验与理论预测偏离更大，符合理论预测的角度范围更小。





(c)

图 17 三种韦伯数下金属网（四种目数）的出射角-入射角关系。(a)、(b)、(c) 图分别为在韦伯数为 $We=33.7$ 、 $We=52.0$ 和 $We=113.6$ 的情况下得到图内数据点原始数据详见附录 III 表 4, 5, 6.

我们认为，上述定量实验与理论的差距主要由肥皂膜与金属网的不同性质引起。在肥皂膜体系中，只有肥皂膜与出射射流发生相互作用。但在金属网体系中，由于高入射角下近界面水膜受重力作用发生较大形变，可以明显观察到第二束出射射流（如图 18 所示）的出现。

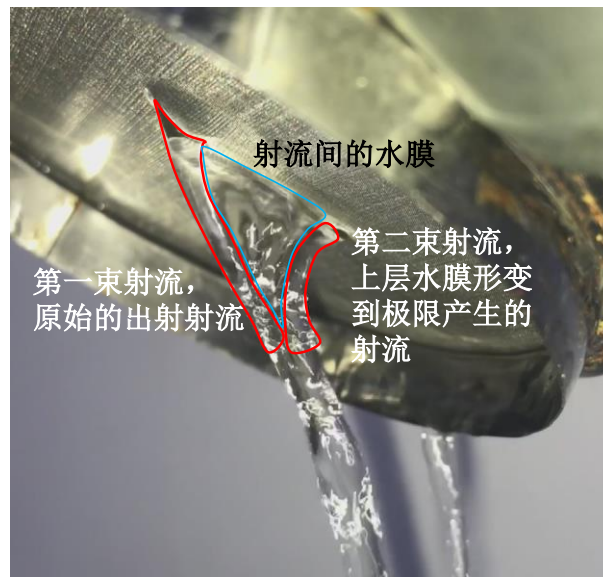


图 18 金属网折射体系（高入射角）中的 2 种射流与其相互作用

除了近界面水膜对射流的作用外，第二束射流与第一束射流也会相互作用，引起出射角的增大。关于两束射流之间相互作用的物理机制，本文给出以下猜想：两束射流之间的水膜给予了第一束射流额外的向界面偏转的力，同时康达效应使得两

束射流相互吸引。基于该猜想，后续的研究者可以通过分析两束射流之间的受力来修正理论，并通过进一步的定量实验来验证猜想的正确性。

我们在探究中还发现，当射流入射速度充分大时（大于 $2.5\sim 3\text{m/s}$ 时），射流射出角会小于射流入射角，即射流出现远离金属网向法线偏折的现象。该现象因其特殊性（射流具有极强的非定常性），在正文中我们不做进一步讨论。详情可见附录 IV。

综上所述，在低入射速度与低入射角情况下，金属网射流折射与肥皂膜射流折射规律类似，印证了近壁面水膜对射流的偏折作用。在高入射角与高入射速度下，金属网射流折射现象会与肥皂膜射流折射现象产生差异。这种差异可能是由两束射流之间的相互作用导致的。

4.3.3 临界角与韦伯数及金属网目数关系

利用调整后的实验装置，我们也对金属网体系的临界入射角-韦伯数关系进行了定量探究。其流程与肥皂膜体系临界入射角的定量实验流程相似，但在每组相同韦伯数的实验中更换了不同目数的金属网，并将单组实验的重复次数改为 3 次（金属网折射体系相较于肥皂膜折射体系更加稳定，故无需进行 5 组试验）。此处，临界角的实验判据与前面肥皂膜体系的实验判据类似，其现象如图 19 所示。实验结果如图 20 所示，其中黄色实心点与红色空心点分别是金属网目数为 100 和 150 下临界入射角和韦伯数的关系。



