

题目：天空的微笑

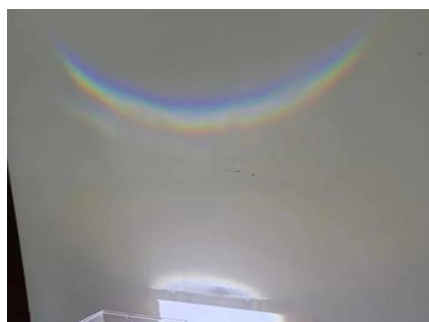
——冰晕现象的研究与再现

作者：倪健为 吴雨晨

指导教师：王思慧 彭双

学 校：南京市金陵中学

2023 年 9 月



左图：环天顶弧，又称布拉维弧，是一种在外观上类似彩虹的光学现象，它的形成是太阳光从水平方向通过冰晶后折射而形成，而非雨滴。一般称之为“倒挂彩虹”或“天空的微笑”。（左图来自网络）。

右图，室内墙壁上再现环天顶弧。

摘要

本文主要研究各种冰晕现象。理论上，通过几何方法推导幻日环的光路（二维光路），对幻日环上现象进行分类，系统性地讨论了色散型、非色散型幻日、蓝斑、光带等各种现象。对于三维光路，利用代数方法通过矩阵计算导出了日晕、上下切弧、Parry 弧、环天顶弧等光晕的形状与位置。

在实验上，用棱镜模拟冰晶，设计实验装置通过模拟对应的光路和冰晶取向再现冰晕。制作了幻日环和日晕演示仪，在室内再现了幻日环、 22° 晕、上下切弧、Parry 弧、环天顶弧等多种冰晕现象。实验内容丰富、生动直观。最后通过实验现象与理论计算结果对比，证实了理论计算的正确性。理论推导和实验演示相结合，有助于理解冰晕现象的原理。

本文自行设计、制作了相关实验器材，包括“幻日环演示仪”和“冰晕演示仪”，具有普及和应用价值。

关键字：冰晕；幻日环；环天顶弧；转动矩阵；幻日环演示仪；冰晕演示仪

目录

引言.....	1
第一章 冰晕简介	3
第二章 二维光路——幻日环.....	7
2.1 初步分析	8
2.2 幻日环光路的理论计算.....	9
2.3 幻日环光路的推导过程.....	12
2.4 幻日环实验	21
第三章 三维光路.....	27
3.1 理论	27
3.2 三维光路实验.....	35
3.3 实验效果与分析.....	38
第四章 水立方——四棱柱的幻日环	46
4.1 理论	46
4.2 实验	47
第五章 总结与展望	51
5.1 幻日现象小结.....	51
5.2 弧与圆晕小结.....	52
5.3 总结与展望.....	53
参考文献.....	54
致谢.....	55
实验时间和地点.....	56
参赛队员简历.....	57
附录.....	58
附录 1 MATHEMATICA 程序及解释.....	58
附录 2 不可能产生的光路（第二章补充）	63
附录 3 四棱柱幻日环推导（第四章补充）	68
附录 4 上传的实验视频.....	72
附录 5 各种冰晕的取向、光路图.....	73
附录 6 冰晕相关词汇表.....	76

引言

后羿射日的传说流传千年，十个太阳同时悬空的景象令人无限遐想，引人神往。有没有可能彼时真的曾有若干个“太阳”同时悬挂空中？会不会是陨落地球的流星？或者，有没有可能当时出现在天空的，只是一场大型的幻日？

2023年2月2日上午，北京地区天空中出现日晕现象，太阳周围出现内外两道同心光圈，外圈上部出现了下红上紫的彩色的弧形，此为环天顶弧（俗称“天空的微笑”），同时，太阳左右两边各有一个“幻日”¹。如图1所示。2020年11月4日内蒙古通辽出现幻日²，2023年5月13日武汉出现日晕³，2020年10月13日北京出现环天顶弧⁴，这些现象出现频率不低，这些壮美的景象是大自然的奇迹。当我们抬起头仰望天空，1.5亿公里外的太阳，不但给了我们光亮和温暖，还时不时地给予我们美好的惊喜，让我们对大自然充满了敬畏和感恩，让我们不由自主地想去探索自然的奥秘。



图1 2023年2月2日北京上空出现日晕、幻日和环天顶弧

光晕是大气光学现象，与光线在冰晶中的折射和反射有关，其中最常见的是 22° 晕，即图1的内层圆晕以及图2a, 2b中的圆晕；幻日，如图2b中太阳两侧的亮斑；幻日环，如图2b贯穿太阳和幻日的光弧。环天顶弧，又称“倒挂彩虹”或“天空的微笑”，较为少见（图2c）。



a. 22° 晕

b. 22° 晕、幻日、幻日环

c. 环天顶弧

图 2 日晕现象

我们这次的研究的目标，是用棱镜模拟冰晶，设计实验通过对应的光路再现冰晕，研究冰晕形成的理论原理和模型。理论上，通过分析光路，用几何和代数（矩阵）的方法推导多种冰晕对应的特殊出射光的角度。现有理论计算方法是模拟上亿条光线经过晶体后出射光的光强分布⁵，或者采用群论、计算机遍历、搜索、优化等方法⁶，从而得到各种日晕的形状与效果。我们另辟蹊径，化繁为简，仅仅需要计算决定冰晕形状最重要的光线，力求找到最精简的解。

我们还设计制作了幻日环和日晕演示装置，在实验室通过控制条件，再现了多种冰晕现象。理论推导图像清晰，实验结果不仅能够验证理论，也有助于理解冰晕现象产生的原理。

第一章 冰晕简介

在大约 4500 米到 10000 米寒冷的高空中有卷云，通常由于高空对流形成，卷云是白色透明的云幕，由微小的冰晶组成，是唯一会在太阳或月亮周围产生光晕的云层。卷云中的冰晶形状包括正六棱柱（片），正三棱柱，菱形，锥状和正八面体，其中以六棱柱为主⁷。本文以六棱柱（片）为主要研究对象。定义沿着侧边棱的方向是 c 轴方向，连接两个相对侧边棱的方向是 a 轴方向，见图 1.1。正六棱柱冰晶形状是由 c/a 决定的，包括柱状和片状。冰晶的形状和大气的湿度和温度有关，其中温度产生的影响是决定性的，在温度比较高的卷云里，片状冰晶较多；温度低的则柱状和锥状冰晶更多。

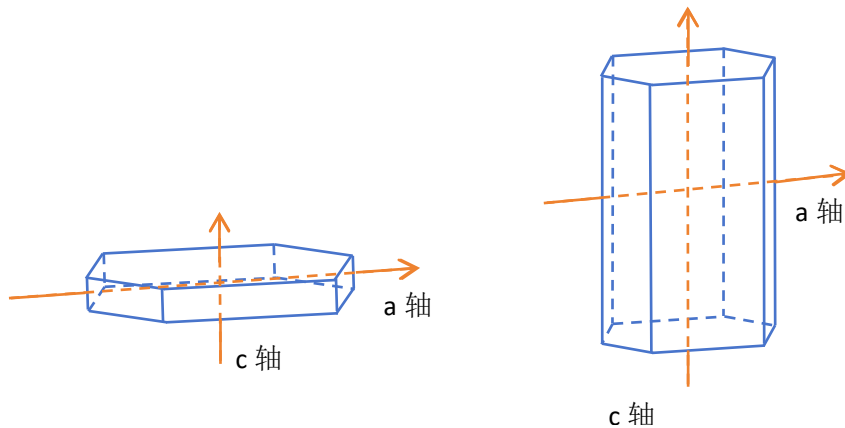


图 1.1 六棱柱（片）冰晶

冰晶的取向指的是冰晶漂浮在空气中时的排列方向。产生冰晶取向的因素主要有重力-空气阻力，电场和风切。冰晶形状可以决定冰晶取向。重力-阻力型取向最为常见。在重力-空气阻力的影响下，片状冰晶喜欢底面保持水平而柱状冰晶倾向于长轴保持水平。而在电场的作用下，冰晶处于强电场中时会被电场极化，使得冰晶受到力矩作用，最终使其沿电场排列。因为雷雨云或高压线附近易产生符合条件的强电场，该处电场取向很常见。最后，对于风切取向的冰晶，当冰晶穿过不同风速的区域时，会统一获得一个取向。这种取向多在山地附近产生。常见的取向有以下几种：

random 取向：冰晶无固定运动方式，在大气中做随机性的运动。

column 取向：柱状六棱柱冰晶通常采取的取向，冰晶 c 轴水平。

Parry 取向：柱状冰晶不仅 c 轴水平，且有一对侧面也保持水平。

plate 取向：片状六棱柱冰晶通常采取的取向，冰晶 c 轴竖直。

Lowitz 取向：片状冰晶的 c 轴保持竖直，同时晶体还要围绕它作往复的剧烈摆动和旋转。

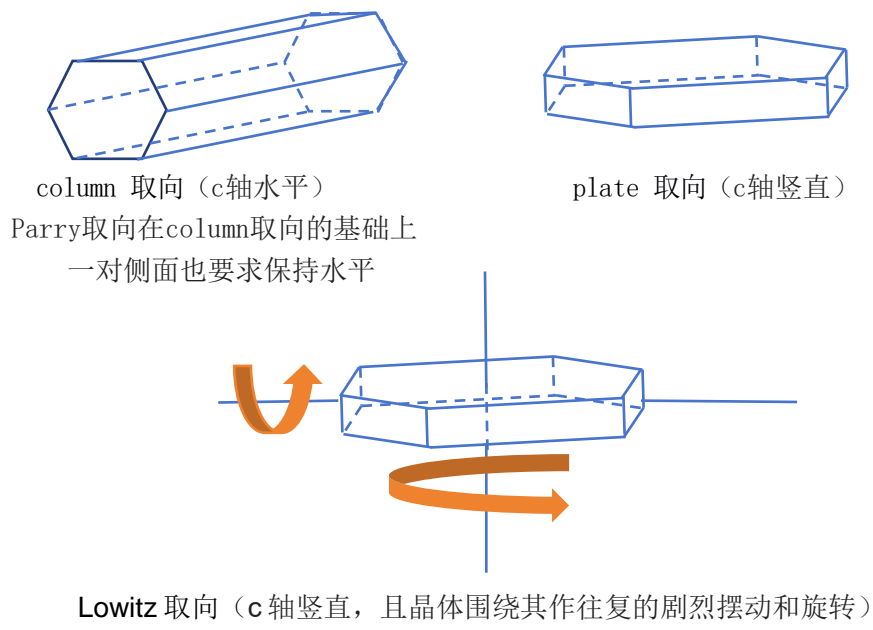


图 1.2 冰晶的常见取向

图 1.3 汇集了主要的冰晕类型以及名称¹²。

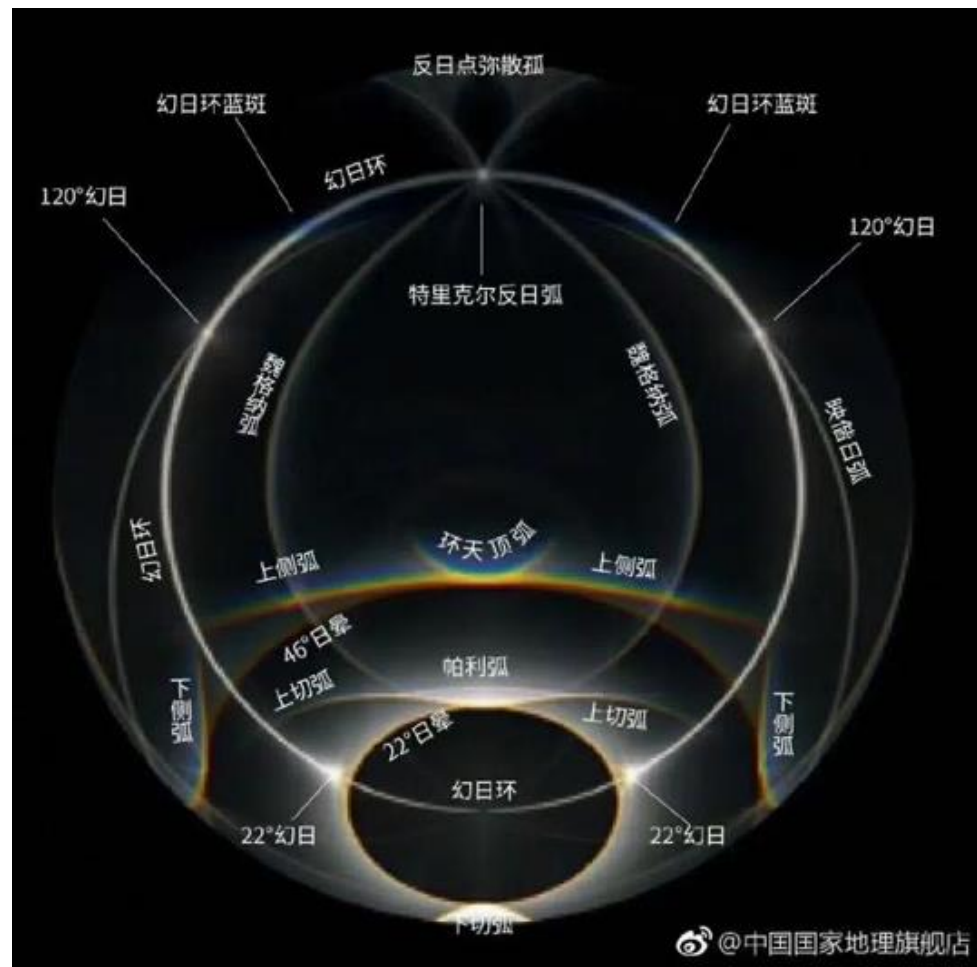


图 1.3 冰晕总览图

22° 幻日和 22° 晕

冰晶为 random 取向时，会产生 22° 晕，又称圆虹，见引言部分图 1 和图 2a, b 中环绕太阳的小圆。后文将证明，经 60° 顶角折射后光的最小偏向角约为 22°，在此范围内没有折射光出射。由于冰晶为 random 取向，环绕入射光 22° 的圆锥内都没有折射光，因而形成了以太阳为圆心，视角半径约为 22° 的光环，如图 1.4。光晕内红外紫的颜色分布是色散造成的。22° 幻日（图 1，图 2b）则是由 plate 取向的冰晶经过类似光路得到的，见表 1.1，具体情况将在第二章介绍。

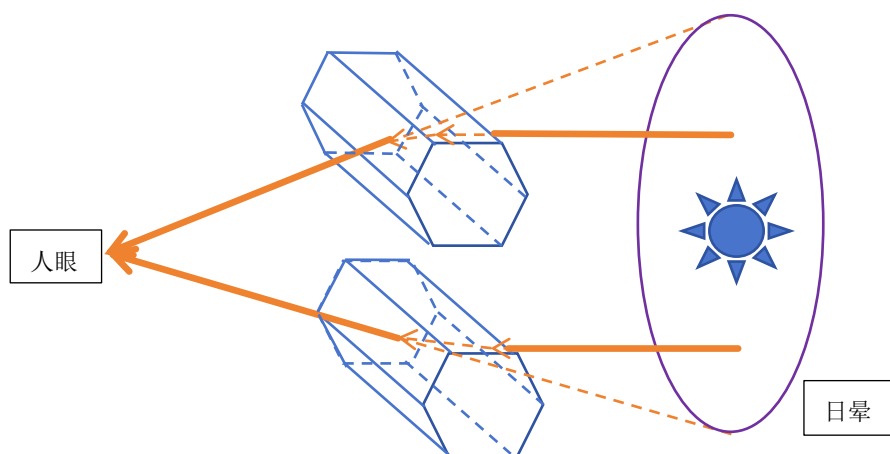


图 1.4 22° 晕

我们可以用亚克力水果叉（细长的三棱镜）演示 22° 晕的成因。将电筒光照射到随机排列的水果叉，墙上呈现圆形光晕，如图 1.5。不过由于亚克力与冰晶折射率不同，该“冰晕”的张角并不等于 22°。



图 1.5 水果叉模拟日晕

类似地，还可以总结出其他常见冰晕的现象与取向、光路的关系，见表 1.1。

表 1.1 常见冰晕的现象与取向、光路汇总表

现象 光路	取向	Random	Column	Plate	Parry	Lowitz
		22°晕	上/下切弧 外接晕	幻日	Parry 弧	
		46°晕	上/下侧弧	环天顶弧 环地平弧		
						Lowitz 弧
			日柱			
			幻日环 (外光路)			

第二章 二维光路——幻日环

幻日环又称贯日白虹，它穿过太阳以及 22° 幻日，位于太阳相同高度角上，见引言图 1、图 2b。幻日环的光来自 plate 或者 column 取向的冰晶中垂直面的反射（包括经过冰晶内部的反射）。

图 2.1 用亚克力圆柱模拟幻日环的成因。无数冰晶垂直反射面法线在水平面指向任何方向，可以借助亚克力圆柱的侧面取代无数冰晶的垂直反射面。用手电筒模拟太阳，光线以一定角度照射到亚克力棒上，表面的反射光在墙壁上形成一个光圈，即幻日环。“太阳”直射光也落在幻日环上，形成“贯日白虹”。在实际场景中，plate 冰晶的 c 轴（亚克力棒）是竖直向下的，因此幻日环位于太阳相同高度角上。



图 2.1 用亚克力棒模拟幻日环

较为常见的日晕有 22° 幻日，图 1、图 2b 中太阳两侧左右对称的一对亮斑即是。它们由太阳光经过 plate 取向的冰晶折射形成。冰晶的作用相当于棱镜，相邻边顶角为 120° ，下一节将证明光线无法出射。起作用的是次临边，即 60° 顶角的两个面。冰晶的折射率为 1.31， 60° 顶角折射光的最小偏向角约为 22° 。小于此角度的位置没有折射光出射。因此，plate 取向的冰晶底面在水平面内，所以沿水平方向左右大概 22° 外会有折射光，如图 2.2 所示。从冰晶折射出来的三路光线照射到人眼中，中间一路为太阳光线，是太阳从中间位置直接射过来的，是真正的太阳；旁边的两路光线，则是太阳光线经过六边形冰晶柱折射过来的。 22° 处光强较大，形成幻日。即在人的眼中，中间真实太阳的两边出现了额外的两个太阳，实际上它们是太阳的虚像。产生幻日需要有云层适量、大气层稳定、水汽量大、冰晶形成角度等条件。

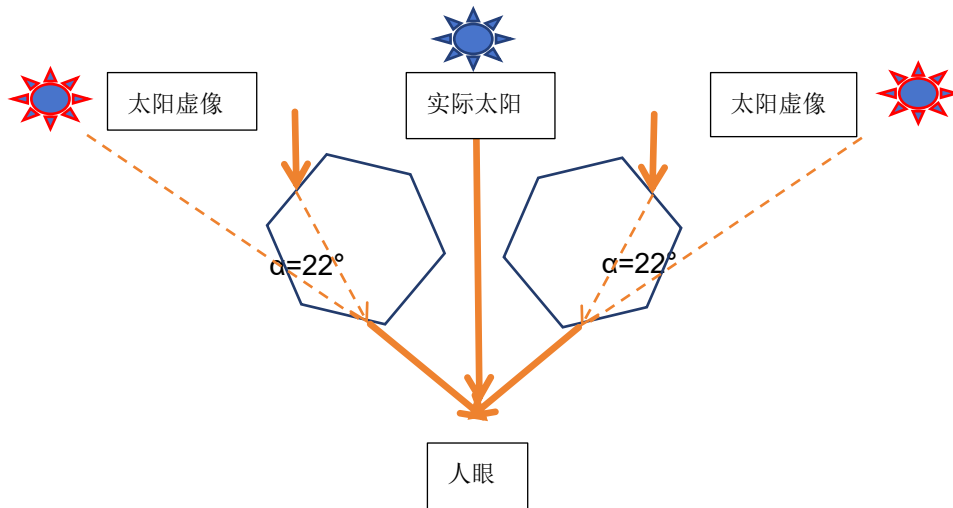


图 2.2 22° 幻日

2.1 初步分析

首先进行初步分析。考虑六棱柱的晶体，以 plate 取向放置，晶体轴为竖直方向，光线从水平方向照射到晶体，从晶体的外表面反射以及折射进入晶体内部反射后出来的光线分布在幻日环上，以下考虑各种进入晶体的光路情况。如图 2.3，我们给六边形的六个侧面按顺序编号 1、2、3、4、5、6。正六边形的顶角 $A = 120^\circ$ ，次近邻侧面延长线的顶角 $A' = 60^\circ$ 。

显然，入射角为 i 时，侧面反射光的偏向角为 $(\pi - 2i)$ ，反射面可以取不同方向，故 i 在 $0-90^\circ$ 内连续变化，故反射光呈连续分布。

折射光路 1-2 的存在性。

由面 1 进入面 2 出射的光，记为 1-2。当一束光入射至顶角为 A 的棱柱一角时，棱柱的折射率 n 须满足

$$n < \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \quad (2.1)$$

才不会发生全反射，也就是说光线可以从相邻面出射。在六棱柱中 $A=120^\circ$ ，则六棱柱折射率须满足 $n < \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155$ 。冰的折射率约为 1.31，玻璃的折射率约为 1.51，均大于 1.155，所以玻璃或冰制成的六棱柱均无法使入射光线从其相邻面出射。

若顶角 A' 为 60° ，由 (2.1) 式可知 $n < 2$ ，则冰、水或玻璃的折射率均小于 2，所以折射光线可以从相邻面出射，即光路 1-3 成立。

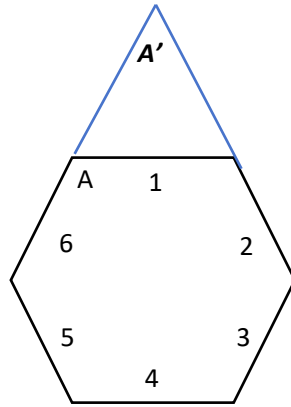


图 2.3 六棱晶片的顶角

折射光路 1-3 的偏向角。

当一束光从棱镜面 1 入射，面 3 出射时，最小偏向角⁸

$$\delta_0 = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{A'}{2}\right) - A' \quad (2.2)$$

$A' = 60^\circ$ ，代入冰的折射率 $n=1.31$ ， $\delta_0 = 21.84 \approx 22^\circ$ ，这解释了 22° 幻日产生的原因。

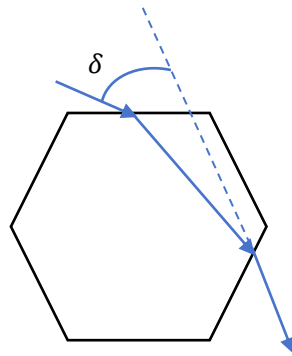


图 2.4 22° 幻日的光路

幻日环上除了来自冰晶外部的反射光环带、 22° 幻日以外，还存在 120° 幻日、蓝斑等多种特征，它们由太阳光在六棱柱冰晶中的折射、反射、全反射后产生，以下将进行详细研究。

2.2 幻日环光路的理论计算

2.2.1 有效折射率

为了更一般地研究幻日环上的光路，需要引入有效折射率。

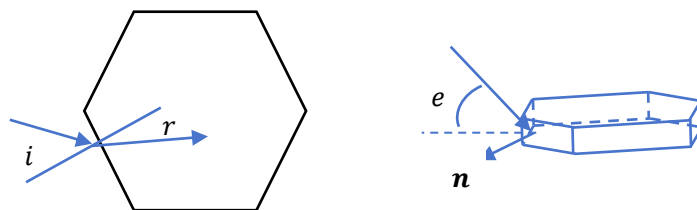


图 2.5 光路在二维平面内的投影

如图 2.5 所示，晶体呈 plate 取向，光线以仰角 e （与水平面的夹角）照射到晶体的一个侧面。将光路投影到水平面内，光线在二维平面的偏折仍满足折射定律，只要将原来的折射率换成与仰角相关的有效折射率即可，其表达式为⁹

$$n(e) = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(e)}}{\cos(e)} \quad (2.3)$$

当阳光在水平面内，即入射光仰角 $e=0$ 时，幻日环在入射面内，产生的折射和反射光都在六棱柱的一个横截面上，是二维光路。仰角 e 不为零时，出射光仰角不变，在二维平面内的投影满足有效折射率修正的折射定律。这样，幻日环问题都可以简化为二维光路问题。

2.2.2 光路的分类、蜂巢图

在六棱柱中，光线从一个面射入，从另一面射出，在六棱柱内部发生反射。根据反射定律，考虑由 Q 点发出经过反射面 Σ 到达 P 点处的光线，相对于 Σ 面取 P 点的镜像对称点 P' 点， QP' 为一条直线， MP 为 MP' 镜像对称线， QMP 是光线的实际路径，由对称性不难看出 $i=i'$ ，见图 2.6。如此可以做出真实六棱柱的关于反射面 Σ 的镜像，即虚像，通过研究光线直线穿过反射面在虚空间中的行为反映在实空间的行为。

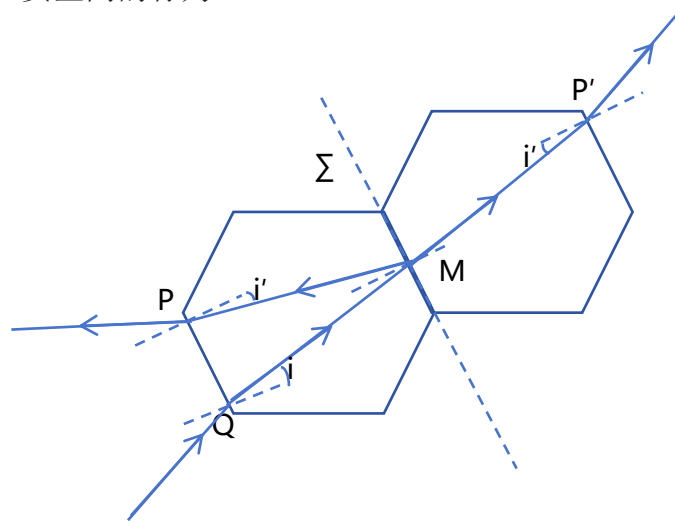


图 2.6 利用镜像研究光路

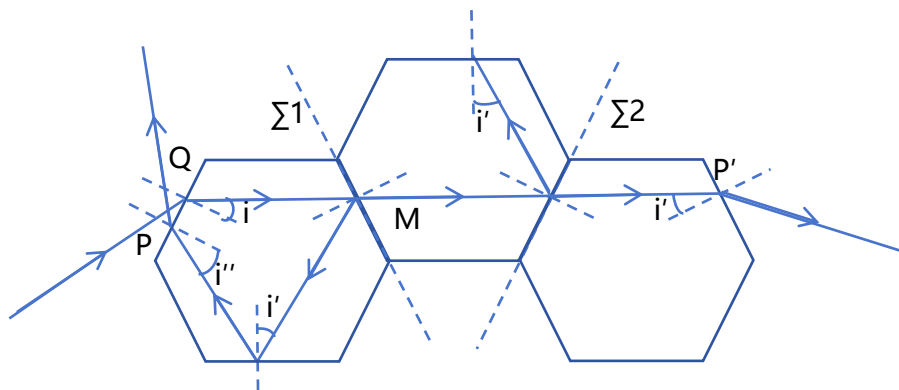


图 2.7 多次反射需要作多次镜像

图 2.7 为多次反射的图，需要多次做光路的镜像。图中直线 QP' 两端的面为入射面和出射面，穿过的面为反射面。

根据如上方法，一条光线从指定面射入六棱柱后，在内部发生反射的各种可能情况如下图 2.8 所示，更远的镜像因为涉及的反射次数过多，光强损失过大不作考虑。采用这种方式来计算光路，一方面可以穷尽所有（一定反射次数以内）的可能光路，另一方面，可以方便地计算出在最后一面上可能产生全反射的光线，排除不可能出现的出射光，防止产生干扰。如下图标示出从入射面到所有可能的出射面的光线，所有光路分为三组，其中：