图 19 金属网体系从折射现象转为吸收现象

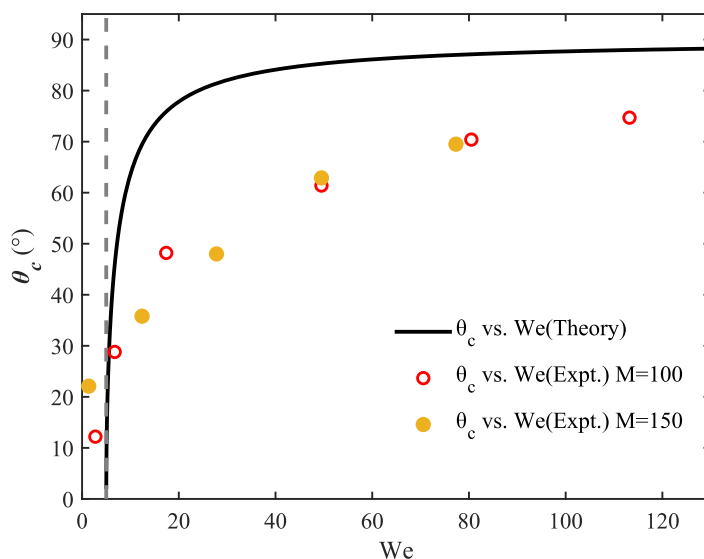


图 20 金属网临界入射角-韦伯数关系。图内数据点原始数据详见附录 III 表 7。

可见临界入射角与韦伯数正相关，且临界入射角的变化速率随着韦伯数的增大而降低。临界入射角随韦伯数的变化整体趋势与理论预测一致，但需要注意的是实验中在韦伯数偏高的情况下所测得的临界入射角与理论相比明显偏低。本文认为其原因为在第二束射流与近壁面水膜产生的牵拉作用下，射流折射与吸收现象的转化可以在更小的入射角发生。

4.4 射流透过纱布的折射研究

使用调整后的实验装置，并基于金属网出射角-入射角的定量实验流程，本节对纱布体系射流折射的出射角-入射角关系进行了定量探究。图 21(a)与 21(b)分别展现了韦伯数为 33.7，52.0 下的 25 目与 50 目纱布的出射角-入射角关系。可见当 $We = 33.7$ 与 52.0 时，25 目与 50 目的纱布在低入射角入射下，出射角-入射角关系均为正相关关系，且都与理论较为符合。这进一步证明了近壁面水膜对射流的作用是导致射流发生偏折的原因之一。

此处，通过图 21 还可得知，纱布目数越大，出射角-入射角关系偏离理论预测所需的入射角就越小。我们认为这种由目数所引起的射流折射现象的差别是由近壁面水膜的性质引起的。相较于金属网而言，水对纱布的浸润作用更强。这使得低目数的纱布在被水浸润后，近壁面形成的水膜更接近自由液膜故射流透过低目数纱布的折射现象更接近肥皂膜体系的折射现象。因此，低目数纱布体系的射流折射与理论的吻合度更高。

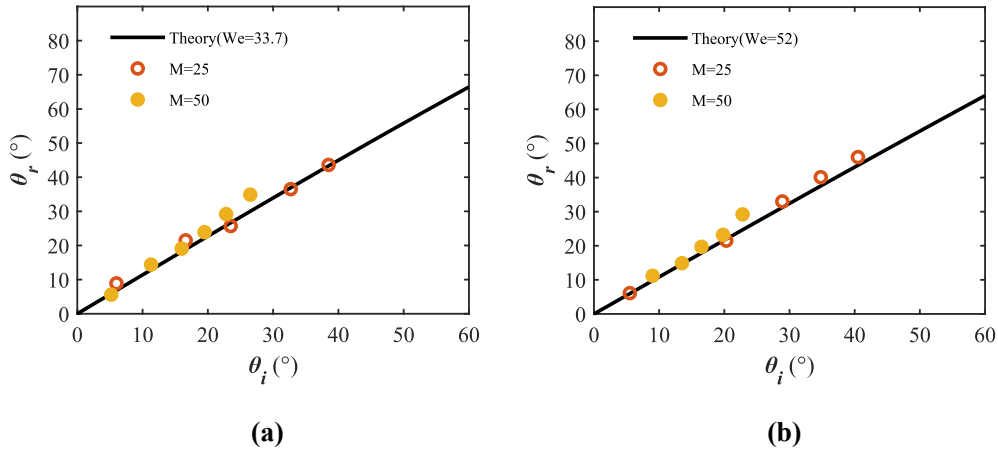


图 21 两种韦伯数（33.7, 52.0）下的纱布（两种目数）射流折射出射角-入射角关系。图内数据点原始数据详见附录 V 表 8, 9.

5. 总结与展望

本文对射流透过多种可透界面的折射现象进行了研究。理论上，我们基于定常不可压缩流体的连续性方程与动量方程推导了肥皂膜的射流折射定律，并由此得到了临界入射角对韦伯数的依赖关系。我们进一步将这一结果推广至金属网与纱布一类的固体网状可透界面体系。我们给出的射流折射定律表明，出射角的正弦值应正比于出射角与入射角差值的正弦值，其折射率与韦伯数负相关。对比光学折射中的斯涅尔定律，尽管射流折射定律在低入射角时可以通过近似回到斯涅尔折射定律的形式，但射流折射定律与斯涅尔光学折射定律存在物理本质与数学形式的完全不同。光学折射是电磁波与物质相互作用导致的传播方向偏折，而射流折射体现的是流体表面张力与惯性效应的竞争。数学上，流体的折射规律中出射角与入射角的正弦值不再是线性依赖，而是呈现非线性关系的有趣行为。

为检验理论结果，本文搭建了定量实验装置以进行原理验证实验。实验与理论结果对比表明，肥皂膜的射流折射现象与理论吻合较好，但金属网与纱布等固体网状体系的射流折射现象在相同韦伯数的大入射角下会偏离理论且偏离量随着角度增大而增大。韦伯数越大，这一偏折效果越明显。根据对实验结果的定性分析，我们认为是第二束出射射流与第一束出射射流的相互作用导致了这一情形。据我们所知，本文的实验结果首先表明了肥皂膜界面与固态可穿透界面上射流折射规律在小角度具有统一描述而在大入射角下具有不可忽略的差异这一事实。

在未来的研究中，我们希望能够进一步研究固体网状体系的射流折射现象，并修正肥皂膜射流折射理论，使其能够定量解释固体网状体系在高入射角下的射流折

射行为。与此同时，我们期待后续的研究者可以研发基于射流折射原理的射流方向改变装置，让这项启自厨房的发现能够在生活与工业中获得更加广泛的应用！

参考文献

- [1] Raufaste C, Kirstetter G, Celestini F, et al. Deformation of a free interface pierced by a tilted cylinder[J]. *Europhysics Letters*, 2012, 99(2): 24001.
- [2] Kirstetter G, Raufaste C, Celestini F. Jet impact on a soap film[J]. *Physical Review E*, 2012, 86(3): 036303.
- [3] Chan J T, Lee J L, Tjeng V, et al. The microjet-film interaction: the interaction and resulting shapes of a liquid microjet impacting a soap film[J]. *European Journal of Physics*, 2014, 35(6): 064002.
- [4] 李翔城. 薄膜射流相互作用实验探索及军事应用分析[J]. *四川兵工学报*, 2014, 35(4): 49-51.
- [5] 强元荣. 经典力学（上册）[M]. 科学出版社, 2003.
- [6] 赵凯华, 钟锡华. 光学（上册）[M]. 北京大学出版社, 2008.
- [7] Lee B B, Ravindra P, Chan E S. A critical review: surface and interfacial tension measurement by the drop weight method[J]. *Chemical Engineering Communications*, 2008, 195(8): 889-924.
- [8] International Association for the Properties of Water and Steam (June 2014). “<http://www.iapws.org/relguide/Surf-H2O.html>”.