A 组为出射面与入射面“平行”的光路（在虚空间）。出射面与入射面平行时，出射光与入射光也平行，这时光线不出现色散，为白色光，如图 2.9。

B 组为出射面与入射面“不平行”的光路。当出射光平面与入射光平面成一定夹角时，出射光与入射光形成一定的偏向角，光线出现色散现象，如图 2.10。

C 组为经过计算不存在出射光线的情况。

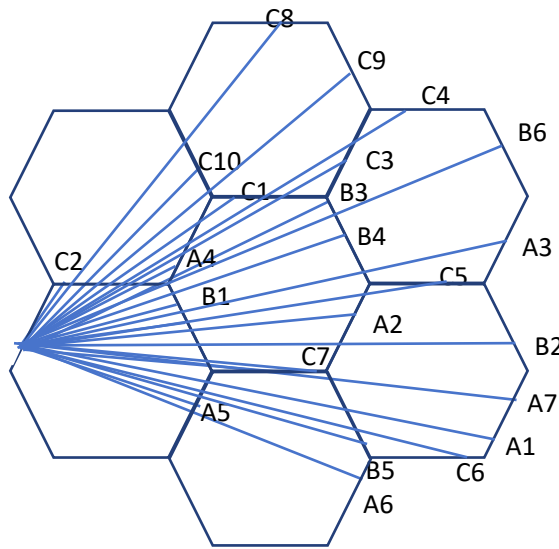


图 2.8 六棱柱蜂巢图

正六边形镜像图看起来很像蜂巢，故本文将其命名为蜂巢图。

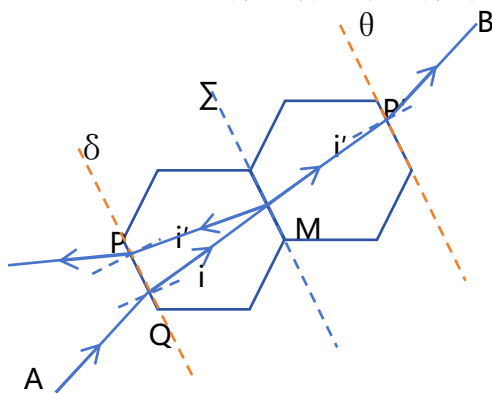


图 2.9 出射光与入射光“平行”

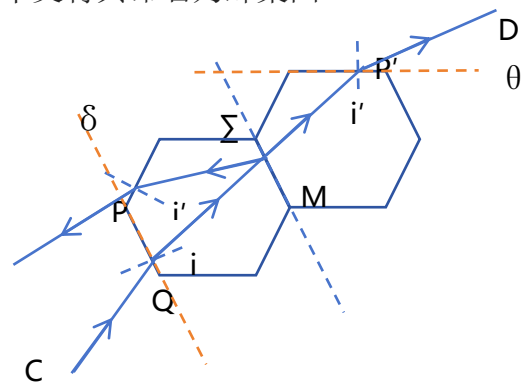


图 2.10 出射光与入射光“不平行”

现将理论推导的幻日环上的特征现象汇总如下表。推导过程见下节 2.3。

表 2.1 定位型幻日

光路编号	A1 (1-4-2-6)	A3(1-3-6-4)	A5 (1-4)
计算公式	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 0^\circ$
冰晶	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 0^\circ$
水	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 0^\circ$
玻璃	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 0^\circ$

表 2.2 幻日环上“跑马灯”

光路编号	A2 (1-3-5) (蓝斑)	A4 (1-2-3)	A6(1-4-1)	A7(1-3-4-5-1) (蓝斑)
计算公式	$\delta = 2\theta + A'$ $\delta = 2 \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(1/n))) + A'$ (蓝斑角)	$\delta = 2\theta - A'$	$\delta = \pi - 2\theta$	$\delta = \pi - 2\theta$ $\delta = \pi - 2 \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(1/n)))$ (蓝斑角)
冰晶	无蓝斑			$\delta = 152^\circ$
水	$\delta = 90^\circ$			$\delta = 150^\circ$
玻璃	$\delta = 119^\circ$			$\delta = 121^\circ$

表 2.3 色散型幻日

光路编号	B1(1-3)	B6(1-3-6-3)	B2(1-3-5-1)	B3(1-2-3-5)
计算公式	$\delta = 2\arcsin(n\sin(\pi/6)) - \pi/3$	$\delta = 2\arcsin(n\sin(\pi/6)) - \pi/3$	$\delta = 2\pi/3 - \delta_0$	$\delta = 2\pi/3 + \delta_0$
冰晶	$\delta = 22^\circ$	$\delta = 22^\circ$	$\delta = 98^\circ$	$\delta = 144^\circ$
水	$\delta = 23^\circ$	$\delta = 23^\circ$	$\delta = 97^\circ$	$\delta = 143^\circ$
玻璃	$\delta = 39^\circ$	$\delta = 39^\circ$	$\delta = 81^\circ$	$\delta = 159^\circ$

表 2.4 色散光路 (单调运动, 未成幻日)

光路编号	B4(1-3-6)	B5(1-4-6)
计算公式	$\delta = 2A' + \theta - \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(\frac{\sin \theta}{n})))$	$\delta = 2A' - \theta + \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(\frac{\sin \theta}{n})))$

2.3 幻日环光路的推导过程

2.3.1 光路的存在性——排除不存在的光路 (C 组)

首先排除光线从任何角度射入时, 通过折射率在一定范围内的介质 (主要针对本文所用样品), 在出射面都会产生全反射而使得光线不能出射的情况, 如光线 C2 (即为上文 2.1 节中讨论的 1-2 面情况, 因在 2 面全反射, 无出射光线), 现将文中用到的实验样品的全反射角度进行计算, 当 $n\sin r = 1$ 时, 发生全反射, 全反射角 $r = \arcsin(1/n)$, 冰晶 $n = 1.31$, $r = 49.76^\circ$, 水 $n = 1.33$, $r = 48.75^\circ$, 玻璃 $n = 1.52$, $r = 41.14^\circ$, 如表 2.5 所示:

表 2.5 全反射角度

材质	冰晶($n = 1.31$)	水($n = 1.33$)	玻璃($n = 1.52$)
全反射角度	$r = 49.76^\circ$	$r = 48.75^\circ$	$r = 41.14^\circ$

另如 C7 光线，C7 线路光路图如 2.11 (a)，极限情况下出射面最小角度为 r ，极限情况下如图 2.11 (b)：

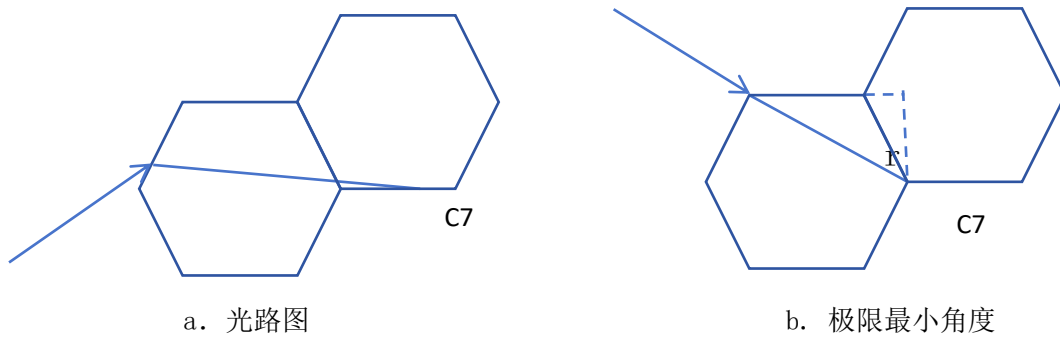


图 2.11 C7 光线

此时， $r = \arcsin((3/2)/\sqrt{(3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}) = 60^\circ$ ，大于所有材质样品的全反射角，故出射面发生全反射，无出射光线，此光路同样不考虑。

C1-C10 其他线路均有各自不能射出的原因，证明过程见附录 2。

2.3.2 无色散光路

镜像图中出射光与入射光平行的线路，主要的线路有如下 A1-A7，其中有些光路的偏向角不受六棱柱侧面法线方向和折射率的影响，在内部反射后最终出射点在固定角度上，则产生定位型幻日（以下将计算白色的 0° 幻日和 120° 幻日）。另一个常见的例子是，利用直角三棱镜的 90° 顶角可以产生 180° 的定位镜像。

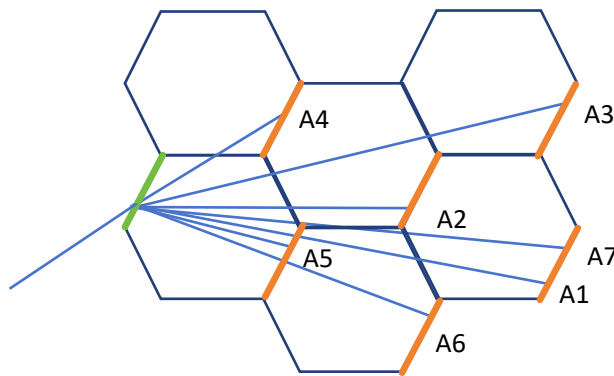


图 2.12 出射光为平行光

另外，镜像图中平行的线实际上可能是反射光。这类光路随六棱柱侧面法线方向变化而变化，则形成一个白色圆环，把环上的幻日连在一起，即为幻日环。

下面对七条无色散光路进行分析（下文所有入射角标为 θ ，所有的出射角为 φ ，偏向角标为 δ ）：

(1) 定位型幻日

有几条平行出射线光路，出射点不会因为六棱柱侧面法线方向变化，这些光路所形成的幻日为定位型幻日，包括 120° 幻日和 0° 幻日。

A5: 0° 幻日

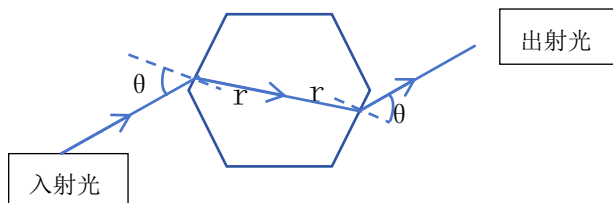


图 2.13 0° 幻日光路图

由图发现实际光路中出射光与入射光平行，偏向角 $\delta = 0^\circ$ ，即出射点在 0° 位置。

A3: 0° 幻日

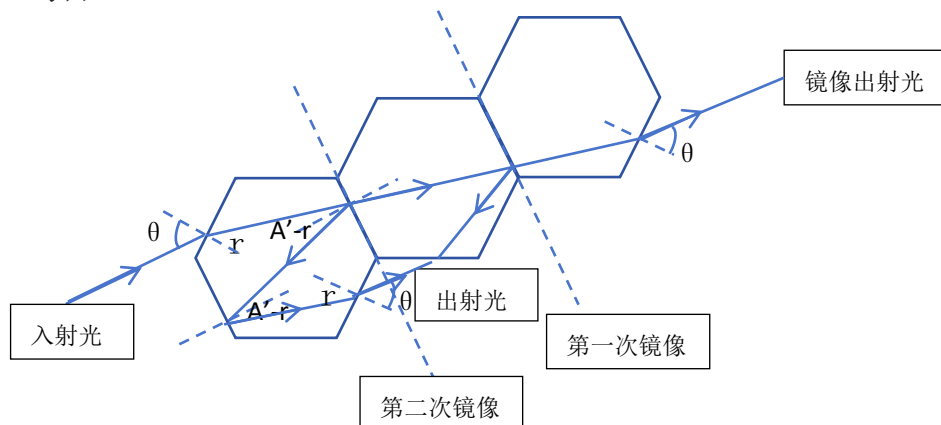


图 2.14 0° 幻日光路图

由图 2.14 发现实际光路中出射光与入射光平行，也是 0° 幻日。

A1 线: 120° 幻日

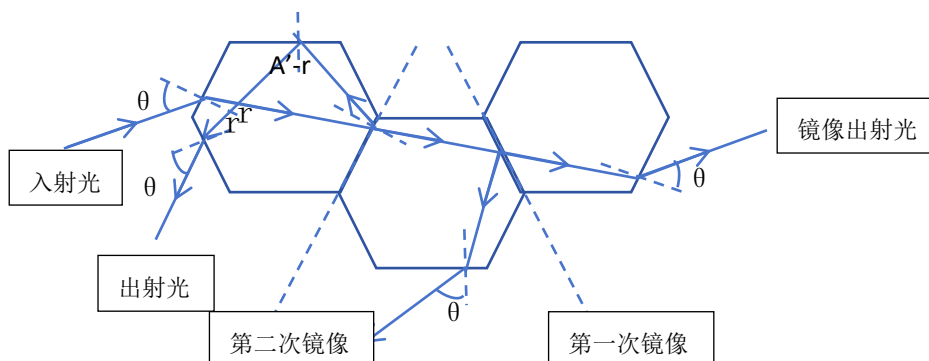


图 2.15 120° 幻日光路

观察光路图，由镜像图 2.15 可得出射角和入射角都为 θ ，将此出射角标在实际光路的出射面上，可得偏向角

$$\delta = \pi - (\pi/3 - \theta + \theta) = 120^\circ$$

该偏向角不因 θ 角度变化，与折射率也无关，得 120° 幻日。

(2) 连续光带、蓝斑

A7: 幻日环白光 (含蓝斑)

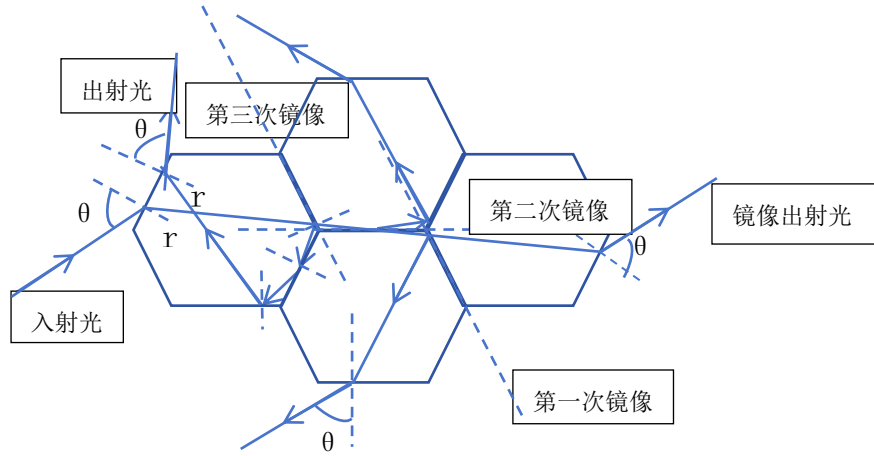


图 2.16 A7 光路图

根据图 2.16，出射光角度与入射光角都是 θ ，将此出射角标在实际光路的出射面上，可得偏向角

$$\delta = \pi - 2\theta \tag{2.4}$$

A7 光路反射角范围为 $\delta = \pi - 2\theta = \pi - 2(\pm\pi/2) = \pi \pm \pi$

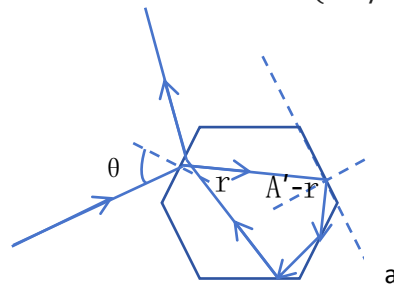


图 2.17 A7 光路图

由于在 a 反射面上，蓝光最先发生全反射，所以此光路可在出射点位置产生蓝斑。

由图 2.17，当 $n\sin(A' - r) = 1$ 时，a 反射面发生全反射，此时 $r = A' - \arcsin(1/n)$ ，因此

$$\theta = \arcsin(n \sin r) = \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(1/n))) \tag{2.5}$$

由此可计算蓝斑角，对于冰晶，冰的蓝光折射率 $n = 1.317$ ， $\delta = \pi - 2\theta \approx 152^\circ$ ，即幻日环上 152° 以及对称位置 $360^\circ - 152^\circ = 208^\circ$ 上会出现蓝斑；玻璃 $n = 1.52$ ， $\delta = \pi - 2\theta \approx 121^\circ$ ，即幻日环上 121° 以及对称位置 $360^\circ - 121^\circ = 239^\circ$ 上会出现蓝斑。

A2 线: 幻日环白光 (含蓝斑)

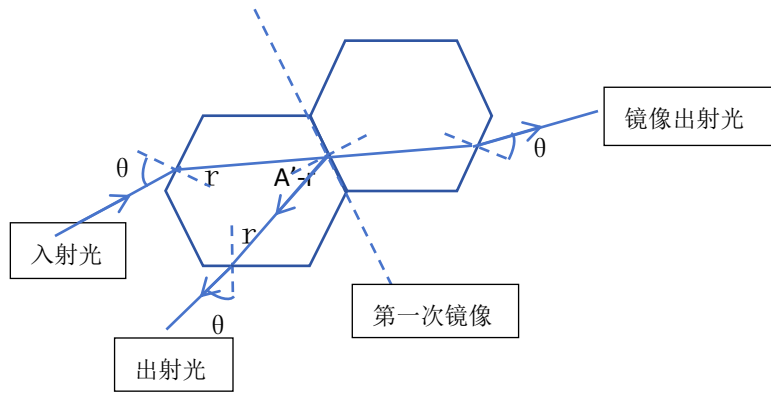


图 2.18 蓝斑光路图

观察光路图 2.18 可得出射角和入射角都为 θ ，将此出射角标在实际光路的出射面上，可得偏向角

$$\delta = \pi - (2A' - 2\theta) = 2\theta + A' \quad (2.6)$$

出射光实际上是由于棱柱内反射产生的连续光带。A2 线路反射角范围为 $\delta = A' + 2\theta = \pi/3 + 2(\pm\pi/2) = \pi/3 \pm \pi$ 。

光线内反射时，可能在第一次反射面发生全反射。全反射公式为：

$$n \sin(A' - r) = 1 \quad (2.7)$$

$$r = A' - \arcsin(1/n) \quad (2.8)$$

相应入射角为：

$$\theta = \arcsin(n \sin r) = \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(1/n))) \quad (2.9)$$

由于在此偏向角的方位，蓝光最先发生全反射，在出射点位置出现蓝斑，得蓝斑偏向角：

$$\delta = 2\theta + A' = 2 \arcsin(n \sin(A' - \arcsin(1/n))) + A' \quad (2.10)$$

我们实验所使用的玻璃六棱柱蓝光折射率为 1.52，经计算蓝斑角为 $\delta \approx 119^\circ$ ，在 119° 和对称位置 $360^\circ - 119^\circ = 241^\circ$ 上会出现蓝斑。

对于冰晶，冰的蓝光折射率 1.317，如在第一次反射面冰晶内发生全反射，角度为 49.40° ，但是如下图 2.18 为此光路下光线的极值角度（因为光路原因，极限角度情况下，反射面上的反射点位置 c 不能超过反射面中心点），见下图 2.19：

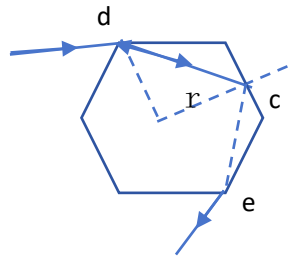


图 2.19 此光路极限角度

d 为极限入射角位置，c 为反射面中点，e 为出射角位置，此时 r 为最大角，经过计算，极限情况下：

$$r = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) = 49.11^\circ < 49.40^\circ$$

所以，对于冰晶来讲此光线几乎很难出现蓝斑效果。

A6:幻日环白光

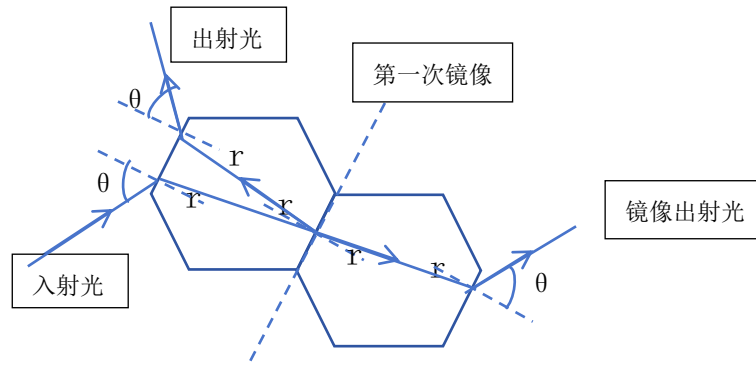


图 2.20 A6 光路图

根据图 2.20 计算，出射光角度与入射光角都是 θ ，偏向角为 $\delta = \pi - 2\theta$ 。经计算，此光路因反射面上反射角过小，不产生全反射，故无蓝斑出现。

A4: 1-2-3

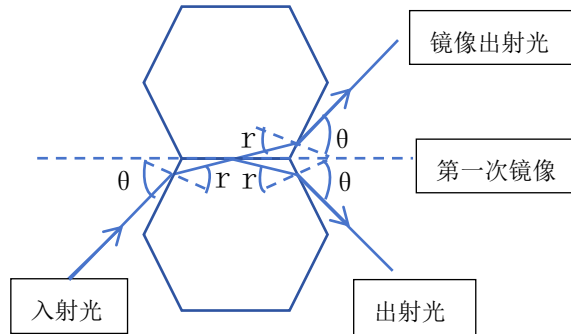


图 2.21 A4 光路图

此光路偏向角为：

$$\delta = \pi - (\pi - 2\theta + A') = 2\theta - A' \quad (2.11)$$

此光路在第一次反射面上角度较大，为全反射，无产生蓝斑的临界角，（见 C2 光路证明），不产生蓝斑。

故 A2、A6（A7）和 A4 光路随着 θ 角度变化（冰晶侧面法线）组成了三条相互间隔 120 度的白光，在天空中形成一个完整的白色幻日环，如图 2.22。

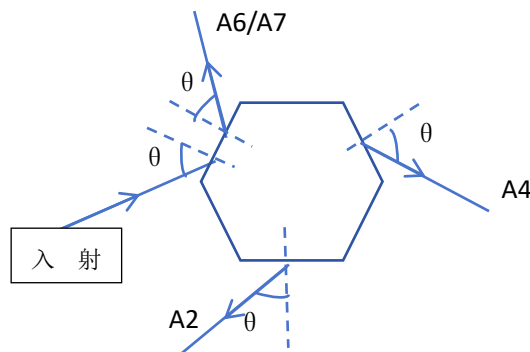


图 2.22 三条相互间隔 120° 的出射光路

2.3.3 有色散的光线、色散型幻日

如图 2.23，当镜像图中出射面与入射面不平行时，不同折射率的光偏向角不一样，导致出射光发生色散。如果随着入射角度变化，光线存在最小偏向角，那么在最小偏向角处产生色散型幻日，例如 22° 幻日。下面，对六条色散光路进行分析：

B1： 22° 幻日。该光路已经讨论过，见图 2.4，公式 (2.2)。需要补充的是，取玻璃折射率 1.52，幻日的偏向角 $\delta_0 = 38.92^\circ \approx 39^\circ$ 。