致谢

从开题到如今即将结题，半年时光转瞬即逝。本文从选题到完成研究过程的分工如下：喻科霖在本次研究中完成了射流折射的理论推导，主导了肥皂膜、金属网与纱布射流折射的定量实验，并完成了论文大部分内容的撰写。张潇文在本次研究中完成了所有的实验数据处理与绘图，担任了定量实验的助手，并在后期承担了论文的修改工作。

在本文接近尾声时，我们诚挚地向所有给予我们帮助的人士致以谢意。首先，我们要感谢我们的指导老师张和松老师与张程鑫老师。当我们将厨房中洗筛网得到的现象告知张程鑫老师时，张程鑫老师十分支持我们对相关现象展开更为细致的研究。得益于老师们深厚的理论功底与扎实的动手能力，我们在这次科学研究中学习到了很多。小到显微镜在微距测量中的应用，大到实验方案的确定，张老师孜孜不倦地指导我们，令我们学习到了系统性的科学研究方法，为我们将来的学习道路奠定了坚实的基础。

其次，我们要感谢重庆育才中学 2024 届的代唯学长对我们的帮助。代学长在理论推导与 MATLAB 数据处理方面为我们指点迷津，为我们提供了许多解决问题的思路。

最后，我们要感谢我们的父母为我们的研究提供的支持——正是因为他们的资金支持，我们才有机会能够搭建出我们的实验装置；正是因为他们的支持与鼓励，我们才能顺利地完成本次研究与本文的撰写。

结尾之际，也感谢重庆育才中学的全体老师们与同学们对我们的关心与鼓励。正是因为大家的支持，我们才能坚持下去，以高标准完成本次研究。

附录

I. 表面张力系数与韦伯数计算

1. 表面张力系数的测量——滴重法

本文利用了滴重法对液体的表面张力进行测量。滴重法的原理为受力平衡：当液滴处于悬挂与滴下的临界状态时，液滴所受的重力刚好与表面张力平衡。推导并带入受力表达式即可解出液滴的表面张力系数。液体表面张力系数的理想表达式为

$$\gamma = \frac{mg}{\pi d} \quad (I1)$$

但鉴于液滴与滴口发生的并不是理想的圆形浸润，BB. Lee 等人于 2008 年给出了带七阶修正项的表面张力系数表达式，其为^[7]

$$\gamma = \frac{mg}{\pi d \varphi \left((d/2) / \left(\frac{m}{\rho} \right)^{1/3} \right)} \quad (I2)$$

其中，记 $(d/2) / \left(\frac{m}{\rho} \right)^{1/3}$ 为 A，则 BB.Lee 等人给出的 $\varphi(A)$ 的表达式为

$$\varphi(A) = 1.00 - 0.911A - 2.11A^2 + 13.4A^3 - 27.3A^4 + 27.5A^5 - 13.6A^6 + 2.59A^7 \quad (I3)$$

本文使用螺旋测微器测量滴管口的直径，用滴管制造 100 滴自然下落的液滴，并利用电子天平（分度值 0.01g）称量 100 滴液滴的总质量，从而便得到了 1 滴液滴的平均质量。将液体密度、液滴平均质量与滴管口直径带入式(16)与式(17)即可得到液体的表面张力系数。

本文利用滴重法测量的屈臣氏蒸馏水在 20℃ 下的表面张力系数为 71.18mN/m。对照表面张力系数的参考值 72.74mN/m^[8]，得出滴重法测量表面张力系数的误差为 2.1%左右，处于可接受的范围之内。（各项测量参数详见表 1）

利用滴重法得到的体积比为 2% 的立白洗涤剂水溶液（试验用肥皂液）的表面张力系数约为 55.2mN/m。体积比为 4% 的立白洗涤剂水溶液的表面张力系数约为 41.6mN/m。（各项测量参数详见表 1）

表 1 屈臣氏蒸馏水与两种立白洗涤剂水溶液的参数测量

被测液体	滴管口直径 (mm)	100 滴液滴质量 (g)	单滴液滴平均质量 (g)
屈臣氏蒸馏水 ($\rho \approx 1.0 \text{ g/cm}^3$)		3.305 ± 0.001	0.033
2%立白洗涤剂水溶液 ($\rho \approx 1.0 \text{ g/cm}^3$)	2.03 ± 0.01	2.522 ± 0.001	0.025
4%立白洗涤剂水溶液 ($\rho \approx 1.0 \text{ g/cm}^3$)		1.902 ± 0.001	0.019