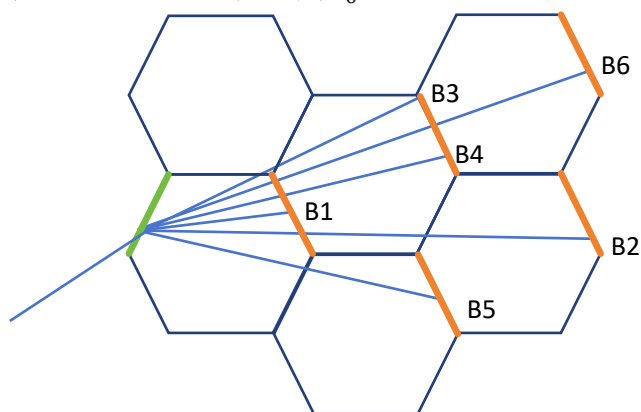


图 2.23 出射光为非平行光

B6：如图 2.24，B6 与 B1 偏向角相同。

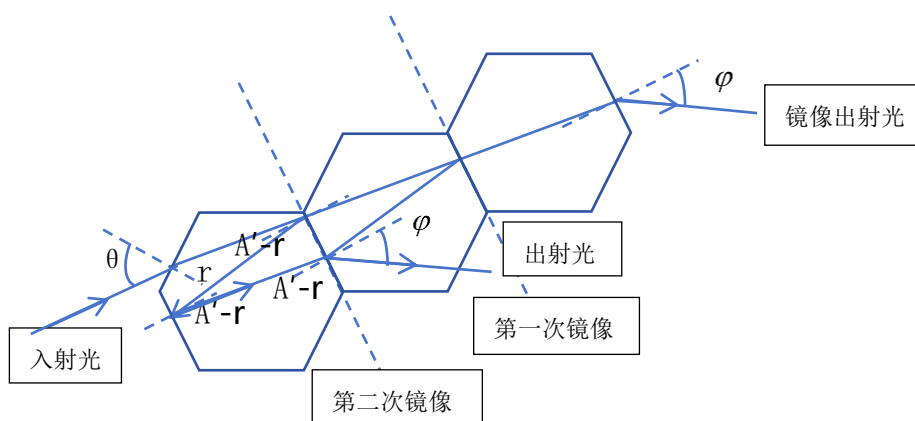


图 2.24 B6 光路图

B2 线： 98° 幻日（文献称 90° 幻日⁹）

根据图 2.25，偏向角为

$$\delta = \pi - (\theta + \varphi) \quad (2.12)$$

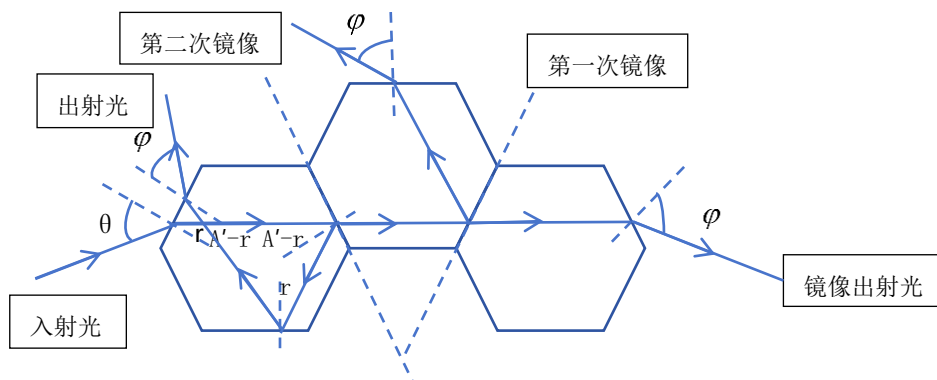


图 2.25 98° 色散型幻日光路图

当 $\theta = \varphi$ 的时候有最小偏向角，此时 $r = \frac{A'}{2}$ ， $\delta = \pi - 2 \arcsin(n \sin \frac{A'}{2})$ ，
 利用 (2.2) 得 $\delta = \pi - A' - \delta_0 = \frac{2}{3}\pi - \delta_0$ ，故冰晶的幻日角度为 $\delta = 120^\circ - 22^\circ = 98^\circ$ ，玻璃六棱柱为 $\delta = 120^\circ - 39^\circ = 81^\circ$ 。

B3: 144°幻日

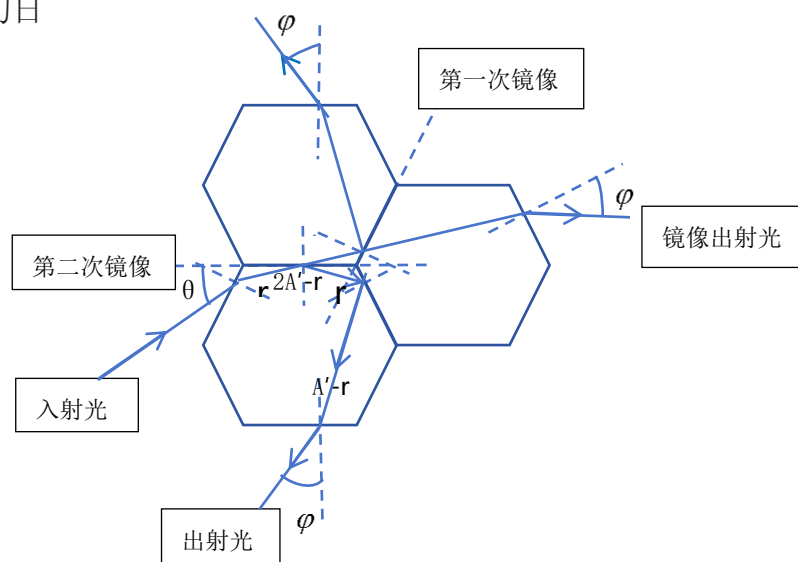


图 2.26 144° 色散型幻日光路

根据图 2.26，偏向角为

$$\delta = \pi - (2A' - \theta - \varphi) = A' + \theta + \varphi \quad (2.13)$$

当 $\theta = \varphi$ 的时候有最小偏向角，此时 $r = \frac{A'}{2}$ ， $\delta = A' + 2 \arcsin(n \sin \frac{A'}{2})$ ，
 利用公式 (2.2) 得 $\delta = 120^\circ + \delta_0$ ，故对于冰晶，该角度为 $\delta = 120^\circ + 22^\circ = 144^\circ$ ，玻璃六棱柱为 $\delta = 120^\circ + 39^\circ = 159^\circ$ 。

(2) 普通色散光线

当出射光和入射光分别位于各自法线的同侧时，偏向角单调变化，不会出现最小偏向角，不能产生幻日。

B4 线：普通色散光线

不同折射率的光偏向角不一样，此出射光发生色散。

$$r = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n}\right) \quad (2.14)$$

$$\varphi = \arcsin(n \sin(A' - r)) = \arcsin\left(n \sin\left(A' - \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n}\right)\right)\right) \quad (2.15)$$

$$\delta = \pi - (A' - \theta + \varphi) = 2A' + \theta - \varphi \quad (2.16)$$

代入 φ ，得

$$\delta = 2A' + \theta - \arcsin\left(n \sin\left(A' - \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n}\right)\right)\right) \quad (2.17)$$

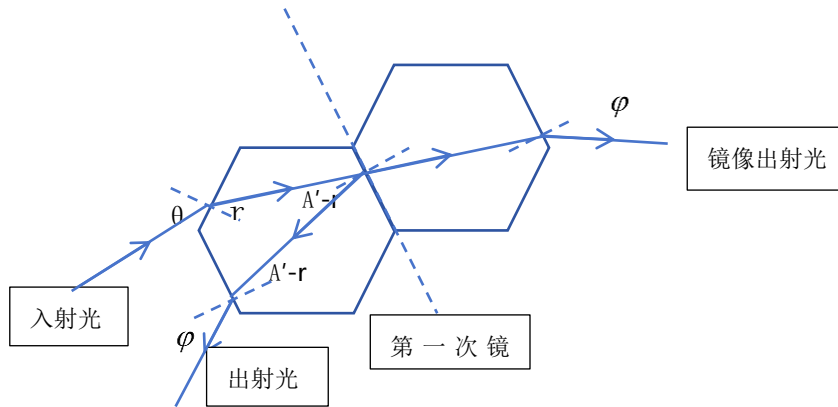


图 2.27 B4 光路图

B5 线：普通色散光线

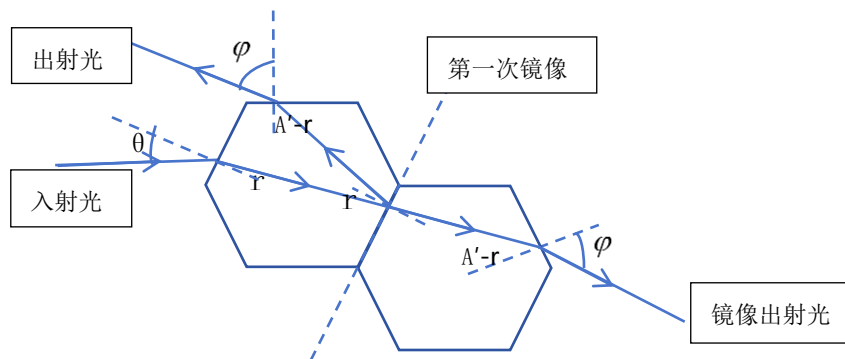


图 2.28 B5 光路图

不同折射率的光偏向角不一样，此出射光发生色散。

$$\delta = \pi - (A' + \theta - \varphi) = 2A' - \theta + \varphi \quad (2.18)$$

将上文中式 2.15 中 φ 代入式 2.18，可得

$$\delta = 2A' - \theta + \arcsin\left(n \sin\left(A' - \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{n}\right)\right)\right) \quad (2.19)$$

综上，当 $\theta = \varphi$ 时，产生最小偏向角，B1 (B6)、B2、B3 光线出现回调，产生幻日，B4、B5 没有最小偏向角，朝一个方向单调运动，不产生幻日，见图 2.29。

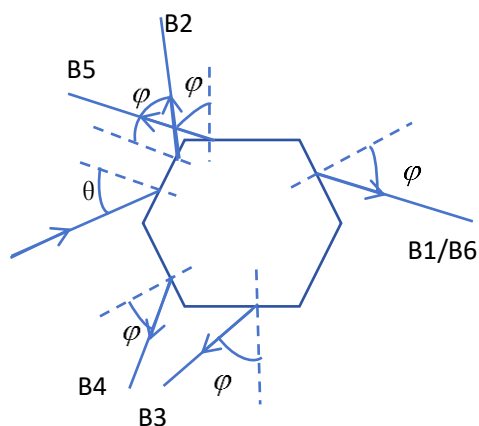


图 2.29 三个同步运动的色散型幻日光路

2.4 幻日环实验

1. 实验装置

如图 2.30, 2.31 所示。环形光屏（360° 分度的蛋糕桶），机械转盘，LED 手电筒，遮光筒（开孔）（尽量使光线为平行光），激光笔，支架，手机（用于拍摄），广角照相机（小红屋全景相机灵动 2），玻璃六棱柱，（装水）亚克力六棱柱容器。

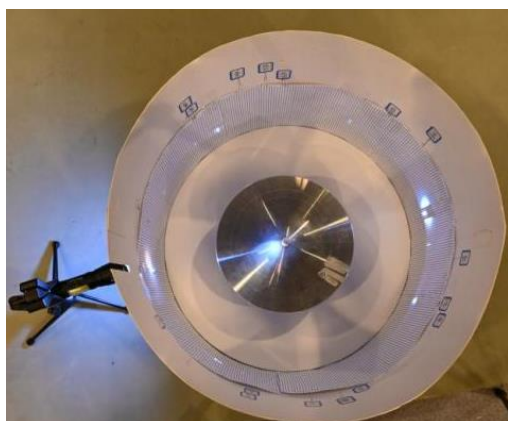


图 2.30 实验装置图（俯视）

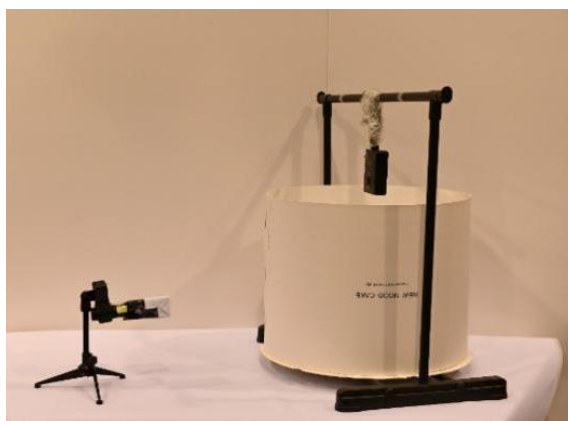


图 2.31 实验装置图（侧视）

2. 实验过程

(1) 蛋糕桶壁进行刻度，平均分为 360 格，每格 1°。

(2) 将转盘放置在蛋糕桶中心位置，将光学六棱镜竖直安装在转盘的中心，LED 手电筒调焦、遮挡至近似平行光（可换成激光笔，注意不要使用扩束）从蛋糕桶 180° 位置射入，经过六棱镜中心点射到蛋糕桶 0° 位置。

(3) 快速旋转转盘，模拟自然界产生幻日环的光路，即利用旋转的六棱柱模拟侧面法线指向不同方向的冰晶，幻日环为不同时刻出射光的叠加，即模拟了太阳光经过无数 c 轴垂直的冰晶产生的光叠加的效果，以此模拟出幻日和幻日环上的现象。

(4) 拍摄、记录蛋糕桶壁上的动态图像。

(5) 低速旋转转盘，辨认每一条光路，用于验证理论计算中所获取到的各个出射光是否存在，光线运动模式和走向是否和理论计算一致，进一步证实理论结果的合理性，拍摄、记录蛋糕桶壁上的静态细节图像。

(6) 重复步骤(3)和(4)，使用广角照相机记录下蛋糕筒壁上 360° 图像。

操作方式：一人旋转转盘，另一人拍摄和记录，旋转过程中保证六棱镜始终在中心位置。

重复以上步骤，将光学六棱镜换成装水的六棱柱容器，装满水密闭后，采用同样的步骤进行实验。实验中，使用白光观察幻日的视觉效果，使用激光定量测量各个特征现象的位置。

高速旋转状态下的效果图如下图：

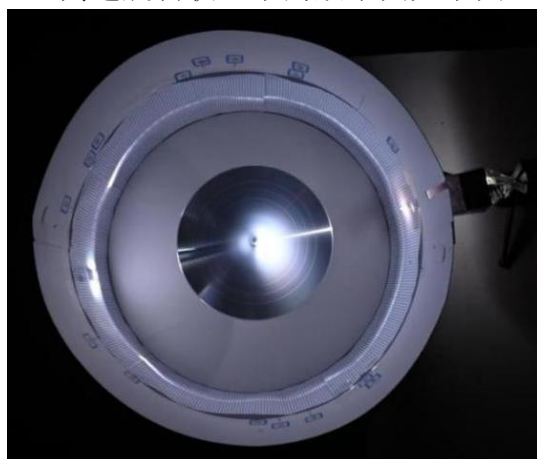


图 2.32 六棱镜动态图

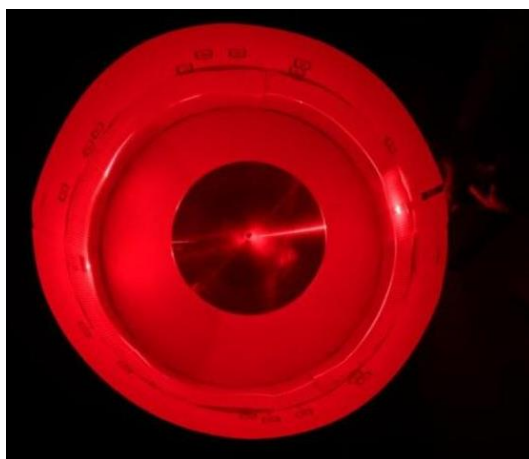


图 2.33 六棱镜激光动态图

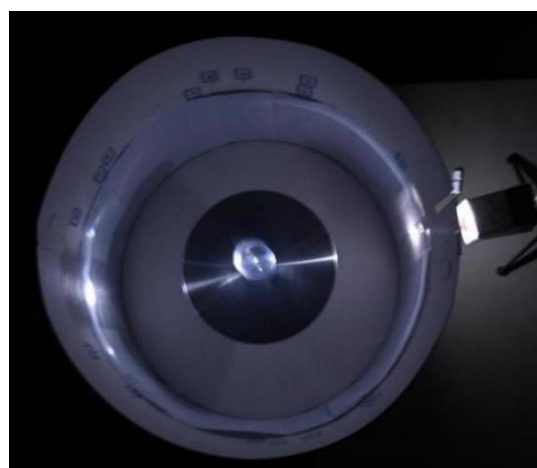


图 2.34 装水六棱柱动态图

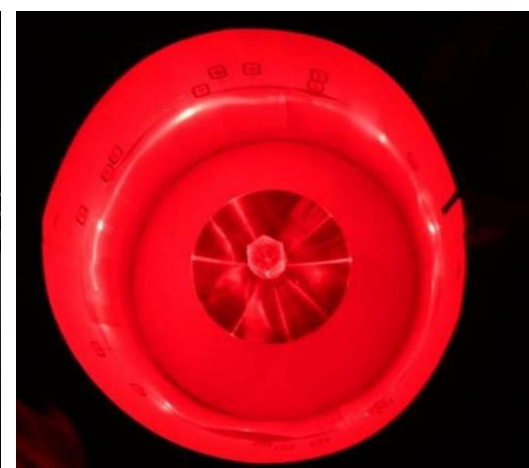


图 2.35 装水六棱柱激光动态图

六棱镜动态全景图如下图 2.36:



图 2.36 六棱镜动态全景图

3、实验结果与分析

(1) 高速旋转状态

高速旋转状态下实验效果如图 2.36，旋转过程中在蛋糕筒壁上形成了完整的白色光圈，即为幻日环，在 39° 和 321° 度位置产生明显色散光斑， 120° 和 240° 位置有明显白色光斑，其他几处色散光斑不明显，但经过仔细辨认也可发现光斑， 119° 和 241° 位置上有蓝斑（较为明显的蓝白分界）。

图 2.37 是理论实验对照图，理论图上的曲线表示该幻日（或者蓝斑）的角度随折射率变化的情况。定位型幻日是一条直线，例如 120° ， 240° 的幻日。图上两行理论数据点对应于冰和玻璃折射率计算的结果。图中实验是玻璃六棱柱 ($n=1.52$) 的结果。

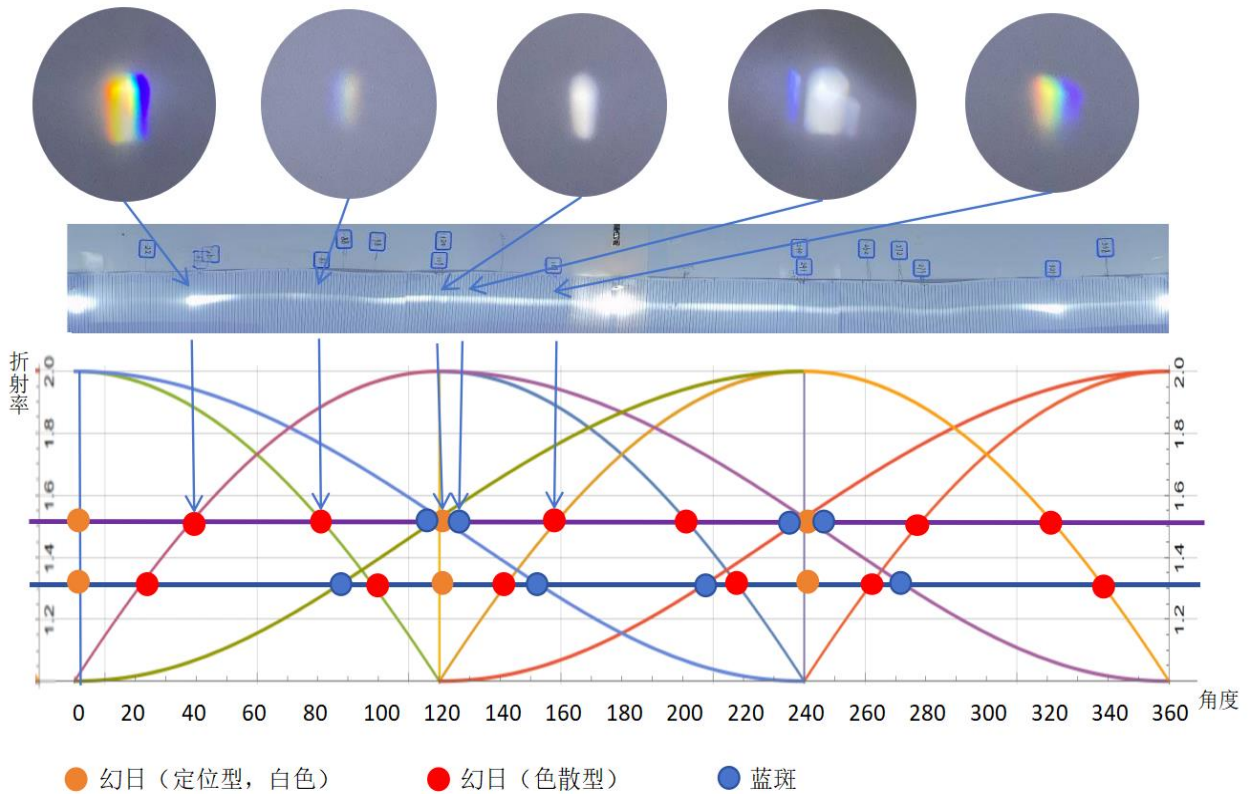


图 2.37 幻日环现象理论实验（玻璃六棱柱）对照

表 2.6 理论实验对照

	定位型幻日	色散型幻日 ①	蓝斑 ②	色散型幻日 ③	定位型幻日 ④	蓝斑 ⑤	色散型幻日 ⑥
冰晶理论值	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 22^\circ$	无	$\delta = 98^\circ$	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 152^\circ$	$\delta = 144^\circ$
装水六棱柱	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 23^\circ$	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 97^\circ$	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 150^\circ$	$\delta = 143^\circ$
实验结果	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 23^\circ$	$\delta = 89^\circ$	$\delta = 98^\circ$	$\delta = 121^\circ$	$\delta = 151^\circ$	$\delta = 145^\circ$
误差度数	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$
六棱柱理论值	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 39^\circ$	$\delta = 119^\circ$	$\delta = 81^\circ$	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 121^\circ$	$\delta = 159^\circ$
实验结果	$\delta = 0^\circ$	$\delta = 38^\circ$	$\delta = 118^\circ$	$\delta = 81^\circ$	$\delta = 120^\circ$	$\delta = 122^\circ$	$\delta = 160^\circ$
误差度数	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$

	色散型幻日 ⑥对称点	蓝斑 ⑤对称点	定位型幻日 ④对称点	色散型幻日 ③对称点	蓝斑 ②对称点	色散型幻日 ①对称点
冰晶理论值	$\delta = 216^\circ$	$\delta = 208^\circ$	$\delta = 240^\circ$	$\delta = 262^\circ$	无	$\delta = 338^\circ$
装水六棱柱	$\delta = 217^\circ$	$\delta = 210^\circ$	$\delta = 240^\circ$	$\delta = 263^\circ$	$\delta = 270^\circ$	$\delta = 337^\circ$
实验结果	$\delta = 218^\circ$	$\delta = 210^\circ$	$\delta = 240^\circ$	$\delta = 264^\circ$	$\delta = 272^\circ$	$\delta = 339^\circ$
误差度数	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$
六棱柱理论值	$\delta = 201^\circ$	$\delta = 239^\circ$	$\delta = 240^\circ$	$\delta = 279^\circ$	$\delta = 241^\circ$	$\delta = 321^\circ$
实验结果	$\delta = 202^\circ$	$\delta = 240^\circ$	$\delta = 241^\circ$	$\delta = 280^\circ$	$\delta = 242^\circ$	$\delta = 322^\circ$
误差度数	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$	$\leq 2^\circ$

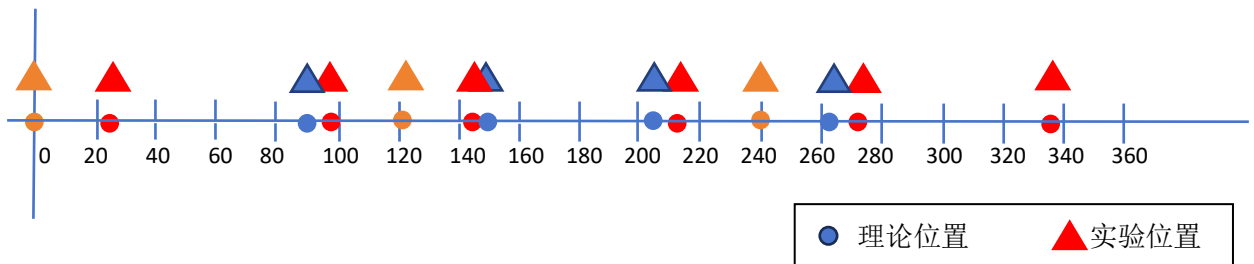


图 2.38 装水六棱柱理论实验对照图

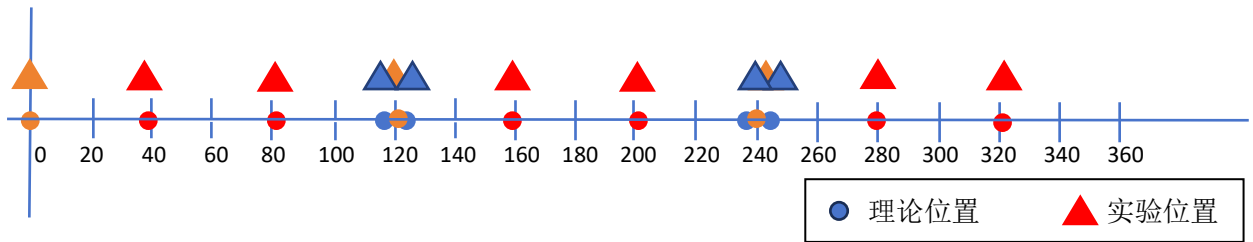


图 2.39 六棱镜理论实验对照图

实验拍摄到以下几种幻日，具体结果为：

1) B1 线路（冰晶 22° 幻日，装水六棱柱 23° 幻日，玻璃六棱柱的 39° 幻日）在实验中表现为最亮色散光斑。在现实中该幻日也最常见，从蜂巢图上进行分析，产生该幻日的线路为 B1 线，该线路为折射光，未经任何反射，如图 2.40，所以光强损失最小，故出射光最明显。

2) 120° 定位幻日光强一般，但是也较为明显，从蜂巢图分析，产生 120° 幻日的光线为 A1 光线，如图 2.40，此光路在达到出射面前经过两次反射，这两次反射过程中，有部分光已经出射，导致光强有所损失，但是因为是定位型，位置不变导致了虽然光强不强但是集中，所以实验中现象较明显，现实中， 120° 度幻日的记载也较多。

3) B2 线路幻日（冰晶 98° ，装水六棱柱 97° ，玻璃 81° ）不明显，从光路分析，该光路实际为 B1 光线在出射面的反射光所致，所以光强非常弱，在现实中也鲜有记载。

4) B3 线路（冰晶 144° 幻日，装水六棱柱 143° 幻日，玻璃 159° 幻日），在实验中可观察到，从光路图上分析 B3 经过了两次反射，第一次根据 1-2 面光线为全反射，光线不可出射，故光强无损失，但是第二次反射不保证全程全反射，光强有损失，最终光强不如 B1 线，但比 B2 强。

实验观察的幻日符合理论计算结果，误差在 2° 以内。

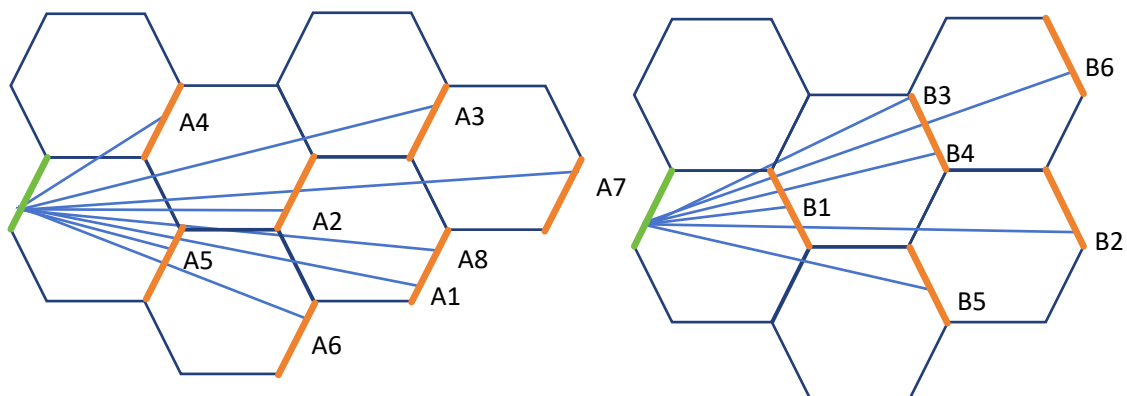


图 2.40 蜂巢镜像图

(2) 低速旋转状态

低速旋转的状态下，B系列光线均为色散光线，观察到在B1（B6）、B3两条色散光线同向同速运动，分别在 39° 、 159° 处发生回调(最小偏向角)，即为产生色散型幻日的成因，B2光线在 81° 产生回调，同样产生幻日，B4、B5在运动过程中单调运动，没有发生回调，故没有产生幻日，构成了幻日环的一部分。

A系列光线均为白色光，A3、A5的 0° 位置因为与电筒光直射位置一致，故不容易辨认，但是A1线路在 120° 位置产生定点型幻日非常明显，此处有一明显白色光斑，不因六棱柱转动而变化，A2光线绕着蛋糕筒旋转，在经过 119° 附近时，会明显有蓝色色调，在其他为位置则为白光，此外，A6/A7、A4、A2三条光线相互间隔等同距离绕着蛋糕筒旋转。

4、实验结论

低速旋转实验主要目的为验证理论光路，进一步明确色散型幻日、定位型幻日以及幻日环的成因，实验结果符合理论计算结果。高速旋转实验则模拟了幻日和幻日环实际效果，跟现实情况也是一致的。

第三章 三维光路

本章研究三维状态下的冰晕, 包括 22° 晕、外接晕 (上下切弧)、Parry 弧、 46° 晕、环天顶弧和环地平弧, 采用了矩阵分析和计算这些弧的特征, 并据此绘制出理论图像。

3.1 理论

3.1.1 22° 晕

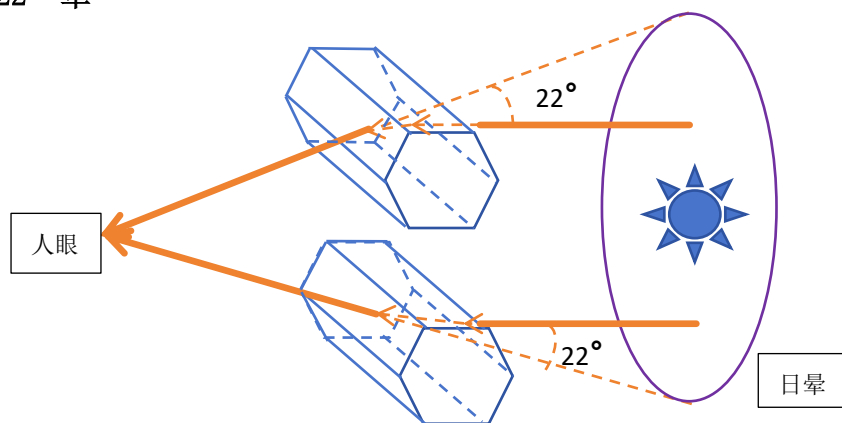


图 3.1 22° 晕人眼观察光路

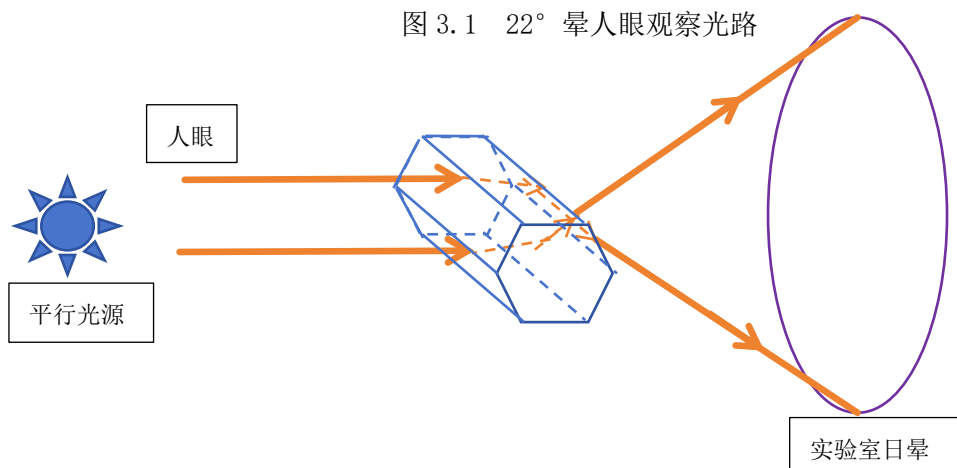


图 3.2 实验室观察 22° 晕的光路

如图 3.1, 22° 晕是由六棱柱状冰晶 random 取向造成的, 光路是从六棱柱某一侧边进入, 再从相隔一个面的侧面出射, 因为冰晶具有 random 取向, 所以从地上视角来看, 图像是圆形白色光圈, 外部略有彩色, 这是不同波长的光色散造成的, 而光圈内部因为小于最小偏向角没有出射光。按照最小偏向角公式

$$\delta = 2 \arcsin \left(n \sin \frac{A'}{2} \right) - A' \quad (3.1)$$

代入冰的折射率 $n=1.31$, $A' = 60^\circ$, $\delta = 21.8^\circ$ 。我们在实验中用玻璃六棱柱代替冰晶, 取折射率为 1.52, “ 22° 晕”的实际角度为 38.9° 。

在实验室中, 为了模拟日晕成像, 采用图 3.2 所示的方案, 平行光线经由

玻璃六棱柱折射，在接收屏上形成光斑，在实验中使六棱柱同时沿 C 轴自转以及在垂直平面上沿经过自身中心点的 A 轴旋转，通过两个方向的 360° 旋转，模拟了各个方向和角度上的冰晶，以达到实验效果。

3.1.2 外接晕（上切弧、下切弧）

因为位于太阳上下方而且与 22° 晕相切而得名。上下切弧的形态会随着太阳高度改变而变化，在大阳接近 35° 时，上下切弧会逐渐连接起来，而后成环。这个时候，切弧变成了外接晕。

上切弧与下切弧来自 column 取向的冰晶（晶体的 c 轴在 x-y 平面内），见图 3.3。相对于 x-y 平面对称的两条光路形成上下两条弧。上切弧的光路见图 3.4。

在图 3.3 中，设入射光在 x-y 平面内，与 x 轴的夹角为 θ ，故入射光方向的单位矢量 \vec{a} 为 $[-\cos \theta, 0, -\sin \theta]$ ；六棱柱状冰晶主轴在 x-y 平面内，取六棱柱状冰晶主轴上的一个单位矢量 \vec{b} 与 x 轴夹角为 φ ，所以单位矢量 \vec{b} 为 $[\cos \varphi, \sin \varphi, 0]$ 。设 \vec{a} 相对于 \vec{b} 的夹角为 α ， $\cos \alpha = -\cos \theta \cos \varphi$ ，因为入射光相对于棱镜底面的夹角为 $e = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，故有效折射率为：

$$n(e) = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(e)}}{\cos(e)} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}} \quad (3.2)$$

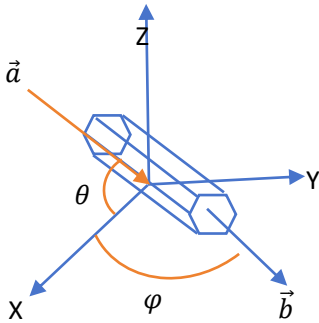


图 3.3 冰晶三维空间示意图

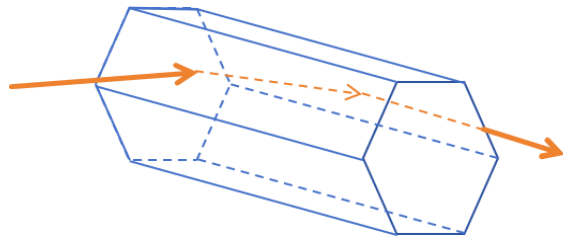


图 3.4 上切弧光路图

因为冰晶在围绕着截面法向量“滚动”，所以出射光范围的边缘是最小偏向角处，最小偏向角为

$$\delta = 2 \arcsin \left(n(e) \sin \frac{A'}{2} \right) - A' \quad (3.3)$$

取 $A' = 60^\circ$ ，有效折射率为式(3.2)。

根据向量绕单位向量 $\vec{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]$ 旋转 δ 角的旋转矩阵¹⁰

$$R = \begin{bmatrix} \cos \delta + u_x^2(1 - \cos \delta) & u_x u_y(1 - \cos \delta) - u_z \sin \delta & u_x u_z(1 - \cos \delta) + u_y \sin \delta \\ u_y u_x(1 - \cos \delta) + u_z \sin \delta & \cos \delta + u_y^2(1 - \cos \delta) & u_y u_z(1 - \cos \delta) - u_x \sin \delta \\ u_z u_x(1 - \cos \delta) - u_y \sin \delta & u_z u_y(1 - \cos \delta) + u_x \sin \delta & \cos \delta + u_z^2(1 - \cos \delta) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

此处代入 $\vec{u} = \vec{b} = [\cos \varphi, \sin \varphi, 0]$ ，被旋转的向量为入射光 $\vec{a} = [-\cos \theta, 0, -\sin \theta]$ ，代入如下矩阵，得出射光(a1, b1, c1)：

$$\begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \delta & \cos \varphi \sin \varphi(1 - \cos \delta) & \sin \varphi \sin \delta \\ \cos \varphi \sin \varphi(1 - \cos \delta) & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos \delta & -\cos \varphi \sin \delta \\ -\sin \varphi \sin \delta & \cos \varphi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

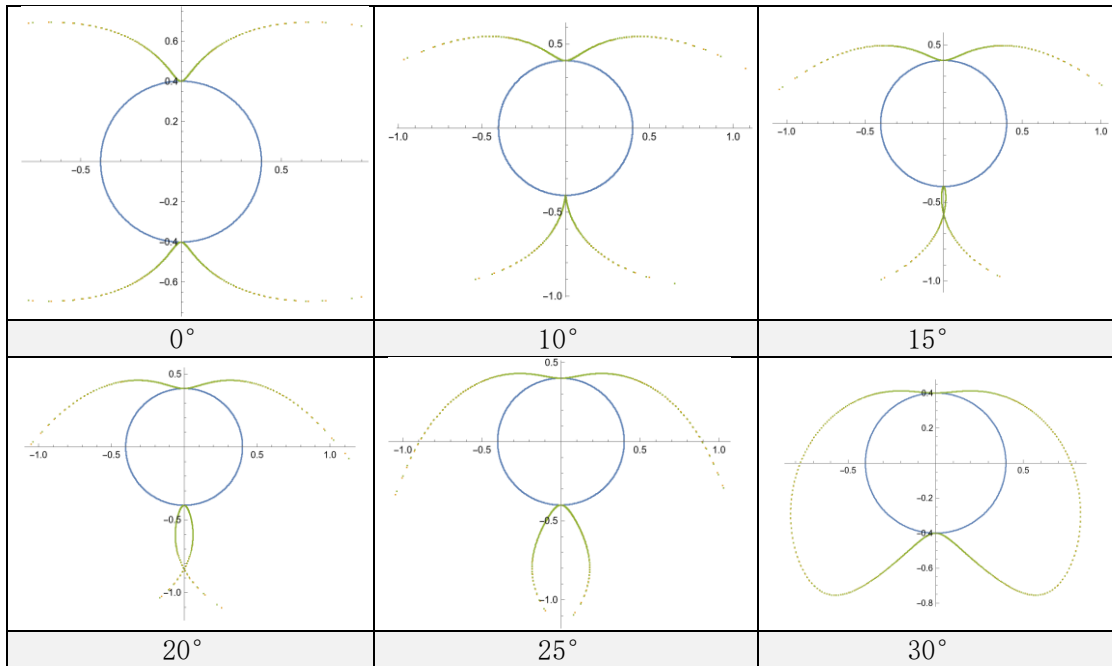
取旋转角为 $-\delta$ 时代入如下矩阵，得出射光(a2, b2, c2)：

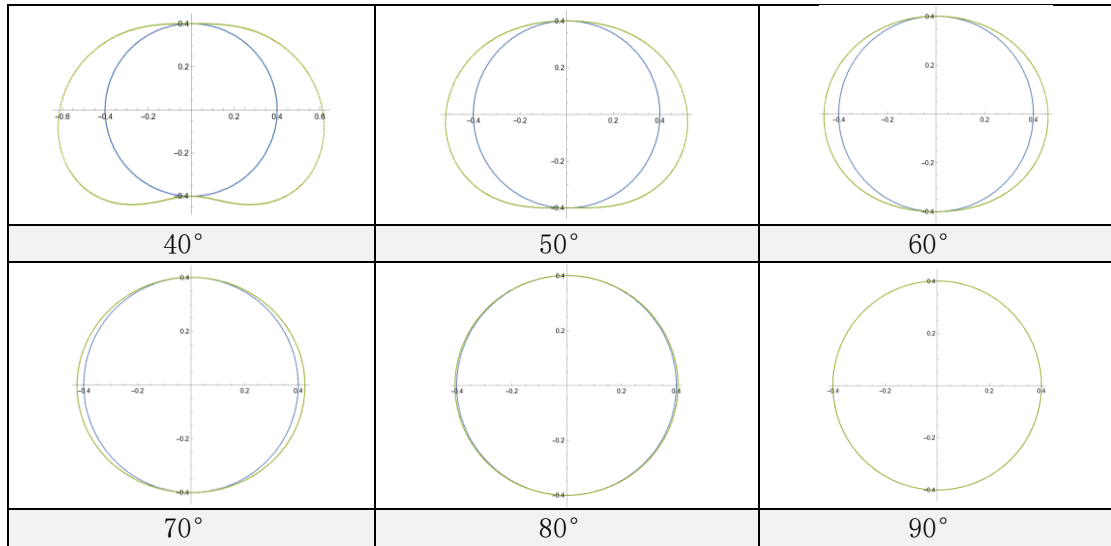
$$\begin{bmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \delta & \cos \varphi \sin \varphi(1 - \cos \delta) & -\sin \varphi \sin \delta \\ \cos \varphi \sin \varphi(1 - \cos \delta) & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos \delta & \cos \varphi \sin \delta \\ \sin \varphi \sin \delta & -\cos \varphi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

实验室使用玻璃六棱柱，取 $n=1.52$ ，因为在水平面内冰晶主轴的指向是任意的，故 φ 的取值范围为0到360度。分别取不同仰角 θ ，根据出射光线的单位矢量公式3.5和3.6，使用Mathematica可得冰晕图像，图像见实验部分，代码见附录1。

表3.1为根据上述方法，取 $n=1.31$ ，使用Mathematica模拟六棱柱冰晶的上下切弧在太阳仰角从 0° 到 90° 变化的过程：

表 3.1 冰晶上下切弧在太阳仰角在 0° 到 90° 变化的过程





3.1.3 Parry 弧

22° Parry 弧分为四种，按其位置和弯曲方向分别称为上凸 (upper sunvex)、上凹 (upper suncave)、下凸 (lower sunvex)、下凹 (lower suncave) Parry 弧。这里的“凹”和“凸”是相对于太阳而言的，也就是凸向太阳时，被称作“凸”，凹向太阳时，被称作“凹”。这四种光路实际上是类似的，只是计算时需要取不同的参数。

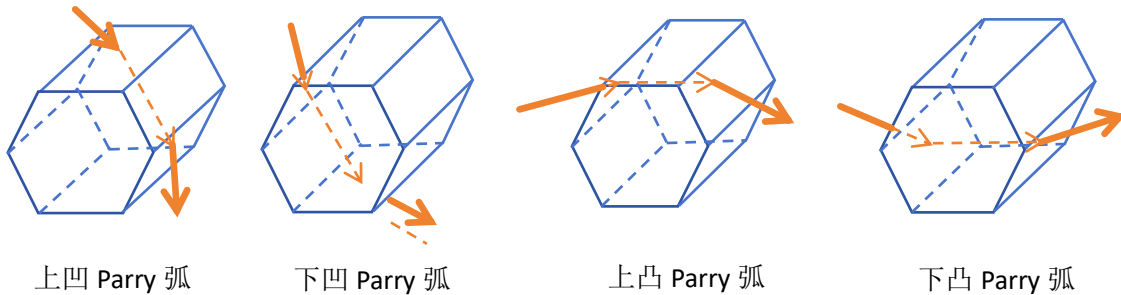


图 3.5 Parry 弧光路图

Parry 弧冰晶的取向为 Parry 取向，冰晶的主轴在水平面内，同时，一对侧面也在水平面内，Parry 弧的光线从侧面的一面进入，从与该侧面相隔一面的侧面射出，如图 3.5 所示。

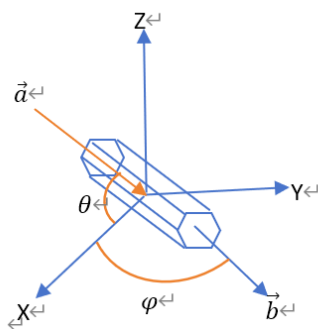


图 3.6 冰晶所在坐标系

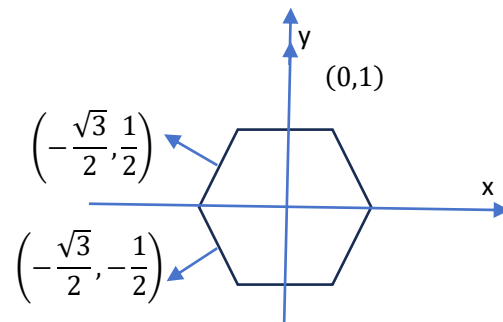


图 3.7 冰晶侧面法向量

根据图 3.5，首先根据折射定律，容易计算四条光路仰角的允许范围，见表 3.2：

表 3.2 水和冰晶中，四种 Parry 仰角范围

	水 (n=1.33)	冰晶 (n=1.31)
1	$\theta < 67.4524^\circ$	$\theta < 69.4408^\circ$
2	$\theta > 52.5476^\circ$	$\theta > 50.5592$
3	$\theta < 7.4524^\circ$	$\theta < 9.4408^\circ$
4	$\theta < 60^\circ$	$\theta < 60^\circ$

n=1.33 及 1.31 时仰角范围如上 (θ ：入射光与水平面夹角)

如图 3.6，坐标系与 θ 和 φ 等符号与 3.1.2 相同。

因为形成 Parry 弧的冰晶并不绕主轴“旋转”，六棱柱的一对侧面保持水平，故不可以通过最小偏向角求取出射光范围边界，需要求取冰晶的每一个位置对应的偏向角。因此，需要计算入射光第一次折射的入射角，并根据光路求偏向角。为了求入射光第一次折射的入射角，需要先求它向冰晶底面的投影向量。以下是求投影向量的方法：

原坐标轴三个基向量是：

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1) \quad (3.7)$$

绕 z 轴旋转坐标系 xyz，使 y' 轴正方向与 \vec{b} 相同，得到新坐标系 $x' y' z'$ ，它的基向量是

$$\hat{i}' = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0), \hat{j}' = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \hat{k}' = (0, 0, 1) \quad (3.8)$$

旋转后坐标系（以旋转前坐标系表示的某向量）的变换矩阵为

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

以 R_φ^{-1} 乘入射光矢量，得以旋转后坐标系表示的入射光矢量：

$$R_\varphi^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

六棱柱晶体的底面与 $x' z'$ 平面平行，因为光线始终与晶体主轴 y' 保持着相同的夹角，而光线在 $x' z'$ 平面满足折射定律，其折射率用等效折射率(公式 (3.2))代替，所以以下只需要考虑在 $x' z'$ 平面内的光路。

入射光向量在 $x' z'$ 平面的投影是 $\vec{a}' = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}$ 。

Parry 取向冰晶的三条可受光侧面的法向量在坐标系 $x' z'$ 中分别表示为 $\vec{n}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{n}_2 = (0, 1), \vec{n}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，见图 3.7。由空气进入介质的第一个受光面的入射角 $i = \cos^{-1}(\vec{a}' \cdot \vec{n}_1 / |\vec{a}'|)$ ，其余类推。通过计算，得到偏向角与入射角

的关系，进而求出光线绕向量 \vec{b} 偏折的角度。

仰角 θ 在0到90度范围内变化时允许有四条光路（见图3.5），分别对应偏向角为：

$$\delta_1 = \frac{\pi}{3} - \arccos[B_5] - \arcsin \left[n(e) \sin \left[\frac{\pi}{3} - \arcsin[B_6] \right] \right] \quad (3.11)$$

$$\delta_2 = - \left(\arccos[B_1] + \arcsin \left[n(e) \sin \left[\frac{\pi}{3} - \arcsin[B_3] \right] \right] \right) - \frac{\pi}{3} \quad (3.12)$$

$$\delta_3 = \arccos[B_1] + \arcsin \left[n(e) \sin \left[\frac{\pi}{3} - \arcsin[B_3] \right] \right] - \frac{\pi}{3} \quad (3.13)$$

$$\delta_4 = \arccos[B_2] + \arcsin \left[n(e) \sin \left[\frac{\pi}{3} - \arcsin[B_4] \right] \right] - \frac{\pi}{3} \quad (3.14)$$

其中

$$B_1 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\cos\theta \sin\varphi) - \frac{\sin\theta}{2}}{\sqrt{[\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\varphi]}} \quad (3.15)$$

$$, B_2 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos\theta \sin\varphi + \frac{\sin\theta}{2}}{\sqrt{[\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\varphi]}} \quad (3.16)$$

$$, B_3 = \frac{\sin \left[\arccos \left[\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos\theta \sin\varphi - \frac{\sin\theta}{2} \right)}{\sqrt{[\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\varphi]}} \right] \right]}{n(e)} \quad (3.17)$$

$$B_4 = \frac{\sin \left[\arccos \left[\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos\theta \sin\varphi + \frac{\sin\theta}{2} \right)}{\sqrt{[\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\varphi]}} \right] \right]}{n(e)} \quad (3.18)$$

$$B_5 = \frac{-\sin\theta}{\sqrt{[\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\varphi]}} \quad (3.19)$$

$$B_6 = \frac{\sin \left[\arccos \left[\frac{-\sin\theta}{\sqrt{[\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\varphi]}} \right] \right]}{n(e)} \quad (3.20)$$

根据向量绕单位向量 $\vec{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]$ 旋转 δ 角的旋转矩阵（3.4），此处代

入 $\vec{u} = \vec{b} = [\cos\varphi, \sin\varphi, 0], \delta = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

(见公式 3.11, 3.12, 3.13, 3.14), 被旋转的向量为入射光 $\vec{a} = [-\cos\theta, 0, -\sin\theta]$, 代入如下矩阵 (3.21), 得出射光 (a_1, b_1, c_1) :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos\delta & \cos\varphi\sin\varphi(1 - \cos\delta) & \sin\varphi\sin\delta \\ \cos\varphi\sin\varphi(1 - \cos\delta) & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\delta & -\cos\varphi\sin\delta \\ -\sin\varphi\sin\delta & \cos\varphi\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

取 $n=1.52$, 因为在水平面内冰晶主轴的指向是任意的, 故 φ 的取值范围为 0 到 360 度。分别取不同仰角 θ , 用 Mathematica 可以绘制冰晕图像, 图像见实验部分, 代码见附录 1。

3.1.4 46° 晕, 环天顶弧, 环地平弧

46° 晕、环天顶弧、环地平弧的光路都需要穿过冰晶侧面和底面形成的 90° 顶角, 容易证明, 光线能够从 90° 顶角出射的折射率上限为 $\sqrt{2}$, 否则光线在第二个面发生全反射, 无法出射。所以不能用玻璃模拟 46° 晕、环天顶弧和环地平弧。

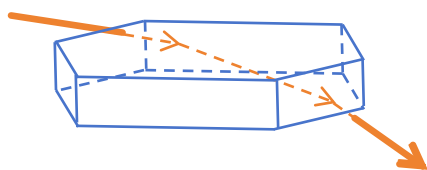


图 3.8 46° 晕的光路

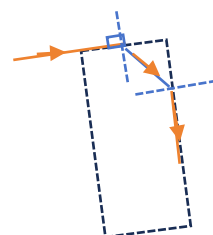


图 3.9 46° 晕光路侧面图

1、46° 晕

与 22° 晕类似, 46° 晕也是冰晶 random 取向造成的圆形光晕。光路穿过冰晶侧面和底面形成的 90° 顶角, 光圈内部小于最小偏向角的位置没有出射光。光圈边缘由最小偏向角公式 (3.1) 决定。

代入冰的折射率 $n=1.31, A=90^\circ, \delta = 45.6^\circ$ 。对于玻璃, $n=1.52$, 该光路的光线无法出射。因此, 46° 晕实验不能用玻璃样品代替冰晶。实验中可以使用盛水的盒子代替冰晶, 取 $n=1.33$, 由公式 (3.1) 得到偏向角为 50.25° 。

2、环天顶弧、环地平弧

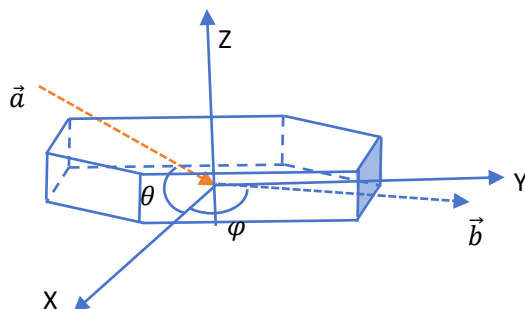


图 3.10 形成环天顶, 环地平弧冰晶所在坐标系

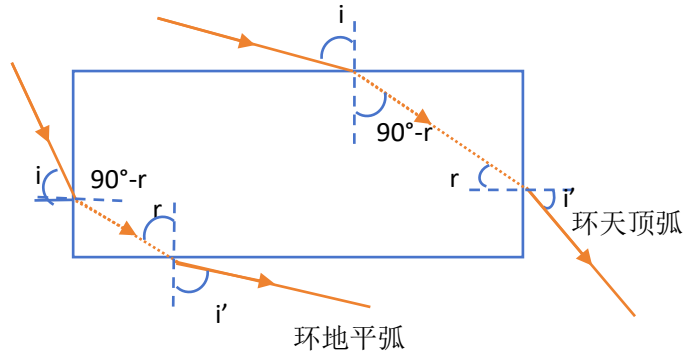


图 3.11 环天顶、环地平弧光路图

环天顶弧和环地平弧可以算是同一种弧（见图 3.11），由于它们色彩鲜艳引人注目，加上外形特别，前者经常被当成彩虹，或称为“天空的微笑”，后者经常被叫做“火焰彩虹”。环天顶弧是光线经 plate 取向冰晶一个 90° 角形成的弧。我们用盛水的亚克力盒子来模拟冰晶。