2. 射流入射速度与韦伯数的推导

鉴于注射泵系统产生的射流可以被视作定常层流，可以基于连续性定理推导射流的速度与其对应的韦伯数。首先，注射器的模型建立如附录图 1 所示。其中， V_l 为注射器中的液体容积， l 为注射器活塞到注射器底部的距离， v_p 为注射器活塞的推进速度（由注射泵控制）， Q_1 为离开注射器主体的液体体积流量， Q_2 为离开针尖的液体体积流量， d 为注射器针头内径， h 为注射器针尖到肥皂膜的距离。

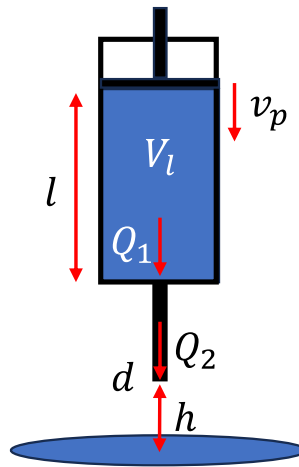


图 1 注射器的物理建模。上面的蓝色部分代表注射器内的液体，下面的蓝色部分代表肥皂膜。注射器的活塞由注射泵按照指定速度推动。

接着可以导出注射器内液体容积减少到 0 所需的时间 t ：

$$t = \frac{l}{v_p} \quad (3)$$

基于此，离开注射器的液体的体积流量为

$$Q_1 = \frac{V_l}{t} = \frac{V_l v_p}{l} \quad (4)$$

基于连续性定理，离开针尖的液体体积流量可以表示为

$$Q_2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v_{out} = Q_1 \quad (5)$$

其中， v_{out} 为离开针尖的液体流速，经式(4)与式(5)解得

$$v_{out} = \frac{4V_l v_p}{\pi d^2 l} \quad (6)$$

考虑重力对流体的加速效应，射流入射速度 v_i 的平方可表示为

$$v_i^2 = \left(\frac{4V_l v_p}{\pi d^2 l}\right)^2 + 2gh \quad (7)$$

基于此，入射射流的韦伯数可表示为

$$We = \frac{\rho \left[\left(\frac{4V_l v_p}{\pi d^2 l}\right)^2 + 2gh \right] \frac{d}{2}}{\gamma_{fluid}} \quad (8)$$

整理式(8)并分离常数与变量得到

$$We = \frac{\frac{8\rho}{\pi^2} \left(\frac{V_l^2 v_p^2}{d^3 l^2}\right) + \rho g(dh)}{\gamma_{fluid}} \quad (9)$$

令 $\frac{8\rho}{\pi^2} \left(\frac{V_l^2 v_p^2}{d^3 l^2}\right) + \rho g(dh) = C$ ，则式(9)变为

$$We = \frac{C}{\gamma_{fluid}} \quad (10)$$

则式(9)的相对不确定度为

$$\frac{\Delta We}{We} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta \gamma_{fluid}}{\gamma_{fluid}} \quad (11)$$

令 $\frac{V_l^2 v_p^2}{d^3 l^2} = A$ ， $dh = B$ ，则 C 的表达式变为

$$C = \frac{8\rho}{\pi^2} (A) + \rho g(B) \quad (12)$$

式(12)的不确定度计算式为

$$\Delta C = \frac{8\rho}{\pi^2}(\Delta A) + \rho g(\Delta B) \quad (13)$$

A的不确定度计算式为

$$\Delta A = A \left(2 \left(\frac{\Delta V_l}{V_l} \right) + 2 \left(\frac{\Delta v_p}{v_p} \right) + 3 \left(\frac{\Delta d}{d} \right) + 2 \left(\frac{\Delta l}{l} \right) \right) \quad (14)$$

B的不确定度计算式为

$$\Delta B = B \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} \right) \quad (15)$$