如图 3.11，两条光路中角度满足

$$\sin i' = n \sin r \quad (3.22)$$

$$n \sin(90^\circ - r) = \sin i \quad (3.23)$$

因为 $\sin i' < 1$ ，解得

$$\sqrt{n^2 - 1} < \sin i < 1 \quad (3.24)$$

相应入射光与水平面夹角 θ 的范围见表 3.3。

表 3.3 环天顶弧、环地平弧入射角范围

	水 ($n=1.33$)	冰 ($n=1.31$)
环地平弧	$\theta > 61.27^\circ$	$\theta > 57.80^\circ$
环天顶弧	$\theta < 28.73^\circ$	$\theta < 32.20^\circ$

以下计算弧的形状。坐标系与 θ 和 φ 等符号见图 3.10。与 parry 弧一样，偏向角为：

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos \left[\frac{-\sin \theta}{B_1} \right] - \arcsin \left[n(e) \cos \left[\arcsin \left[\frac{\sin \left[\arccos \left[\frac{-\sin \theta}{B_1} \right] \right]}{n(e)} \right] \right] \right] \quad (3.25)$$

$$\delta_2 = \arccos \left[\frac{-\cos \theta \sin t}{B_1} \right] + \arcsin \left[n(e) \cos \left[\arcsin \left[\frac{\sin \left[\arccos \left[\frac{-\cos \theta \sin t}{B_1} \right] \right]}{n(e)} \right] \right] \right] - \frac{\pi}{2} \quad (3.26)$$

$$B_1 = \sqrt{[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi]} \quad (3.27)$$

根据向量绕单位向量 $\vec{u} = [u_x \ u_y \ u_z]$ 旋转 δ 角的旋转矩阵 3.4，此处代入

$\vec{u} = \vec{b} = [\cos \varphi, \sin \varphi, 0]$ ，被旋转的向量为入射光 $\vec{a} = [-\cos \theta, 0, -\sin \theta]$ ，由

公式 (3.25)，(3.26)， $\delta = \delta_1, \delta_2$ ，代入如下矩阵，得出射光 (a_1, b_1, c_1) ：

$$\begin{bmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos\delta & \cos\varphi\sin\varphi(1 - \cos\delta) & \sin\varphi\sin\delta \\ \cos\varphi\sin\varphi(1 - \cos\delta) & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\delta & -\cos\varphi\sin\delta \\ -\sin\varphi\sin\delta & \cos\varphi\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

实验中用盛水的容器代替冰晶，为了跟实验对照，取 $n=1.33$ 。因为在水平面内 \vec{b} 的指向是任意的，故 φ 的取值范围为 0 到 360 度，取不同仰角 θ ，根据射出光线的单位矢量公式 3.28，使用 Mathematica 可绘制冰晕图像，图像见实验部分，代码见附录 1。

根据表 3.2，在仰角为 0° ， 30° 时仅可见环天顶弧， 58° 以上时仅可见环地平弧， 90° 时无可见弧。

3.2 三维光路实验

我们设计制作了“冰晕演示仪”，用棱镜来模拟光在冰晶中的折射、反射。天空中特定取向对应的千千万万个冰晶的空间分布由三组电机带动一个棱镜样品旋转来模拟，即“以时间换空间”。控制棱镜样品的安装方式，以及设定好三轴电机的转动方式，控制光源和屏幕位置，就可以模拟多种冰晶取向以及光路。由于采用的电机转速较低，无法达到视觉暂留，所以某一时刻人眼看到的是冰晕的局部图像，不同时刻的图像相叠加起来才能形成完整的晕。实验中，通过延长曝光时间得到了完整的图像。以时间换空间方法的局限性是，无法体现不同冰晶之间光的干涉效应。从实验效果上看，几何光学在光晕形成过程起的是主要作用。

(1) 实验装置：三轴转台（设计图 3.12，装置图 3.13），（设备参数：tt 马达，5 号电池 4 节，12V 静音马达，转速 1-180rpm，18650 锂电池，无级调速模块：6V-24V，调速显示范围 $0\sim 100\%$ ），LED 手电筒，支架，光屏（墙），卡纸通光孔，尼康 Z6 相机

(2) 实验样品：玻璃六棱柱，（盛水）六棱柱盒子，（盛水）四棱柱

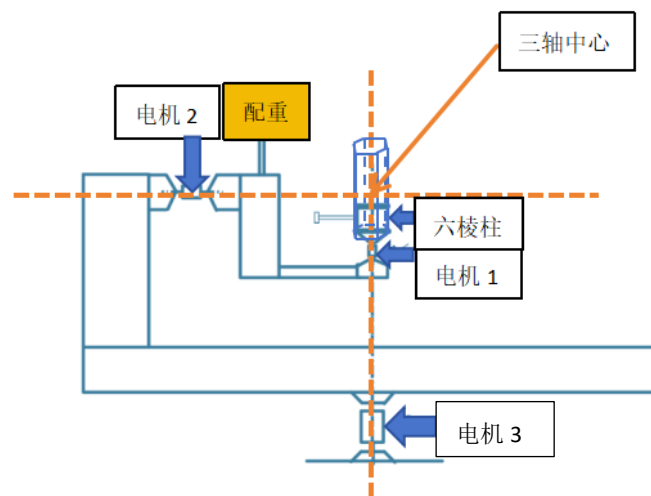


图 3.12 实验装置设计图

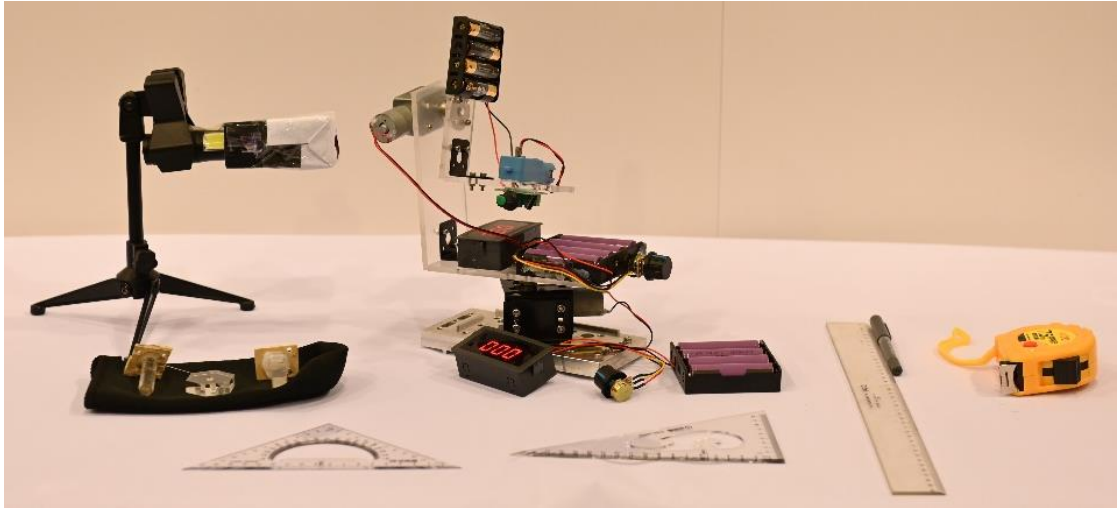


图 3.13 实验装置与器材

(3) 三轴转台的设置

电机 1，控制轴 1：自转；

电机 2，控制轴 2：纵转，改变角 φ 大小；

电机 3，控制轴 3：横转，控制仰角 θ ；

样品由样品座安装在电机 1 的轴上方，可拆卸。

以 22° 晕为例，三轴转台的设置示意图见图 3.14。

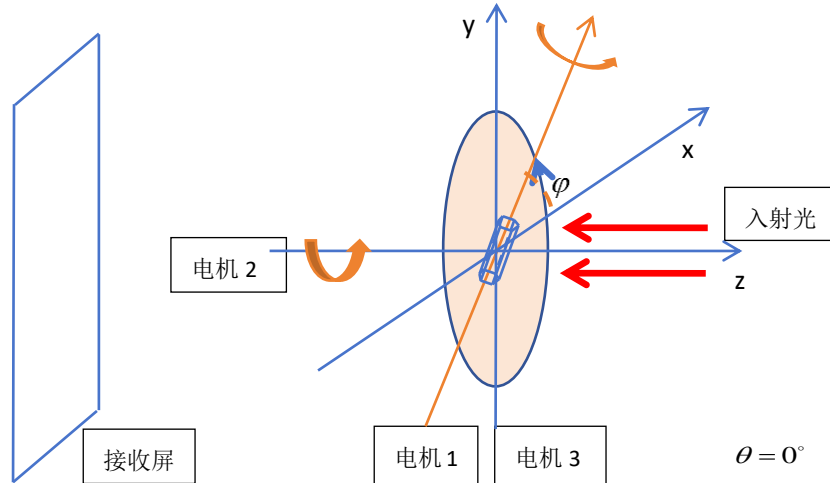


图 3.14 22° 晕实验——转台电机设置示意图

(4) 实验过程

1) 将支架放在水平桌面上，将手电筒水平地夹在支架上，正对一面光屏（墙壁）；

2) 调节电筒焦距使出射光为水平出射的平行光，并将开孔的卡纸套在手电筒上；

3) 将转台放在水平桌面上，安装好样品，调整电筒支架高度，使光线水平照射到样品上。调整与墙壁距离，使光晕尽可能投在一块墙面上；

4)根据每种弧对应的取向等条件安装适当的样品并设定相应的旋转方式。

注意:

- 1)必须从上到下开启电机;
- 2)调整仰角时保证样品中心位置不变。

3.2.1 22° 晕: (random 取向)

样品: 六棱柱

转台设置: 电机 1, 开; 电机 2, 开; 电机 3, 取 $\theta = 90^\circ$

示意图见图 3.14。

3.2.2 上切弧、下切弧与外接晕: (column 取向)

样品: 六棱柱

转台设置: 电机 1, 开; 电机 2, 开; 电机 3, 设定角度 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 等。

示意图见图 3.15。

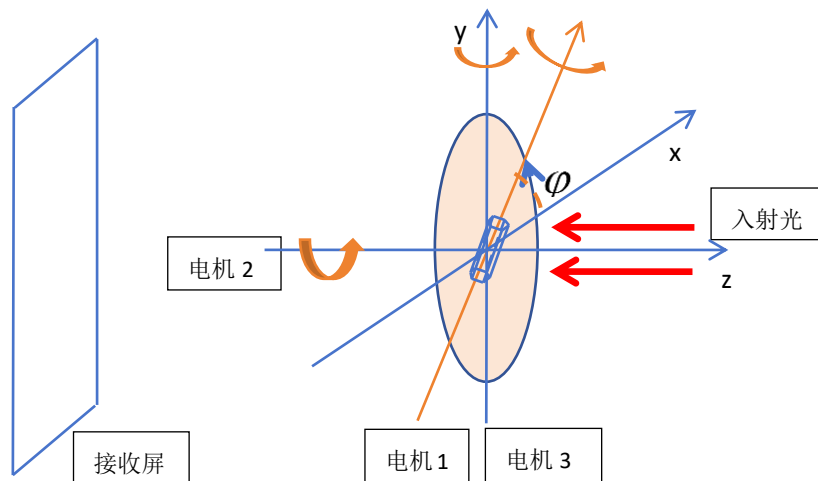


图 3.15 上下切弧实验示意图

3.2.3 Parry 弧: (Parry 取向)

样品: 六棱柱

转台设置: 电机 1, 关; 电机 2, 开; 电机 3, 设仰角, 晶体在 x-y 平面内旋转, 调整六棱柱一对侧面平行于 x-y 平面。

3.2.4 46° 晕: (random 取向)

方案 A:

样品: 六棱柱 (盛水)

转台设置: 电机 1, 开; 电机 2, 开; 电机 3, 定角

方案 B: 转台设置与 22° 晕类似, 六棱柱换成四棱柱 (盛水)

样品: 四棱柱 (盛水)

转台设置: 电机 1, 开; 电机 2, 开; 电机 3, 定角

晶体在 x-y 平面内旋转

3.2.5 环天、环地：(plate 取向)

方案 A:

样品：六棱柱、片（盛水）

转台设置：电机 1，开；电机 2，关；电机 3，设仰角

晶体上下底面平行于 x-y 平面，并自转

方案 B：转台设置与 Parry 弧类似，六棱柱换成四棱柱（盛水）

样品：四棱柱（盛水）

转台设置：电机 1，关；电机 2，开；电机 3，设仰角

晶体在 x-y 平面内旋转，即：调整棱柱一对侧面平行于 x-y 平面

3.3 实验效果与分析

3.3.1 22° 晕：(random 取向)

根据上文推导 22° 晕公式 (3.1)，理论图形如图 3.16 所示，实验图片采用长曝光，如 3.17 所示。照相机设置，NIKON Z6, 光圈值 f/16, 曝光时间 10s, ISO 速度：ISO-1600, 曝光补偿-0.3 档光圈，焦距：24mm。

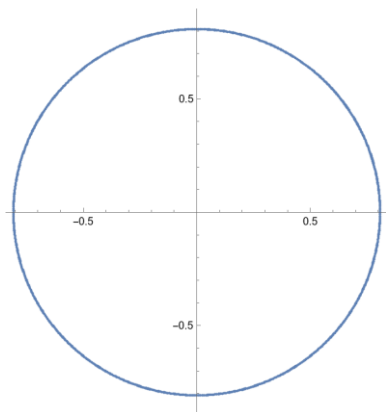


图 3.16 22° 晕理论计算图

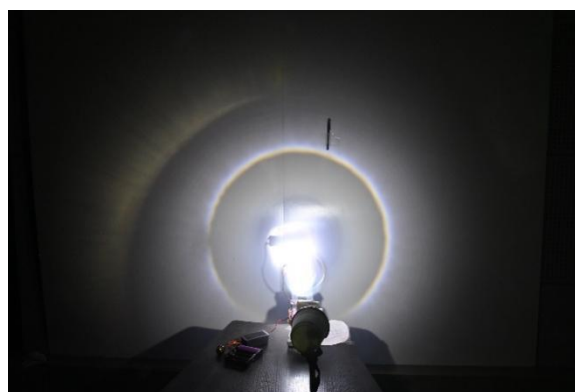


图 3.17 22° 晕实验效果图

理论计算中，玻璃六棱柱的偏向角为 38.9° 。实验中经测量，六棱柱中心距墙面垂直距离 50CM，墙面上晕的直径为 77CM，六棱镜直径 1CM，如下图 3.18（为制图清晰，六棱柱尺寸未按比例）：

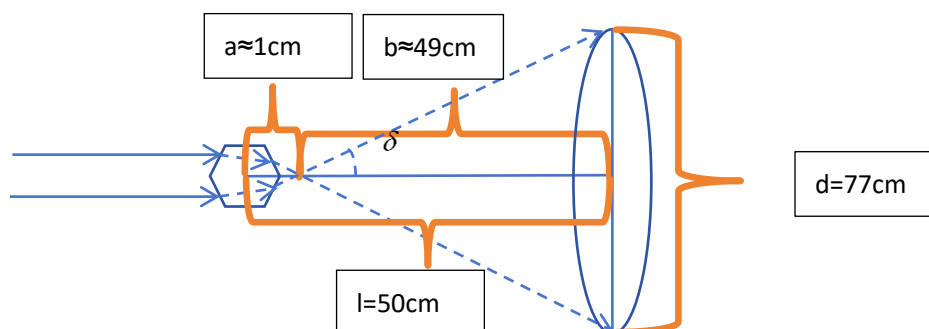


图 3.18 实验室日晕示意图

经计算 $\delta = \arctan(38.5/49) = 38.16^\circ$ 。理论值与实验值误差小于 1° 。

根据实验结果可知该实验完成了日晕现象的复现，与图 3.2 预期的实验室光路图一致，在接收屏上形成了完整的圆形日晕现象，并且形成了内红外紫的色散光圈。

3.3.2 上切弧、下切弧与外接晕

安装玻璃六棱柱在样品座上，转动电机 1 和电机 2，这是因为调整光源至一定高度角并保证光屏与之垂直是困难的，故保持两者不动，通过电机 3 设定仰角 θ 。实验中为了在竖直墙壁上观察现象，x-y 平面被当作“水平面”，并垂直于桌面。故实验图像旋转 90° 后方与理论计算图像一致。

下图 3.19 为上下切弧与外接晕实验俯视示意图。

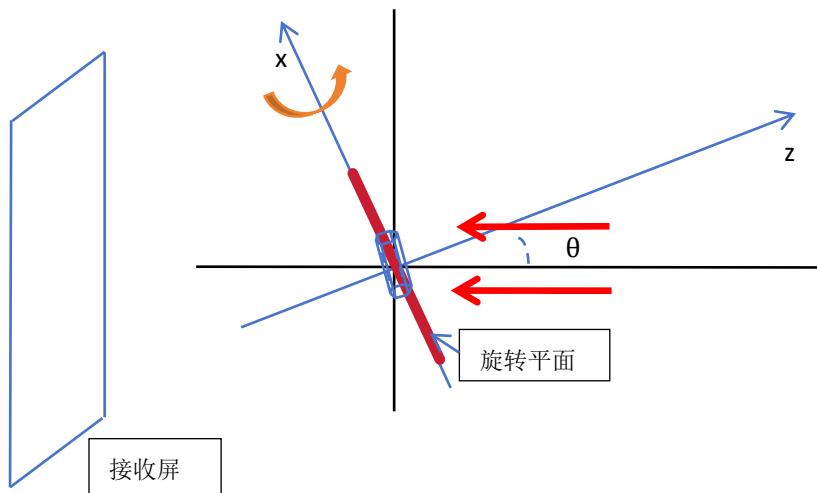


图 3.19 上切弧、下切弧与外接晕（俯视图）

如下图 3.20-3.23 为上下切弧理论实验对照图（下图中所有实验图都进行了顺时针 90° 旋转）。理论图中心的圆是作为实际光晕图像参考背景的 22° 晕。

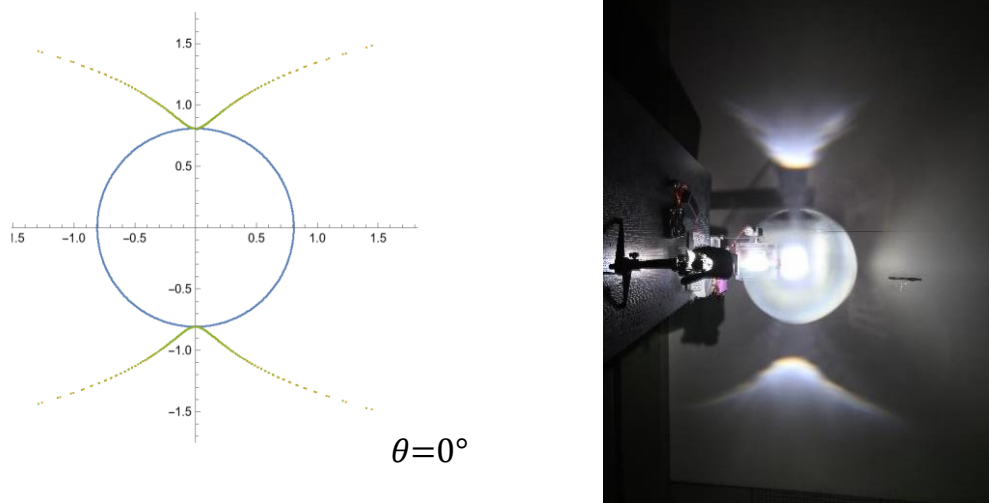


图 3.20 0° 上下切弧理论图与实验图对照

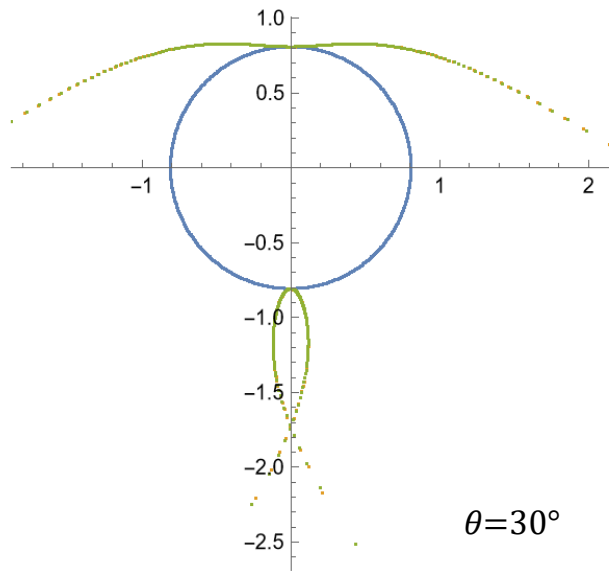


图 3.21 30° 上下切弧理论与实验图对照

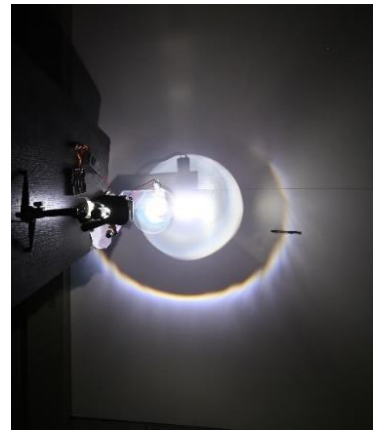
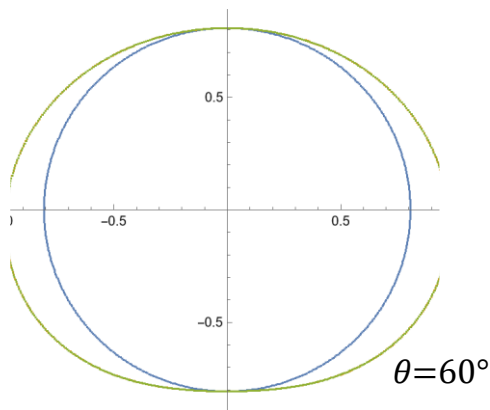


图 3.22 60° 上下切弧理论与实验图对照

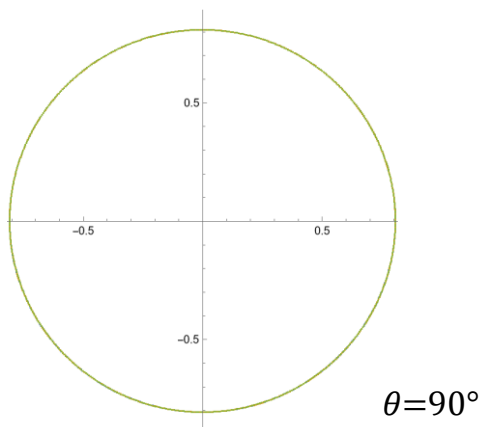


图 3.23 90° 上下切弧理论与实验图对照

从实验效果看，上下切弧与理论计算图形效果完全一致；从切弧大小位置

进行分析，在 $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 四个仰角下，理论计算中上下切弧与日晕相切，实验中进行测量，四个仰角下与晕相切位置直径均在77-78厘米，也符合相切数据（上节晕的实验中，直径为77CM）。故上下切弧实验与理论计算符合，很好地再现了切弧现象。

3.3.3 Parry 弧：（Parry 取向）

使用六棱柱，转台设置为电机1关闭；电机2开；电机3分别设仰角 $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ，晶体在x-y平面内旋转，调整六棱柱一对侧面平行于x-y平面。

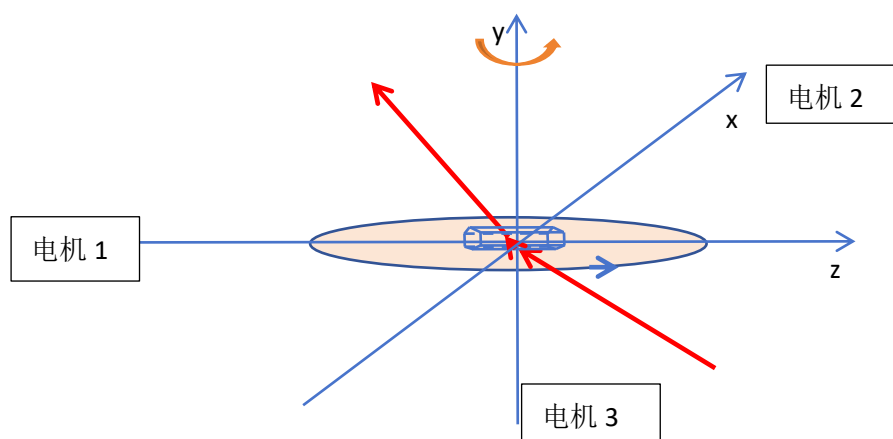


图 3.24 Parry 取向冰晶运动示意图

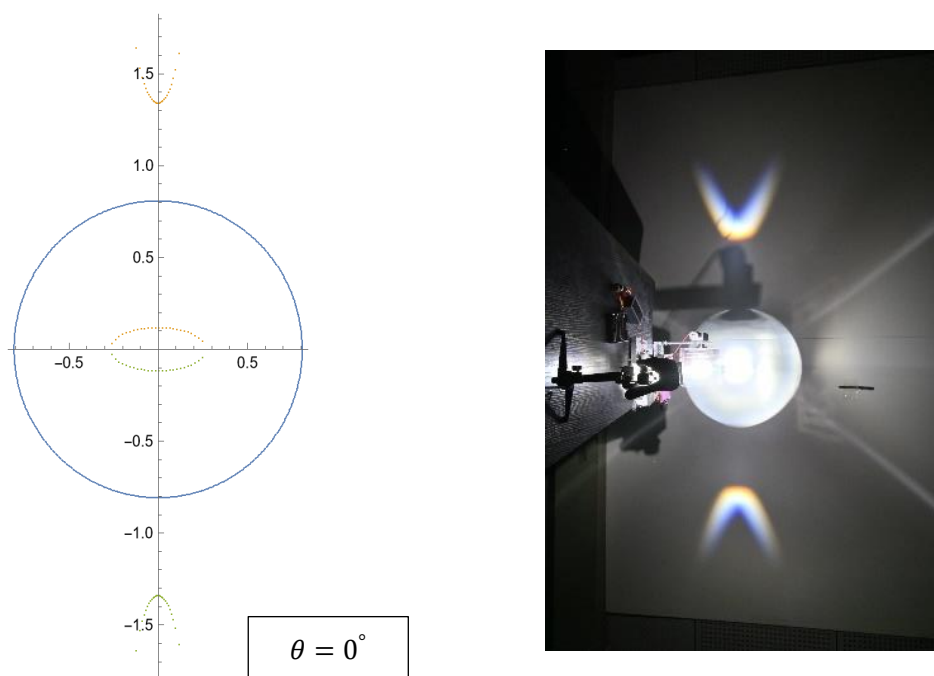


图 3.25 0° Parry 弧理论图与实验图对照

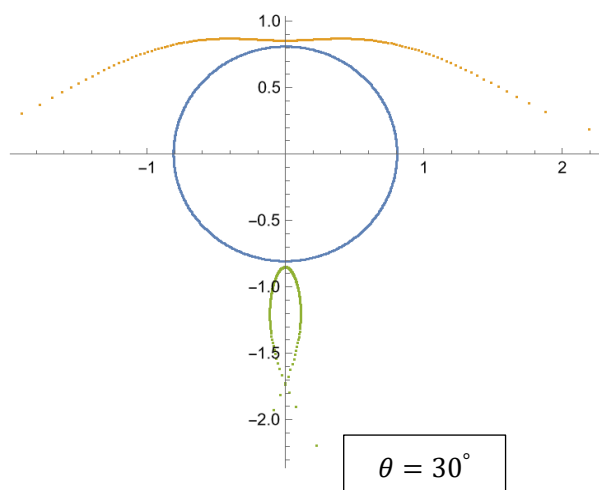


图 3.26 30° Parry 弧理论图与实验图对照

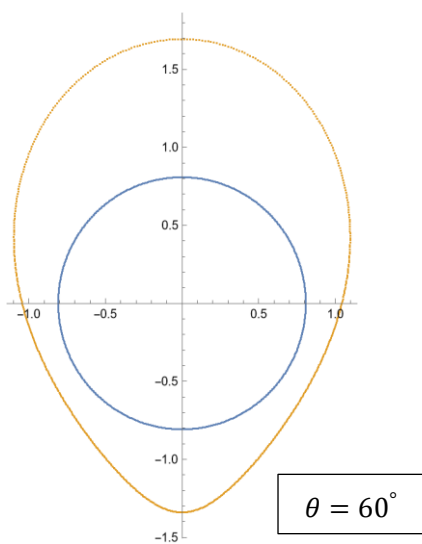


图 3.27 60° Parry 弧理论图与实验图对照

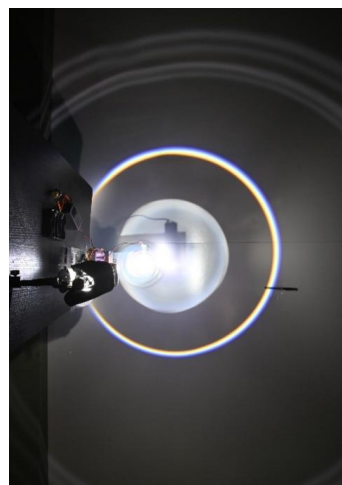
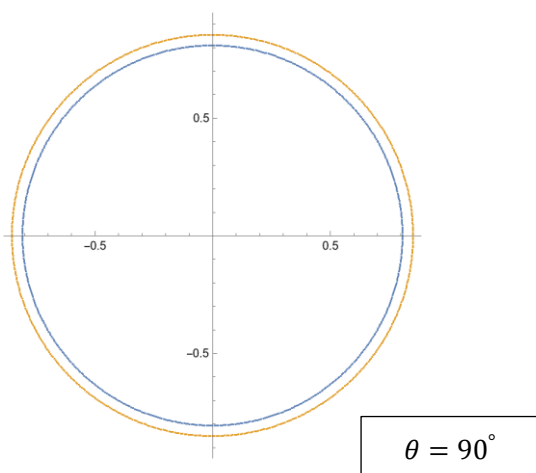


图 3.28 90° Parry 弧理论图与实验图对照

从实验现象分析，太阳仰角较小时（实验中为 0° ），同时分别由光路 3 和光路 4 产生了上凸弧和下凸弧，光路图见图 3.5，实验效果见图 3.25，光路汇总图见图 3.29。

太阳仰角增大（实验中为 30° ），同时分别由光路 1 和光路 4 产生了上凹弧和下凸弧，光路见图 3.5，实验效果见图 3.26，光路汇总图见图 3.29。

太阳仰角继续增大（实验中为 60° ），同时分别由光路 1 和光路 2 产生了上凹弧和下凹弧，光路图见图 3.5，实验效果见图 3.27，光路汇总图见图 3.29，仰角太大以后上凹弧逐渐不明显，在实验中已基本观察不到了。

太阳仰角继续增大后，只剩光路 2 产生光线，到 90° 时实验中形成了一个圆环，大小上贴近日晕，效果见图 3.28。（各光路具体角度范围见表 3.2）

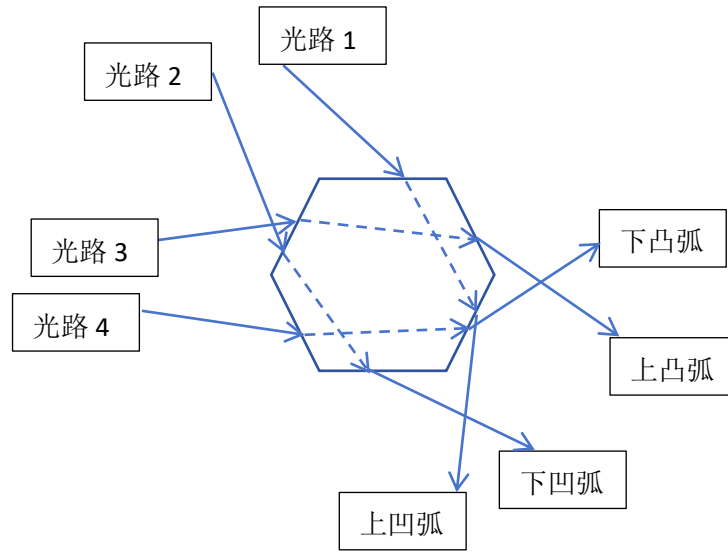


图 3.29 Parry 弧光路汇总图

3.3.4 46° 晕：（random 取向）

本文采用方案 B 完成实验，采用装水四棱柱， $n=1.33$ ，转台设置为电机 1，开；电机 2，开；电机 3，定角。使晶体在 $x-y$ 平面内旋转，计算得理论图形见图 3.30，实验图如 3.31 所示。

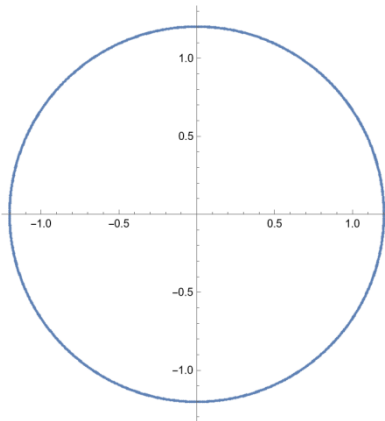


图 3.30 46° 晕理论计算图



图 3.31 46° 晕实验效果图

实验中经测量，装水四棱柱中心距墙面垂直距离 50CM，墙面上晕的直径为 108CM，四棱镜直径 1CM，如下图 3.32（为制图清晰，四棱柱尺寸未按比例）：

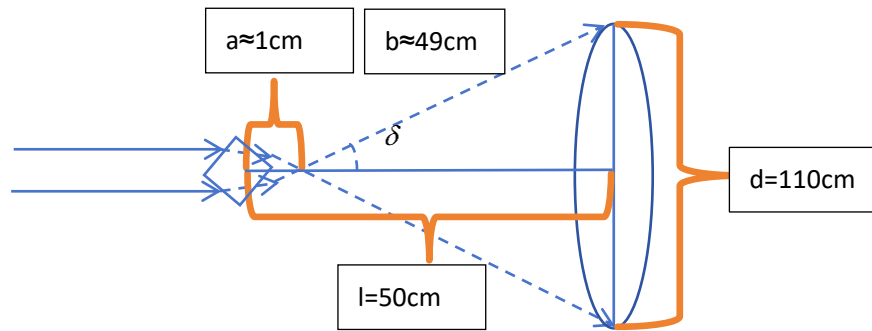


图 3.32 46° 晕实验示意图

经计算： $\delta = \arctan(55/49) = 48.3^\circ$ ，装水四棱柱棱柱，其最小偏向角约为 50.25° （见 3.14 节），实验误差为： $\Delta = 50.25^\circ - 48.3^\circ = 1.95^\circ < 2^\circ$ ，理论值与实验值误差小于 2° 。

冰晕 90° 晶面产生的日晕为 46° ，本文采用 B 方案用装水四棱柱取代冰晶进行实验，取得了较好的实验效果。

3.3.5 环天顶弧

本文采用方案 A 完成实验，将装满水的六棱柱盒子放置于转盘上，转动转盘，以 5° 仰角进行实验。下图 3.33 为理论与实验对照图形。实验图中下方的弧被物体遮挡。

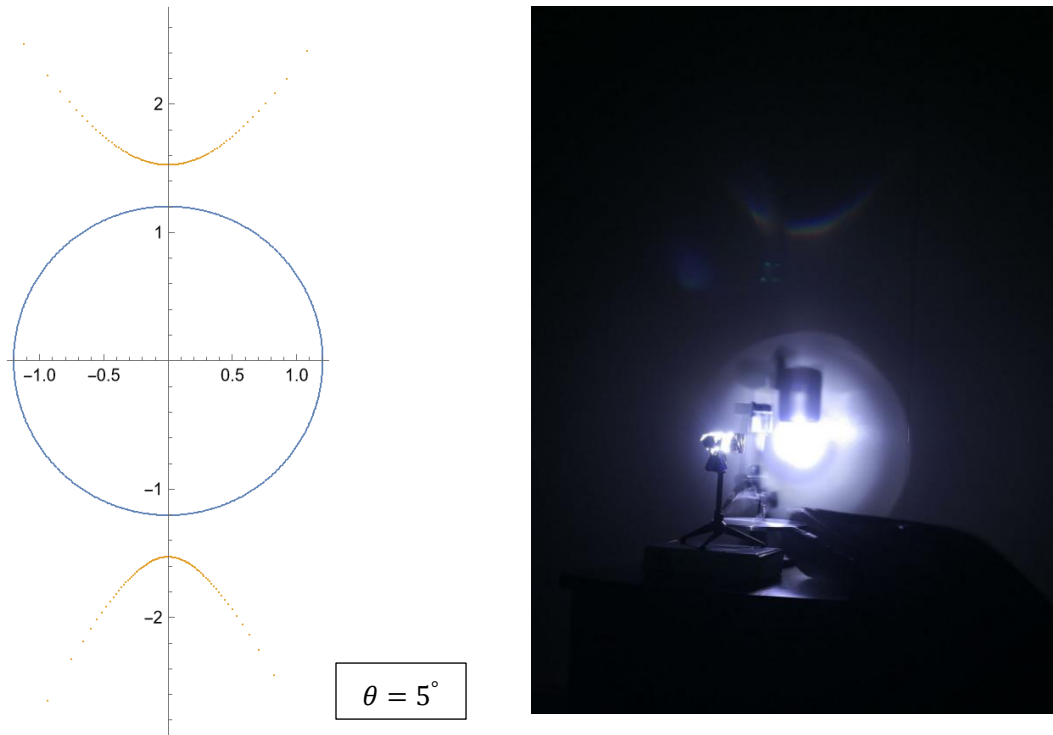
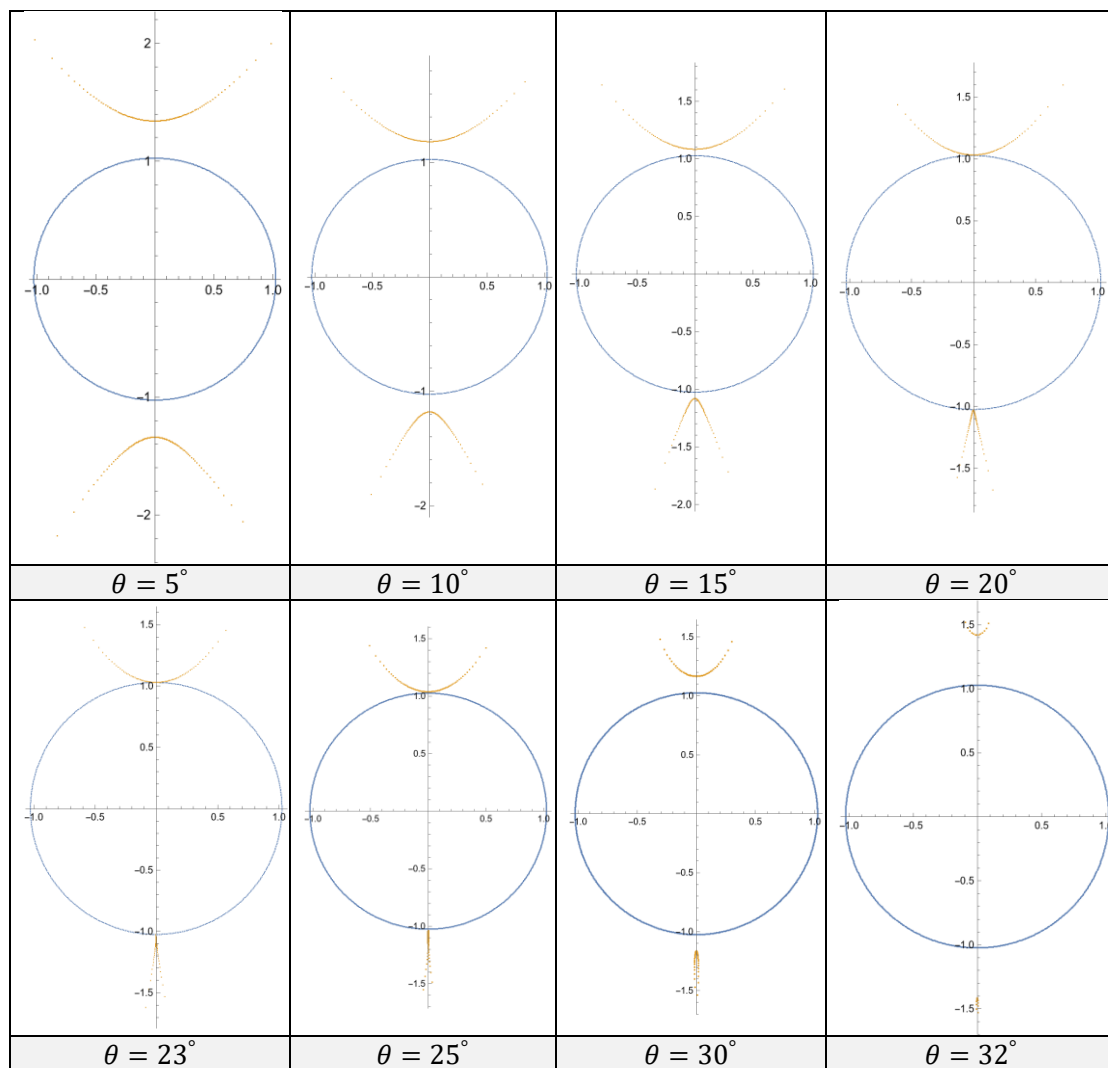


图 3.33 5° 环天顶弧理论图与实验图对照

从实验效果看，与理论图形完美对应，呈现出开口向上，下红上紫的倒挂彩虹形象，此即为“天空的微笑”。

下表为 $n=1.31$ （冰晶）时，环天顶弧模拟图，当太阳仰角为 23° 时环天顶弧与 46° 晕相切，超过 32° 时，环天顶弧消失。

表 3.4 “天空的微笑”模拟图



如下图 3.34，太阳仰角大于 32° 时，入射角 θ 小于 58° ，此时 $r < \arcsin(\sin 58^\circ / 1.31)$ ， $r < 40.34^\circ$ ， $\alpha > 90^\circ - 40.34^\circ = 49.66^\circ$ ，大于冰晶的全反射角度，所以产生全反射，无光线射出。

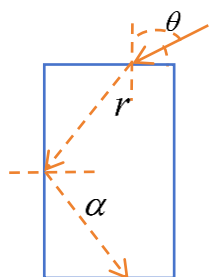


图 3.34 太阳仰角大于 32° 时

第四章 水立方——四棱柱的幻日环

4.1 理论

在大自然中冰晶除了呈现六棱柱形态，也存在四棱柱等其他形态的冰晶。此外，在六棱柱中，因为底面和侧面为垂直关系，经过底面折射到侧面出射的光线，性质与四棱柱中从一个面折射到相邻面射出的光线一致，如图 4.1a。四棱柱还可以方便地模拟六棱柱 90° 晶面相关的光路，如 46° 晕，环天顶弧、环地平弧等。如图 4.1b，将亚克力方盒子盛有少量水，下方放置 LED 手电筒，墙面上的光晕与环天顶弧相似。

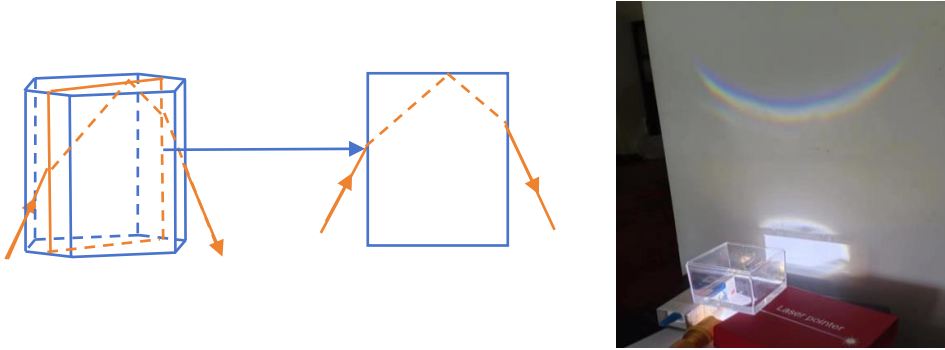


图 4.1a 六棱柱中的 90° 晶面

图 4.1b 用四方盒子（水立方）模拟环天顶弧

研究四棱柱的幻日环也可以采用镜像法，形成的镜像图呈田字形，如下图 4.2，命名为田字图。

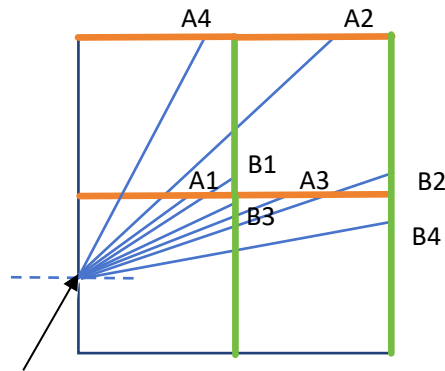


图 4.2 田字镜像光路图

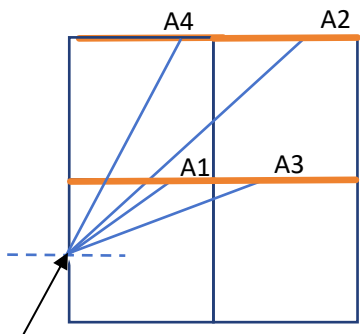


图 4.3 出射面非平行光线

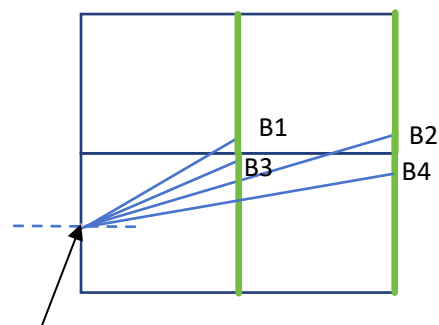


图 4.4 出射面平行光线

在此图中，同样存在出射光与入射光平行和非平行两种情况，性质与蜂巢图类似。其中A1-A4为色散光线，B1-B4为平行光线。与六棱柱类似，推导四棱柱幻日环光路，总结见表4.1-4.4。推导过程见附录3。

表 4.1 四棱柱色散型幻日

光路编号	A1: 色散型幻日	A2: 色散型幻日
计算公式	$\delta = 2\arcsin(n\sin(\pi/4))-\pi/2$	$\delta = 3\pi/2 - 2\arcsin(n\sin(\pi/4))$
冰晶	46°	134°
水	50°	130°

表 4.2 四棱柱普通色散

光路编号	A3: 色散	A4: 色散
计算公式	$\delta = \pi/2-\theta + \arcsin(n\sin(\pi/2-\arcsin(\sin\theta/n)))$	$\delta = \pi/2 + \theta - \arcsin(n\sin(\pi/2 - \arcsin(\sin\theta/n)))$

表 4.3 四棱柱无色散光路

光路编号	B1: 蓝斑 (平行光)	B2: 180度 定点型幻日 (平行光)	B3: 0度定 点型幻日 (平行光)	B4: 平行 光
计算公式	$\delta = 2\theta$ $\delta = 2\arcsin(n\sin(\pi/2 - \arcsin(1/n)))$ (蓝斑角)	180°	0°	$\delta = \pi-2\theta$
冰晶	118°	180°	0°	
水	123°	180°	0°	

表 4.4 四棱柱幻日与蓝斑

	定位型 幻日	色散型 幻日	蓝斑	色散型 幻日	定位型 幻日	色散型 幻日	蓝斑	色散型 幻日
冰晶	0°	46°	118°	134°	180°	226°	242°	314°
水	0°	50°	123°	130°	180°	230°	237°	310°

理论结果见图4.8。图中曲线表示不同折射率下各个特征现象的理论值。

4.2 实验

1、实验装置

如图4.5。360°分度的蛋糕桶，机械转盘，玻璃比色皿（四棱柱），LED手电筒，遮光筒（开孔），激光笔，支架，手机（拍摄），广角照相机。

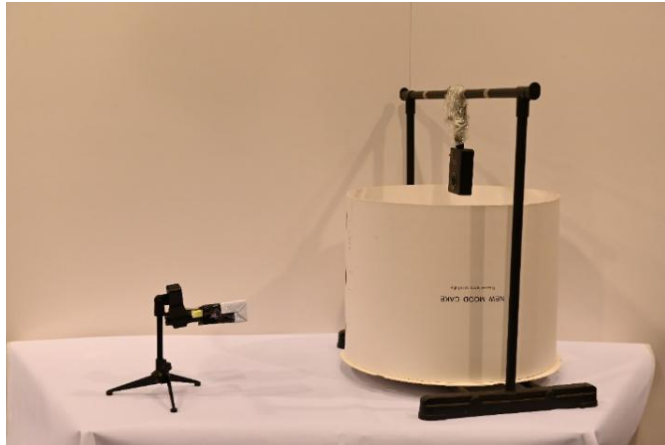


图 4.5 实验装置图

2、实验过程

(1) 将转盘放置在蛋糕桶中心位置，将四棱柱竖直安装在转盘的中心，平行光（白光或激光）从蛋糕桶 180° 位置射入，经过四棱柱中心点射到蛋糕桶 0° 位置。

(2) 快速旋转转盘，模拟自然界产生幻日过程的真实场景，即利用旋转的四棱柱模拟侧面法线指向不同方向的冰晶，所有出射光的叠加模拟太阳光经过无数 c 轴垂直的冰晶产生的光线的效果，以此模拟出幻日和幻日环现象。

(3) 拍摄、记录蛋糕桶壁上的动态图像。

(4) 低速旋转转盘，辨认每一条光路，用于验证理论计算中所获取到的各个出射光是否存在，光线运动模式和走向是否和理论计算一致，进一步证实理论结果的合理性，记录蛋糕桶壁上的静态图像。

(5) 重复步骤 (2) 和 (3)，使用广角照相机记录下蛋糕筒壁上 360° 图像。

操作方式如下图，一人旋转转盘，一人拍摄和记录，旋转过程中保证四棱镜始终在中心位置。

高速旋转状态下的效果图如下图：

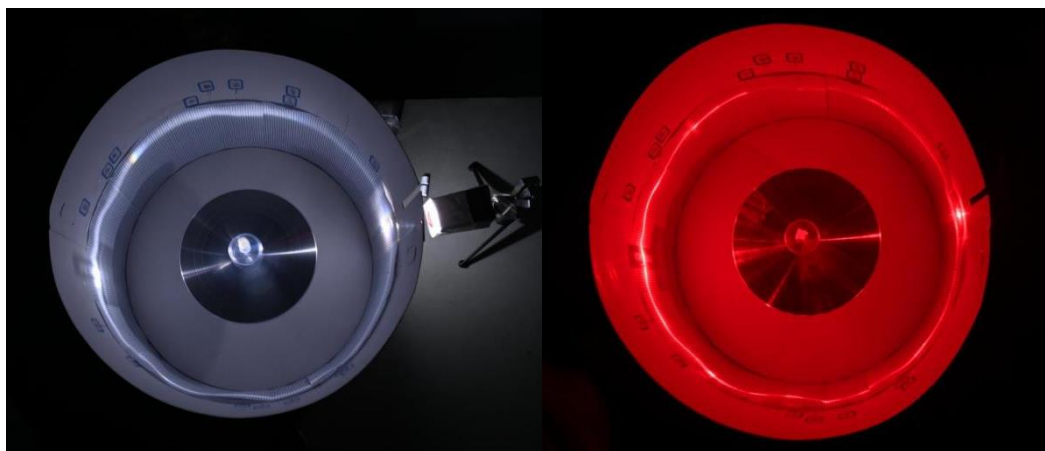


图 4.6 四棱柱幻日环（白光）

图 4.7 四棱柱幻日环（激光）

3. 实验结果与分析

实验结果如下，旋转过程中在蛋糕筒壁上形成了完整的白色光圈，即幻日环。在 50° 和 310° 度位置产生明显色散光斑， 130° 和 230° 处色散光斑不明显，但经过仔细辨认也可发现光斑， 123° 和 237° 蓝斑位置上有较为明显的蓝色。实验数据与理论对比见表 4.5 和图 4.9。