合并式(13)(14)(15), 得C的不确定度计算式为

$$\Delta C = \frac{8\rho}{\pi^2} \left(\frac{V_l^2 v_p^2}{d^3 l^2} \left(2 \left(\frac{\Delta V_l}{V_l} \right) + 2 \left(\frac{\Delta v_p}{v_p} \right) + 3 \left(\frac{\Delta d}{d} \right) + 2 \left(\frac{\Delta l}{l} \right) \right) \right) + \rho g \left(dh \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} \right) \right) \quad (16)$$

将式(16)代入式(11), 则韦伯数的相对不确定度表达式为

$$\frac{\Delta We}{We} = \frac{\frac{8\rho}{\pi^2} \left(\frac{V_l^2 v_p^2}{d^3 l^2} \left(2 \left(\frac{\Delta V_l}{V_l} \right) + 2 \left(\frac{\Delta v_p}{v_p} \right) + 3 \left(\frac{\Delta d}{d} \right) + 2 \left(\frac{\Delta l}{l} \right) \right) \right) + \rho g \left(dh \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} \right) \right)}{\frac{8\rho}{\pi^2} \left(\frac{V_l^2 v_p^2}{d^3 l^2} \right) + \rho g(dh)} + \frac{\Delta \gamma_{fluid}}{\gamma_{fluid}} \quad (17)$$

II. 肥皂膜射流折射定量实验数据集

表 2. 三种韦伯数下的射流出射角-入射角关系

We	$\theta_i(^{\circ})$	$\theta_r(^{\circ})$	重复 3 次测量的 θ_r 标准差 ($^{\circ}$)
9.03	6.9	12.7	0.3
	11.5	20.5	1.2
	17.5	32.0	1.9
	23.6	42.1	2.5
	27.4	55.7	3.3
14.5	5.6	9.1	0.5
	11.5	16.2	1.0
	17.5	26.3	1.6
	23.6	32.1	1.9
	27.4	38.0	2.3
28.3	5.6	5.8	0.3
	11.5	13.1	0.8
	23.6	28.4	1.7
	36.9	44.4	2.7
	53.1	63.5	3.8

表 3. 临界入射角与韦伯数的关系

We	We 的不确定度	$\theta_c(^{\circ})$	重复 5 次测量的 θ_c 标准差 ($^{\circ}$)
7.27	0.73	57.7	1.4
9.89	0.99	60.9	1.5
12.9	1.30	69.5	1.7
16.4	1.65	74.0	1.9
20.2	2.03	79.3	2.0
24.4	2.46	78.9	2.0

III. 金属网射流折射定量实验数据集

表 4. $We = 33.7$ 下的射流出射角-入射角关系

目数 (M)	θ_i (°)	θ_r (°)	重复 3 次测量的 θ_r 标准差 (°)
50	6.7	7.2	0.4
	12.2	13.4	0.7
	14.7	16.5	0.8
	16.6	18.8	0.9
	22.8	25.9	1.3
	24.2	27.7	1.4
100	1.1	1.1	0.1
	6.9	9.8	0.5
	13.7	17.1	0.9
	20.3	23.2	1.2
	29.3	40.1	2.0
	34.3	53.8	2.7
150	38.1	62.3	3.1
	5.1	5.0	0.3
	9.4	10.0	0.5
	16.4	21.3	1.1
	24.6	33.8	1.7
	33.0	44.7	2.2
200	37.0	56.9	2.8
	7.1	8.9	0.4
	9.8	12.0	0.6
	14.1	18.1	0.9
	17.8	21.1	1.1
	19.9	27.0	1.4