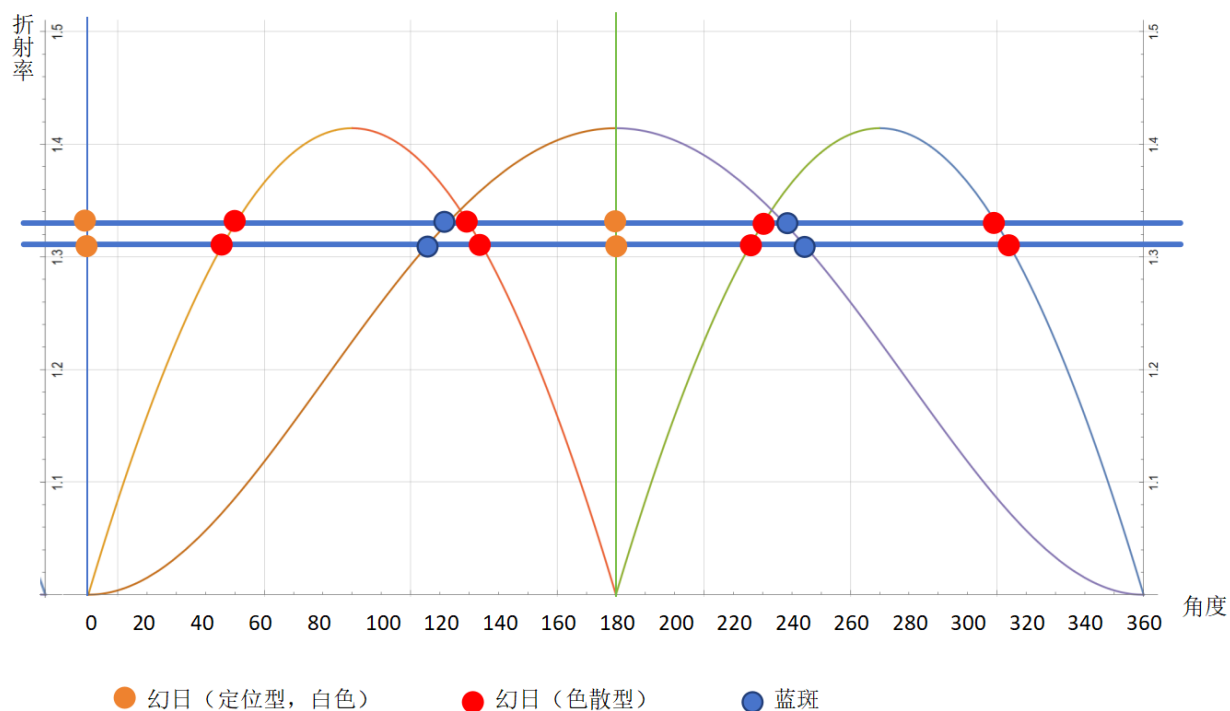


图 4.8 四棱柱幻日环现象理论图

表 4.5 理论实验对照

	定位型 幻日	色散型 幻日	蓝斑	色散型 幻日	定位型 幻日	色散型 幻日	蓝斑	色散型 幻日
冰晶	0°	46°	118°	134°	180°	226°	242°	314°
水	0°	50°	123°	130°	180°	230°	237°	310°
水实验数据	0°	50°	124°	131°	180°	230°	238°	311°
误差	$<2^\circ$	$<2^\circ$	$<2^\circ$	$<2^\circ$	$<2^\circ$	$<2^\circ$	$<2^\circ$	$<2^\circ$

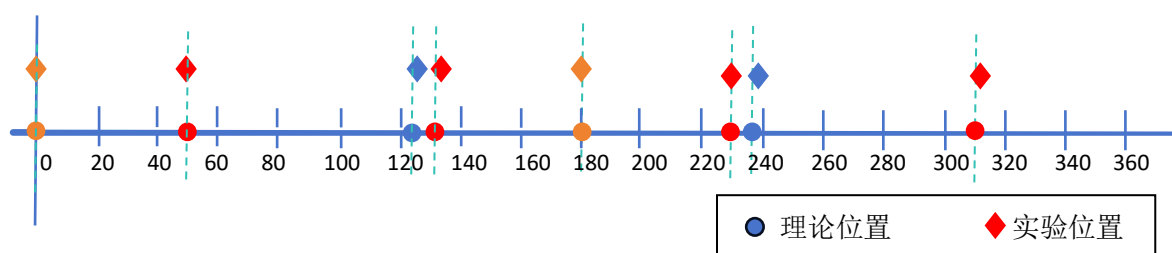


图 4.9 理论实验对照图

4. 结论

实验验证了理论光路，明确了色散型幻日、定位型幻日以及幻日环的成因，实验结果完全符合理论计算。高速旋转实验则模拟了幻日和幻日环实际效果，跟现实情况也是一致的。

第五章 总结与展望

5.1 幻日现象小结

根据第二章六棱柱冰晶的计算和实验结果，容易被观察到的幻日现象为 22° 、 120° 、 144° 、 216° 、 240° 、 338° 六个幻日；根据第四章的计算和实验结果， 46° 、 180° 、 314° 三个幻日是明显存在的，此外 0° 位置的幻日因为与光照位置重合，不容易辨认，据此分析，在自然条件非常优越的情况下，天空中最有可能观测到的幻日如表 5.1 所示：

表 5.1 理论上最有可能被观测到的幻日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0°	22°	46°	120°	144°	180°	216°	240°	314°	338°

第二章中可被观测到的蓝斑为 152° 、 208° ，第四章中可观测蓝斑为 118° 、 242° ，此蓝斑对冰晶形状和入射角度要求高，较难以产生，但是理论上当自然条件符合要求时，可以产生。

表 5.2 理论上最有可能被观测到的蓝斑

1	2	3	4
118°	152°	208°	242°

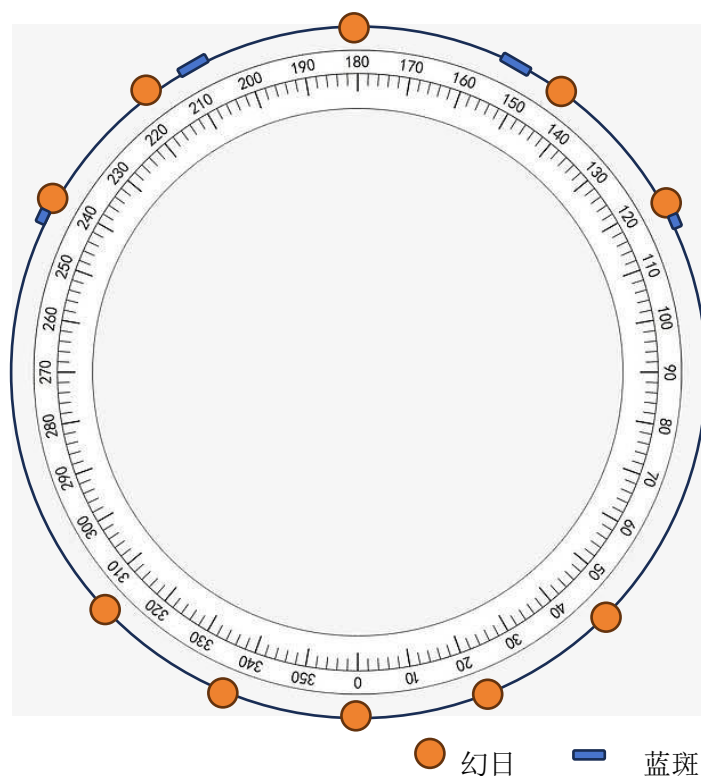


图 5.1 理论可观测幻日和蓝斑——十个太阳的传说

通常幻日有 3—5 个，有时更多，具体情况受到天气，云层分布等多种因素影响，上图为本文得到的天空中最高有可能被观测到的幻日和蓝斑，如果这些幻日同时出现，此现象是否即为传说中的“十个太阳同时悬空”的奇幻景象？

5.2 弧与圆晕小结

将第三章中所有的弧与圆晕，包括 22° 晕、 46° 晕、上下切弧、Parry 弧、环天顶弧，取冰晶的折射率 $n = 1.31$ ，太阳仰角为 23° 的情况进行模拟，得到如下图 5.2:

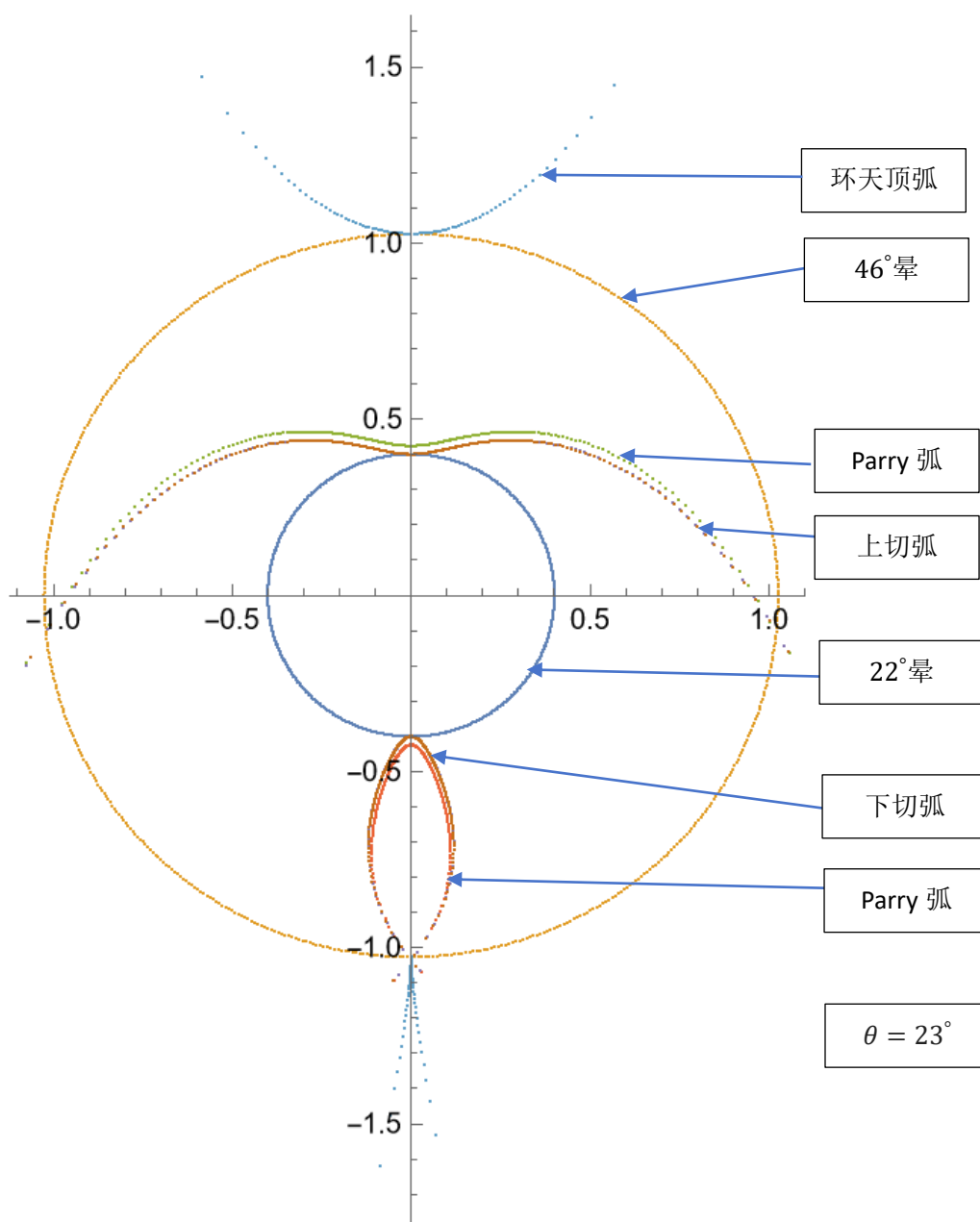


图 5.2 冰晕模拟图

冰晕模拟图中存在的弧与图 1.3 冰晕汇总图也非常吻合。

5.3 总结与展望

本文主要研究了冰晕现象，并且通过实验完成了冰晕的再现。

在幻日与幻日环的研究过程中，利用镜像方法，对幻日环光路进行分类。针对六棱柱和四棱柱图形的特殊性对称性，绘制了“蜂巢”图和“田字”图，实现了对光路的穷举性计算，得到了典型的色散型幻日、定点型幻日和蓝斑的位置，以及其他经冰晶折射出的单调运动的色散光线和平行白光，这些光线共同构成了幻日环。通过镜像方法，不但实现了计算的完备性，排除了不可出射光路的干扰，所以该模型的提出具有一定的创新性和实用性。

在其他冰晕的研究中，采用了矩阵的方式计算三维光路，并绘制出冰晕图形，得到了 22° 晕、上下切弧、Parry 弧、 46° 晕、环天顶弧和环地平弧等。所有理论图像均与实验现象吻合。对比而言，文献⁶中的方法更复杂，效果更逼真。而我们的方法找到了决定光晕轮廓的光线，方法更直接，更能体现冰晕的原理。

在实验装置的设计方面，采用了带刻度的蛋糕筒作为光屏，清晰地观测到了幻日的各种现象；实验上，文献¹³采用两轴电机，完成了 22° 晕、Parry 弧等四个现象的演示，模拟每一种冰晶取向时都要更换电机。我们采用了三轴电机，冰晶（棱镜）样品安装在可拆卸的样品座上，一台装置可以完成所有现象的演示。每一种光晕只需要控制棱镜样品的种类和方向，设置好每台的电机旋转方式即可。我们的日晕仪实现了 22° 晕、上切弧、下切弧与外接晕、Parry 弧、 46° 晕、环天顶弧等现象的演示。该装置直观地在实验室再现冰晕现象，适用于教学和科普展示。

由于时间关系，有些弧还有待进一步的研究，如 Lowitz 弧、反日弧等。在实验装置部分也有需要改进的地方，如稳定性问题、旋转速度问题、承重问题以及如何使装置更精巧，使其能在实验中尽量少遮挡光线，以获得更好的实验观测效果的问题。这些问题都是需要在后面的学习和研究过程中去攻克的问题。

参考文献

- 1, <https://baijiahao.baidu.com/s?id=1756735079351254273&wfr=spider&for=pc>
- 2, http://henan.china.com.cn/tech/2020-11/04/content_41348635.htm
- 3, <https://new.qq.com/rain/a/20230513A03TZN00.html>
- 4, <https://baijiahao.baidu.com/s?id=1680439043316030017>
- 5, atoptics.co.uk/halo/halfeat.htm
- 6, zhuanlan.zhihu.com/p/462717356 现代冰晕研究漫谈(2): 计算机遍历、搜索、优化
- 7, https://www.bilibili.com/video/BV1M7411N7yc/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click
- 8, 赵凯华. 新概念物理教程光学.
- 9, American Journal of Physics 83, 751 (2015); doi: 10.1119/1.4923458
- 10, https://zhuanlan.zhihu.com/p/462935097?utm_id=0
- 11, American Journal of Physics 45, 331 (1977); doi: 10.1119/1.10615
- 12, <http://inews.nmgnews.com.cn/system/2021/01/16/013055062.shtml>
- 13, American Journal of Physics 84, 561 (2016); doi: 10.1119/1.4953342

致谢

这次丘成桐物理竞赛的备赛过程，我们最应该感谢的是，南京大学物理学教授王思慧老师。本次竞赛的准备，时间长，任务多，困难层出不穷，每次当我们遇到困难感觉要进行不下去的时候，都是她鼓励我们，告诉我们科学研究的道路确实不易，但是心里要有信念，困难一定会有解决的方案。确实虽然我们一次次地经历实验器材制作的失败、经历公式推导错误导致绘制不出理论图、经历实验过程中找不到理论上推导出的光路等等的很多困难，但是在王教授的鼓励下我们没有放弃，最终把困难一个个地攻克了，当我们终于将理论跟实验结果进行了完美地比对，成就感和自豪感难以言表。

王教授也是一个严谨又严厉的老师，当我们马虎或者懈怠的时候，她也会对我们“不客气”，“狠狠地”批评我们。当时我们会觉得委屈，但是事后想想，幸亏有王教授的督促，我们才能按时顺利地完成任务。也让我们明白了，科学研究由不得马虎，任何一点小失误，可能就会得不到正确结果，甚至会导致非常严重的后果，科学研究也由不得懈怠，只有持之以恒，才能有所收获。

在这次备赛过程中，我们的物理老师彭双老师是我们的另一位指导老师，帮助我们及时解决问题，使我们能够按时保质保量地完成了研究工作，非常感谢她的指导！

感谢南京大学的贾秋涵、严维林两位学长在数学和计算方面给予的指导。

在这次研究过程中，我们还要感谢两位老师，他们是南京大学物理学教授王骏老师和数学教授吴婷老师，他们两人分别是我们英才计划的指导老师，在丘成桐物理竞赛备赛期间，我们曾请教过两位教授相关的理论知识，得到了他们的耐心指导，让我们对理论知识有了新的理解和感悟！

最后，还要感谢我们的父母，在长达九个多月的备赛过程中，他们提供了全方位的后勤保障和物质支持。更重要的是，当我们在研究过程中遇到困难、挫折、失败时，他们用幽默的语言化解我们低落的情绪，用温暖的陪伴给予我们坚定的精神力量，鼓励我们在科学探索的道路上坚毅前行，他们是最好的父母，是我们最坚实的后盾，永远爱他们！

本文装置“冰晕演示仪”由南京大学物理实验中心作为“创新仪器”收藏。

实验时间和地点

2022年12月20日：本课题小组组队

2023年1月15日：指导老师第一次召集线下学习，本课题正式启动

2023年1月15日-2月5日：指导老师多次召集进行线下线上集中讨论，同时学习背景知识，查阅资料，学习文献

2023年2月5日-4月30日：进行预实验，同时根据预实验结果进行分析，对比文献研究成果，提出具有创新性的镜像模型和矩阵模型，并且开始尝试进行理论推导

2023年4月30日-2023年6月10日：理论推导持续进行，因推导需要，学习了矩阵知识，学习了使用Mathematica等工具进行计算和编程等，同时根据预实验过程中因自行组装的最初两代实验器材相对简单，导致有些实验无法完成的情况，开始自行设计能通用于所有冰晕现象的设备，经过反复的调试和修改，完成三轴可旋转的“冰晕演示仪”

2023年6月10日-2023年7月20日：分别使用“幻日环演示仪”和“冰晕演示仪”进行幻日环和其他冰晕实验，同时与理论计算结果进行比对，修正理论模型，并根据理论模型不断补充实验，记录实验结果并撰写实验报告

2023年7月20日-2023年8月25日：完成幻日环和其他冰晕实验验证，同时撰写论文

2023年8月25号至提交论文前：完成全部研究工作，并对论文进行了整体补充和多次修改。

研究期间在每个环节指导老师都召集我们进行了多轮线下以及线上集中讨论，讨论改进原理机制，修订完善实验验证方案，协调整理理论与实验结果，并将理论和实验结果进行对比总结。

预实验在南京市金陵中学、吴雨晨家和倪健为家完成。幻日环实验在吴雨晨家里完成，其他冰晕实验在倪健为家里完成。幻日环理论推导在吴雨晨家完成，其他冰晕理论推导在倪健为家完成。

参赛队员简历

姓名：倪健为 性别：男

学校：金陵中学中美班 年级：高二

简介：各学科全面发展，热爱物理和音乐。有较强的分析和思考能力，动手能力强，有物理实验的经验。真诚善良，有团队协作精神。

2022年 英才计划成员（物理学科）

2022年 全国青年物理学家竞赛（CYPT）三等奖

2022年 美国学术十项全能竞赛（USAD）区域个人项目奖
经济二等奖、科学铜奖、个人综合三等奖

2021、2020年 “随园杯”（NPHO）南京市初中物理竞赛二等奖

2021年 希望之星英语风采大赛江苏省一等奖

2023年 留声机国际音乐比赛小提琴组最佳潜质奖

姓名：吴雨晨 性别：女

学校：金陵中学中美班 年级：高二

简介：各学科成绩优秀，高一校内成绩全 A，热爱物理和数学，具有勇于探索的科学研究精神和锲而不舍的坚毅品质，有物理实验的经验，有团队协作精神。

2022年 英才计划成员（数学学科）

2023年 欧几里得数学竞赛 Distinction（前 25%）

2023年 杜克数学竞赛（DMMC）Distinction（Top10%-30%）

2022年 AMC12 入围全球 5%，晋级 ARMY；AMC10 入围全球 5%，晋级 ARMY

2022年 UKMT 数学竞赛 金奖

2021年 “随园杯”（NPHO）南京市初中物理竞赛二等奖

附录

附录 1 MATHEMATICA 程序及解释

MATHEMATICA 将出射光矢量转化为图像的方法:

设定两个三维坐标系, 坐标系一有基向量 $\hat{i} = (1,0,0)$ $\hat{j} = (0,1,0)$ $\hat{k} = (0,0,1)$; 坐标系二有基向量

$$\hat{i}' = (-\cos\theta, 0, \sin\theta) \quad \hat{j}' = (0, 1, 0) \quad \hat{k}' = (-\sin\theta, 0, -\cos\theta)$$

将坐标系一中的矢量转化为坐标系二中的矢量需要乘矩阵

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

将出射光乘该矩阵的逆矩阵即得在以入射光为 x 轴的三维直角坐标系中出射光的表示。设该出射光矢量为 (x,y,z) , 其 y/x 值与 z/x 值即分别为二维图像中的 x 值与 y 值。

22 度晕程序

```
n0=1.31;
θ=Pi/2;
A={-Cos[θ],θ,-Sin[θ]};
B={Cos[t],Sin[t],θ};
ne=Sqrt[n0^2-(Cos[θ])^2*(Cos[t])^2]/Sqrt[1-(Cos[θ])^2*(Cos[t])^2];
AT=Transpose[A];
De=2*ArcSin[ne*SIN[Pi/6]]-Pi/3;
R1={{(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*COS[De],Cos[t]*Sin[t]*(1-
Cos[De]),Sin[t]*Sin[De]},{Cos[t]*Sin[t]*(1-
Cos[De]),(Sin[t])^2+(Cos[t])^2 COS[De],-Cos[t]*Sin[De]},{-
Sin[t]*Sin[De],Cos[t]*Sin[De],Cos[De]}}.AT;
R2={{(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*COS[De],Cos[t]*Sin[t]*(1-COS[De]),-
Sin[t]*Sin[De]},{Cos[t]*Sin[t]*(1-COS[De]),(Sin[t])^2+(Cos[t])^2
Cos[De],Cos[t]*Sin[De]},{Sin[t]*Sin[De],-Cos[t]*Sin[De],Cos[De]}}.AT;
IR1={{-Cos[θ],θ,-Sin[θ]},{θ,1,θ},{Sin[θ],θ,-Cos[θ]}}.R1
IR2={{-Cos[θ],θ,-Sin[θ]},{θ,1,θ},{Sin[θ],θ,-Cos[θ]}}.R2
data=Table[{IR1[[2]]/IR1[[1]],IR1[[3]]/IR1[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
ListPlot[data,AspectRatio->Automatic]
```

46 度晕程序

```
n0=1.31;
```

```

θ = Pi/2;
A = {-Cos[θ], 0, -Sin[θ]};
B = {Cos[t], Sin[t], 0};
ne = Sqrt[n0^2 - (Cos[θ])^2*(Cos[t])^2]/Sqrt[1 - (Cos[θ])^2*(Cos[t])^2];
AT = Transpose[A];
De = 2*ArcSin[ne*Sin[Pi/4]] - Pi/2;
R1 = ({(Cos[t])^2 + (Sin[t])^2*Cos[De], Cos[t]*Sin[t]*(1 -
Cos[De]), Sin[t]*Sin[De]}, {Cos[t]*Sin[t]*(1 -
Cos[De]), (Sin[t])^2 + (Cos[t])^2 Cos[De], -Cos[t]*Sin[De]}, {-
Sin[t]*Sin[De], Cos[t]*Sin[De], Cos[De]}).AT;
R2 = ({(Cos[t])^2 + (Sin[t])^2*Cos[De], Cos[t]*Sin[t]*(1 - Cos[De]), -
Sin[t]*Sin[De]}, {Cos[t]*Sin[t]*(1 - Cos[De]), (Sin[t])^2 + (Cos[t])^2
Cos[De], Cos[t]*Sin[De]}, {Sin[t]*Sin[De], -Cos[t]*Sin[De], Cos[De]}).AT;
IR1 = {{-Cos[θ], 0, -Sin[θ]}, {0, 1, 0}, {Sin[θ], 0, -Cos[θ]}}.R1
IR2 = {{-Cos[θ], 0, -Sin[θ]}, {0, 1, 0}, {Sin[θ], 0, -Cos[θ]}}.R2
data = Table[{IR1[[2]]/IR1[[1]], IR1[[3]]/IR1[[1]]}, {t, 0.00001, 2
Pi, 0.01}];

ListPlot[data, AspectRatio -> Automatic]

```

上下切弧程序

```

n0 = 1.31;
θ = Pi/36;
A = {-Cos[θ], 0, -Sin[θ]};
B = {Cos[t], Sin[t], 0};
ne = Sqrt[n0^2 - (Cos[θ])^2*(Cos[t])^2]/Sqrt[1 - (Cos[θ])^2*(Cos[t])^2];
AT = Transpose[A];
De = 2*ArcSin[ne*Sin[Pi/6]] - Pi/3;
R1 = ({
  {(Cos[t])^2 + (Sin[t])^2*Cos[De], Cos[t]*Sin[t]*(1 - Cos[De]),
Sin[t]*Sin[De]},
  {Cos[t]*Sin[t]*(1 - Cos[De]), (Sin[t])^2 + (Cos[t])^2 Cos[De], -
Cos[t]*Sin[De]},
  {-Sin[t]*Sin[De], Cos[t]*Sin[De], Cos[De]}
}).AT;
R2 = ({
  {(Cos[t])^2 + (Sin[t])^2*Cos[De], Cos[t]*Sin[t]*(1 - Cos[De]), -
Sin[t]*Sin[De]},
  {Cos[t]*Sin[t]*(1 - Cos[De]), (Sin[t])^2 + (Cos[t])^2 Cos[De],
Cos[t]*Sin[De]},
  {Sin[t]*Sin[De], -Cos[t]*Sin[De], Cos[De]}
}).AT;
IR1 = {{-Cos[θ], 0, -Sin[θ]}, {0, 1, 0}, {Sin[θ], 0, -Cos[θ]}}.R1
IR2 = {{-Cos[θ], 0, -Sin[θ]}, {0, 1, 0}, {Sin[θ], 0, -Cos[θ]}}.R2