表 5. $We = 52.0$ 下的射流出射角-入射角关系

目数 (M)	θ_i (°)	θ_r (°)	重复 3 次测量的 θ_r 标准差 (°)
50	4.7	5.4	0.3
	10.5	11.2	0.5
	12.6	16.5	0.8
	16.0	19.5	0.9
	22.4	25.5	1.2
	30.0	37.2	1.8
100	5.3	5.6	0.3
	9.0	11.4	0.5
	14.1	16.3	0.8
	22.3	22.6	1.1
	29.6	33.6	1.6
	35.7	46.8	2.2
150	43.2	64.3	3.0
	6.3	6.6	0.3
	11.2	13.1	0.6
	15.7	20.7	1.0
	19.5	27.0	1.3
	25.0	37.1	1.7
200	34.2	49.6	2.3
	43.7	56.8	2.7
	4.3	4.9	0.2
	12.2	15.9	0.8
	18.5	24.2	1.2
	23.2	31.5	1.6
	25.9	40.3	2.0
	36.8	61.6	3.1

表 6. $We = 113.6$ 下的射流出射角-入射角关系

目数 (M)	θ_i (°)	θ_r (°)	重复 3 次测量的 θ_r 标准差 (°)
50	5.1	5.6	0.3
	8.1	9.7	0.4
	14.0	16.2	0.7
	16.4	19.5	0.9
	21.7	25.1	1.2
	34.1	38.4	1.8
100	9.9	11.0	0.5
	15.5	18.3	0.9
	20.3	24.4	1.1
	26.5	35.9	1.7
	40.0	47.1	2.2
	49.9	60.9	2.9
150	51.5	65.9	3.1
	12.2	13.9	0.7
	16.9	21.9	1.1
	24.1	29.9	1.5
	30.4	42.7	2.1
200	44.2	56.0	2.7
	3.3	4.2	0.2
	8.5	9.7	0.4
	11.3	14.8	0.7
	17.0	19.5	0.9
	22.5	25.9	1.2
	27.2	31.8	1.5

表 7. 100 目与 150 目金属网临界入射角-韦伯数关系

目数 (M)	We	θ_c ($^\circ$)	重复 3 次测量的 θ_c 标准差 ($^\circ$)
100	2.75	12.2	0.6
	6.74	28.8	1.5
	17.4	48.2	2.5
	49.5	61.4	3.1
	80.5	70.4	3.6
	113.2	74.7	3.8
150	1.37	22.1	1.1
	12.4	35.8	1.8
	27.8	48.0	2.4
	49.5	62.9	3.1
	77.3	69.5	3.5

IV. 极高入射流速下的金属网射流折射现象

如前文陈述，当实验装置 2 的射流入射流速高于 2.5m/s 时，射流将不会向界面偏转，而是向法线偏转，并形成出射角小于入射角的情况如图 2 所示。本文认为高流速射流与刚性金属网发生碰撞，射流方向因流体微元动量的改变而改变。这种碰撞的宏观表现便是射流朝向法线的折射。由于这种折射现象的特殊性（需要极高入射流速且与表面张力的关联性不强），本文中不对该现象进行细致讨论。



图 2 射流入射流速高于 2.5m/s 时发生的金属网体系的特殊折射现象。可见入射射流中的一部分流体沿金属网流下，另一部分汇聚为出射射流并偏向法线。

V. 纱布射流折射定量实验数据

表 8. $We = 33.7$ 下的纱布射流折射出射角-入射角关系

目数 (M)	θ_i ($^\circ$)	θ_r ($^\circ$)	重复 3 次测量的 θ_r 标准差 ($^\circ$)
25	6.0	8.9	0.4
	16.6	21.5	1.0
	23.5	25.7	1.2
	32.7	36.5	1.8
	38.5	43.6	2.1
50	5.2	5.6	0.3
	11.3	14.4	0.7
	16.0	19.1	0.9
	19.5	23.9	1.1
	22.8	29.2	1.4
	26.5	34.9	1.6

表 9. $We = 52.0$ 下的纱布射流折射出射角-入射角关系

目数 (M)	θ_i (°)	θ_r (°)	重复 3 次测量的 θ_c 标准差 (°)
25	5.5	6.1	0.3
	20.3	21.5	1.0
	28.9	33.0	1.5
	34.8	40.1	1.8
	40.5	46.0	2.1
50	9.0	11.2	0.5
	13.5	14.9	0.7
	16.5	19.7	0.9
	19.8	23.2	1.1
	22.8	29.2	1.4