```

```

data2=Table[{0.` +0.3720046084734303` Cos[t]/0.9282308825257485`,0.` -
0.3720046084734303` Sin[t]/0.9282308825257485`},
  {t,0.001,2 Pi,0.01}];
data1=Table[{IR1[[2]]/IR1[[1]],IR1[[3]]/IR1[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
data2=Table[{IR2[[2]]/IR2[[1]],IR2[[3]]/IR2[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
ListPlot[{data22,data1,data2},AspectRatio->Automatic]

```

Parry 弧程序

```

n0=1.31;
θ =Pi/36;
A={-Cos[θ ],θ ,-Sin[θ ]};
B={Cos[t],Sin[t],0};
ne=Sqrt[n0^2-(Cos[θ ])^2*(Cos[t])^2]/Sqrt[1-(Cos[θ ])^2*(Cos[t])^2];
AT=Transpose[A];
De1=Pi/3-ArcCos[(-Sin[θ ])/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]-
ArcSin[ne*Ssin[Pi/3-ArcSin[Sin[ArcCos[(-
Sin[θ ])/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]]/ne]]];
De2=- (ArcCos[((Sqrt[3]/2)(Cos[θ ]Sin[t])-
Sin[θ ]/2)/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]+ArcSin[ne*Ssin[Pi/3-
ArcSin[Sin[ArcCos[((Sqrt[3]/2)(Cos[θ ]Sin[t])-
Sin[θ ]/2)/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]]/ne]]]-Pi/3);
De3=ArcCos[((Sqrt[3]/2)(Cos[θ ]Sin[t])-
Sin[θ ]/2)/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]+ArcSin[ne*Ssin[Pi/3-
ArcSin[Sin[ArcCos[((Sqrt[3]/2)(Cos[θ ]Sin[t])-
Sin[θ ]/2)/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]]/ne]]]-Pi/3;
De4=ArcCos[((Sqrt[3]/2)(Cos[θ ]Sin[t])+Sin[θ ]/2)/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]+ArcSin[ne*Ssin[Pi/3-
ArcSin[Sin[ArcCos[((Sqrt[3]/2)(Cos[θ ]Sin[t])+Sin[θ ]/2)/Sqrt[Sin[θ ]^2+(Cos[θ ]^2Sin[t]^2)]]]/ne]]]-Pi/3;
R1=({
  {(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*Cos[De1], Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De1]),
Sin[t]*Sin[De1]},
  {Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De1]), (Sin[t])^2+(Cos[t])^2Cos[De1], -
Cos[t]*Sin[De1]},
  {-Sin[t]*Sin[De1], Cos[t]*Sin[De1], Cos[De1]}
}).AT;

R2=({
  {(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*Cos[De2], Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De2]),
Sin[t]*Sin[De2]},
  {Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De2]), (Sin[t])^2+(Cos[t])^2Cos[De2], -
Cos[t]*Sin[De2]},

```



```

        {-Sin[t]*Sin[De2], Cos[t]*Sin[De2], Cos[De2]}
    }).AT;
R3={
    {(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*Cos[De3], Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De3]),
Sin[t]*Sin[De3]},
    {Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De3]), (Sin[t])^2+(Cos[t])^2Cos[De3], -
Cos[t]*Sin[De3]},
    {-Sin[t]*Sin[De3], Cos[t]*Sin[De3], Cos[De3]}
    }).AT;

R4={
    {(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*Cos[De4], Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De4]),
Sin[t]*Sin[De4]},
    {Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De4]), (Sin[t])^2+(Cos[t])^2Cos[De4], -
Cos[t]*Sin[De4]},
    {-Sin[t]*Sin[De4], Cos[t]*Sin[De4], Cos[De4]}
    }).AT;

IR1={{-Cos[θ],0,-Sin[θ]},{0,1,0},{Sin[θ],0,-Cos[θ]}}.R1;
IR2={{-Cos[θ],0,-Sin[θ]},{0,1,0},{Sin[θ],0,-Cos[θ]}}.R2;
IR3={{-Cos[θ],0,-Sin[θ]},{0,1,0},{Sin[θ],0,-Cos[θ]}}.R3;
IR4={{-Cos[θ],0,-Sin[θ]},{0,1,0},{Sin[θ],0,-Cos[θ]}}.R4;
data1=Table[{IR1[[2]]/IR1[[1]],IR1[[3]]/IR1[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
data2=Table[{IR2[[2]]/IR2[[1]],IR2[[3]]/IR2[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
data3=Table[{IR3[[2]]/IR3[[1]],IR3[[3]]/IR3[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
data4=Table[{IR4[[2]]/IR4[[1]],IR4[[3]]/IR4[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
data=Table[{0.`+0.3720046084734303` Cos[t]/0.9282308825257485`,0.`-
0.3720046084734303` Sin[t]/0.9282308825257485`},{t,0.001,2 Pi,0.01}];
ListPlot[{data,data1},AspectRatio->Automatic]
ListPlot[{data,data2},AspectRatio->Automatic]
ListPlot[{data,data3},AspectRatio->Automatic]
ListPlot[{data,data4},AspectRatio->Automatic]
ListPlot[{data,data1,data2,data3,data4},AspectRatio->Automatic]
ListPlot[{data,data2,data3},AspectRatio->Automatic]

```

环天顶弧程序

```

n0=1.31;
θ=Pi/36;
A={-Cos[θ],0,-Sin[θ]};
B={Cos[t],Sin[t],0};

```

```

ne=Sqrt[n0^2-(Cos[θ])^2*(Cos[t])^2]/Sqrt[1-(Cos[θ])^2*(Cos[t])^2];
AT=Transpose[A];
De1=ArcCos[Cos[θ]*Sin[t]/Sqrt[Cos[θ]^2*Sin[t]^2+Sin[θ]^2]]+ArcSin[Sqr
t[ne^2-
Sin[ArcCos[Cos[θ]*Sin[t]/Sqrt[Cos[θ]^2*Sin[t]^2+Sin[θ]^2]]^2]]-
Pi/2; (*此处所用侧面向量 (-1, 0) *)
De2=-
(ArcCos[Sin[θ]/Sqrt[Cos[θ]^2*Sin[t]^2+Sin[θ]^2]]+ArcSin[Sqrt[ne^2-
Sin[ArcCos[Sin[θ]/Sqrt[Cos[θ]^2*Sin[t]^2+Sin[θ]^2]]^2]]-Pi/2);(*此处
所用侧面向量 (0, 1)
*)
R1={
  {(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*Cos[De1], Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De1]),
Sin[t]*Sin[De1]},
  {Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De1]), (Sin[t])^2+(Cos[t])^2Cos[De1], -
Cos[t]*Sin[De1]},
  {-Sin[t]*Sin[De1], Cos[t]*Sin[De1], Cos[De1]}
}.AT;

R2={
  {(Cos[t])^2+(Sin[t])^2*Cos[De2], Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De2]),
Sin[t]*Sin[De2]},
  {Cos[t]*Sin[t]*(1-Cos[De2]), (Sin[t])^2+(Cos[t])^2Cos[De2], -
Cos[t]*Sin[De2]},
  {-Sin[t]*Sin[De2], Cos[t]*Sin[De2], Cos[De2]}
}.AT;
IR1={{-Cos[θ],0,-Sin[θ]},{0,1,0},{Sin[θ],0,-Cos[θ]}}.R1
IR2={{-Cos[θ],0,-Sin[θ]},{0,1,0},{Sin[θ],0,-Cos[θ]}}.R2

data46=Table[{0.` +0.7161000000000001` Cos[t]/0.6979977005692783`,0.` -
0.7161000000000001` Sin[t]/0.6979977005692783`},{t,0.001,2 Pi,0.01}];
data1=Table[{IR1[[2]]/IR1[[1]],IR1[[3]]/IR1[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
data2=Table[{IR2[[2]]/IR2[[1]],IR2[[3]]/IR2[[1]]},{t,0.00001,2
Pi,0.01}];
ListPlot[{data46,data1},AspectRatio->Automatic]
ListPlot[{data46,data2},AspectRatio->Automatic]

```

附录 2 不可能产生的光路（第二章补充）

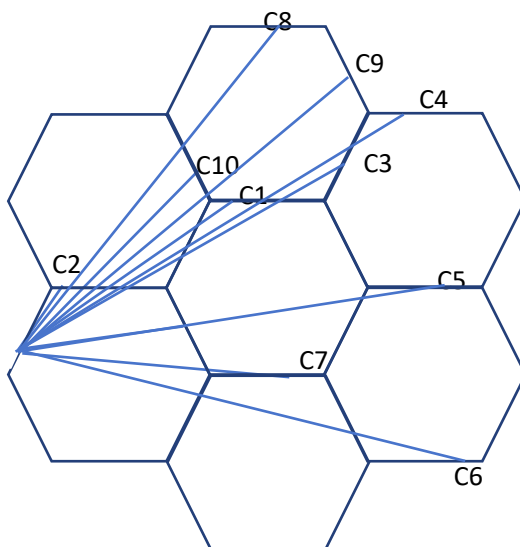


图 1 蜂巢图中不可出射光线

C1: 1-2-3-4 线，首先排除在任何角度上，1.3-1.55 的折射率下，在出射面都会产生全反射而使得光线不能出射的情况，计算如下：

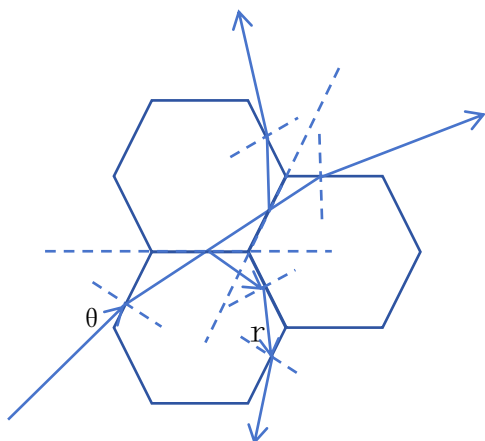


图 2 1-2-3-4 光路图

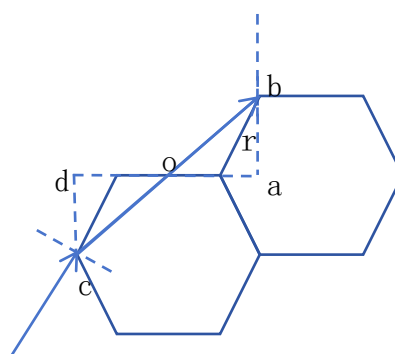


图 3 最小角度

当 $nsinr=1$ 时，发生全反射， $r = \arcsin(\frac{1}{n})$ ，冰晶 $n = 1.31$ ， $r = 49.76^\circ$ ，水 $n = 1.33$ ， $r = 48.75^\circ$ ，玻璃 $n = 1.52$ ， $r = 41.14^\circ$ ，光线 C1 在出射面上，最小角度为如下图的极限情况。

$$r = \arcsin\left(\frac{oa}{ob}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) = 49.73^\circ$$

所以在光学仪器玻璃六棱柱中 C1 光线在图中出射面发生全反射，光线不能射出，在冰晶中基本也不能射出，这条光线不考虑。

C2: 1-2 线

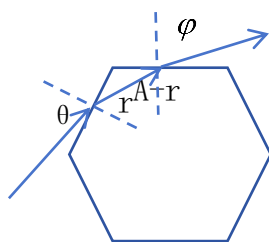


图 4 1-2 光路图

当 $\theta = 90^\circ$ 时, r 最大, $r = \arcsin(\frac{1}{n})$, 冰晶 $n = 1.31$, $r = 49.76^\circ$, 水 $n = 1.33$, $r = 48.75^\circ$, 玻璃 $n = 1.52$, $r = 41.14^\circ$, 在冰晶中, $A-r = 120^\circ - 49.76^\circ = 70.24^\circ > 49.76^\circ$, 全反射, 无出射光线。在水中, $A-r = 120^\circ - 48.75^\circ = 71.25^\circ > 49.76^\circ$, 全反射, 无出射光线。玻璃中, $A-r = 120^\circ - 41.14^\circ = 78.86^\circ > 41.14^\circ$, 同样全反射, 无出射光线。

C3:1-2-3-4-5

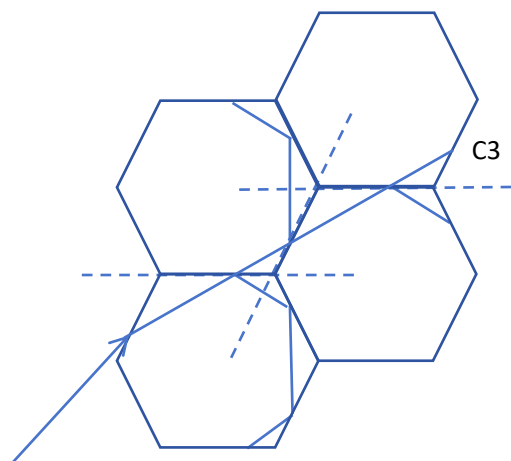


图 5 1-2-3-4-5 光路图

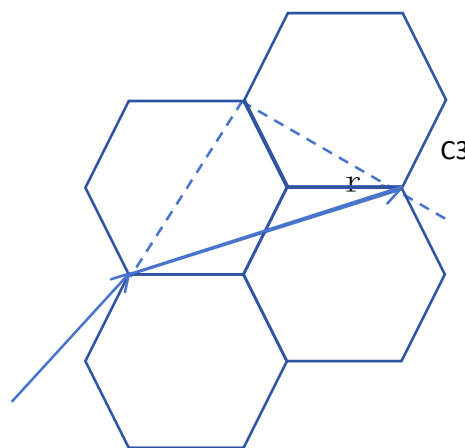


图 6 最小角度

C3 线路极限情况下如图, 此时 r 最小, $r = \arcsin(2/\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2}) = 49.11^\circ$, 冰晶 $n = 1.31$, $r = 49.76^\circ$, 水 $n = 1.33$, $r = 48.75^\circ$, 玻璃 $n = 1.52$, $r = 41.14^\circ$, 水和玻璃中全反射, 冰晶中有及其微小的角度下有光线射出, 为平行白光。

C4: 1-2-3-4-5-6

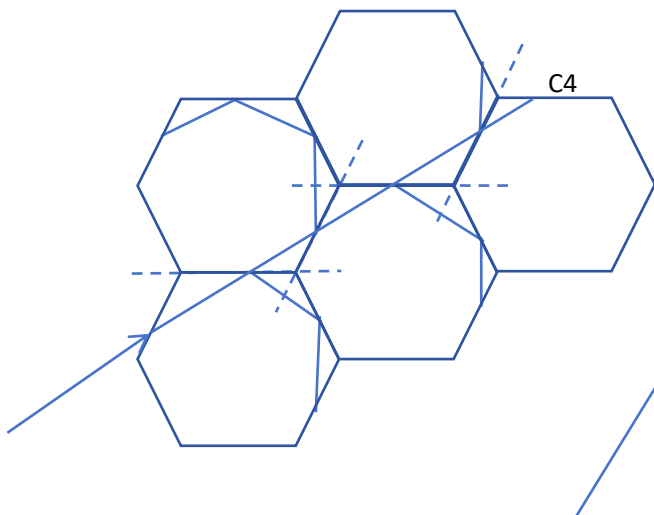


图 7 1-2-3-4-5-6 光路图

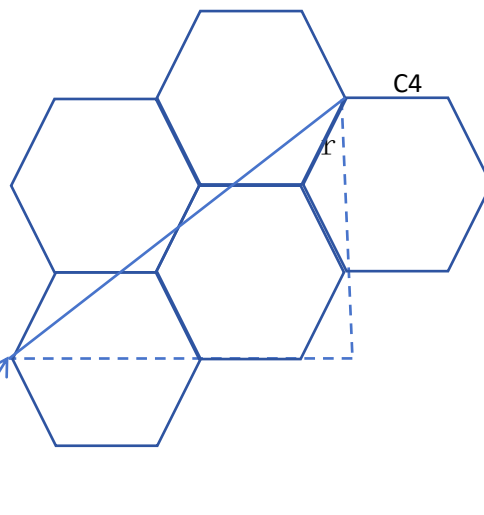


图 8 最小角度

C4 线路极限情况下如图，此时r最小， $r = \arcsin(\frac{7/2}{\sqrt{(7/2)^2 + (3\sqrt{3}/2)^2}})$

$= 53.41^\circ$ ，全反射。

C5: 1-3-5-6

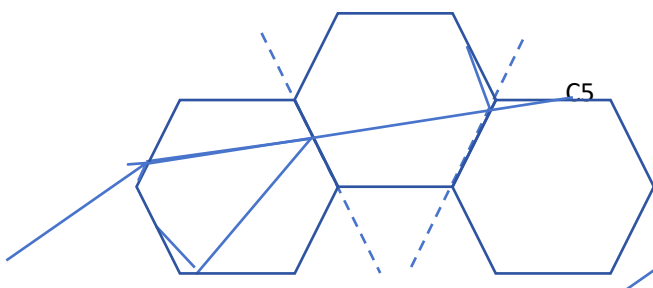


图 9 1-3-5-6 光路图

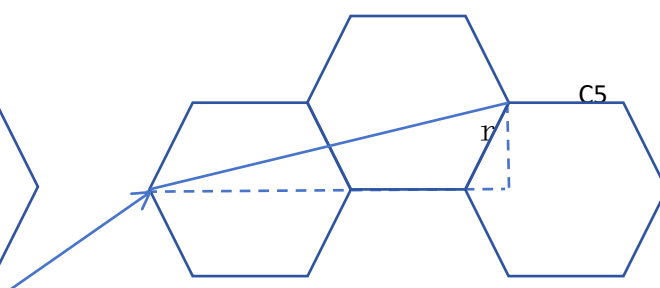


图 10 最小角度

C5 线路极限情况下如图，此时r最小， $r = \arcsin(\frac{7/2}{\sqrt{(7/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}})$

$= 76.10^\circ$ ，全反射。

C6: 1-4-2-1

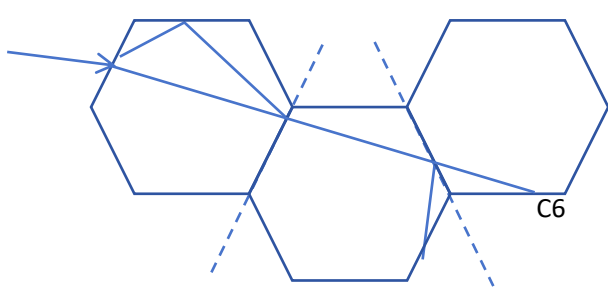


图 11 1-4-2-1 光路图

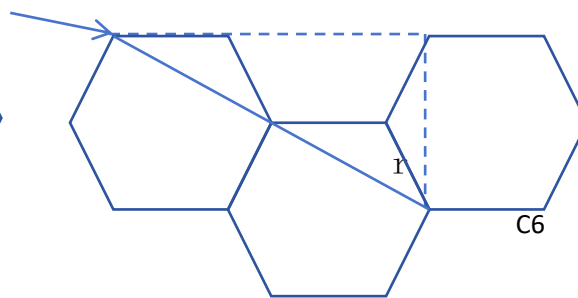


图 12 最小角度

C6 线路极限情况下如图，此时 r 最小， $r = \arcsin(3/\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}) = 60^\circ$ ，全反射。

C7: 1-3-4

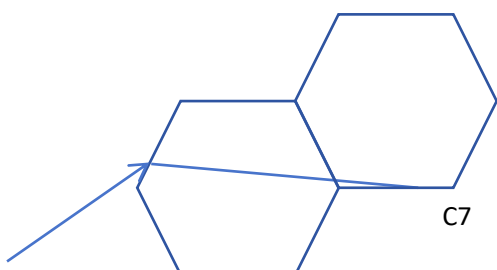


图 13 1-3-4 光路图

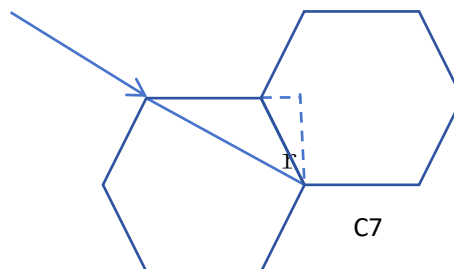


图 14 最小角度

C7 线路极限情况下如图，此时 r 最小， $r = \arcsin((3/2)/\sqrt{(3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}) = 60^\circ$ ，全反射。

C8: 1-2-4-6

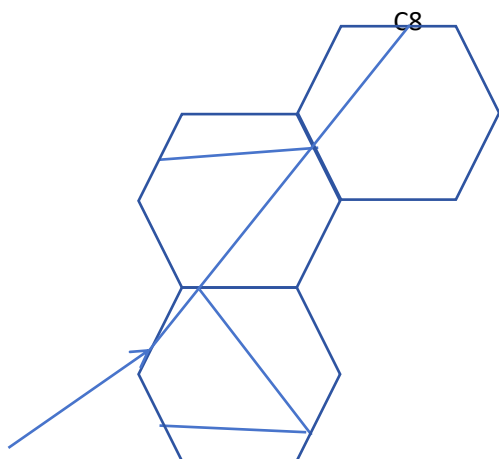


图 15 1-2-4-6 光路图

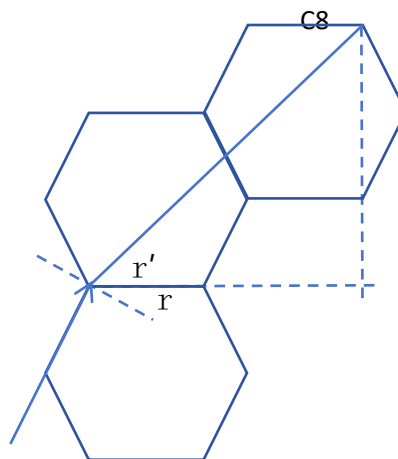


图 16 最小角度

C8 线路， r 的极大值为 $r = \arcsin(1/n) = 49.76^\circ$ （冰晶），极限情况如上图， $r' = \arcsin((3 \cdot (3)^{0.5}/2)/\sqrt{(3 \cdot (3)^{0.5}/2)^2 + (5/2)^2}) = 46.10^\circ$ ，所以 $r' + \pi/6 > r$ ，C8 这条线路并不存在。

C9:1-2-4-1

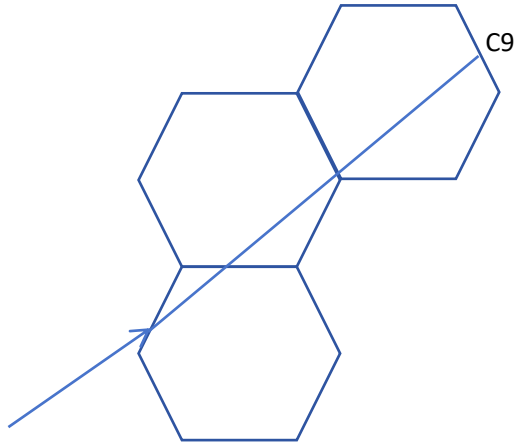


图 17 1-2-4-1 光路图

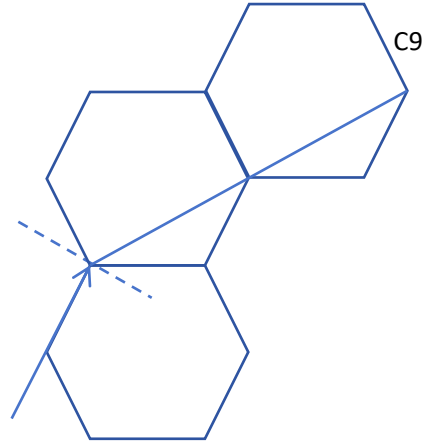


图 18 最小角度

C9 线路与 C8 相似， $r = 49.76^\circ < \pi/6 + \pi/6 = 60^\circ$ ，所以这个线路不存在。

C10:1-2-4

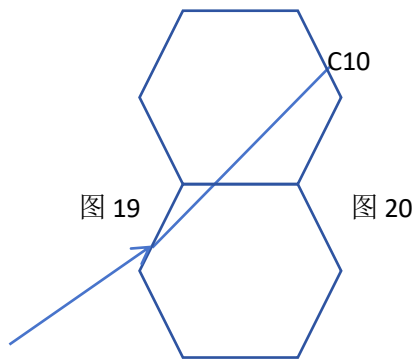


图 19

图 20

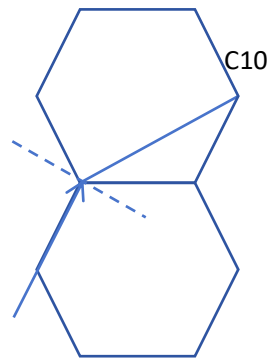


图 19 1-2-4-1 光路图

图 20 最小角度

C10 与 C9 一样， $r = 49.76^\circ < \pi/6 + \pi/6 = 60^\circ$ ，所以这个线路不存在。

附录3 四棱柱幻日环推导（第四章补充）

(1) A1 线：46°色散型幻日

将 $A' = 90^\circ$ ，冰晶 $n = 1.31$ ，代入最小偏向角公式

$$\delta_0 = 2 \arcsin(n \sin \frac{A'}{2}) - A' \quad (1)$$

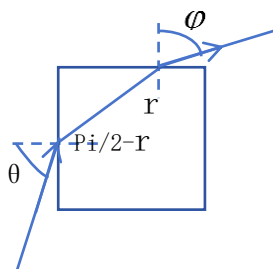


图1 46° 色散型幻日

得到 $\delta = 45.74^\circ \approx 46^\circ$ ，此为 46° 晕的成因。因此存在 46° 幻日。对于水，代入 $n=1.33$ ，得 $\delta = 50.26^\circ \approx 50^\circ$ 。此时 $\theta = \varphi = \arcsin\left(\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) * 1.31\right) = 67.87^\circ$ （冰晶）， $\theta = 70.13^\circ$ （水）。

在六棱柱冰晶中，此光路也易得，见图 4.6:

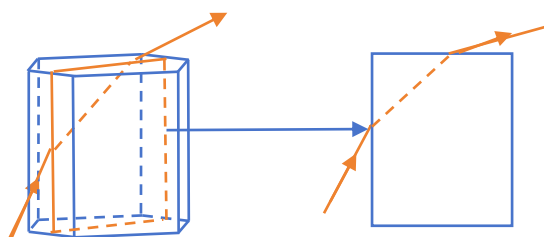


图2 六棱柱中 46° 色散型幻日

(2) A2 线：130°色散型幻日

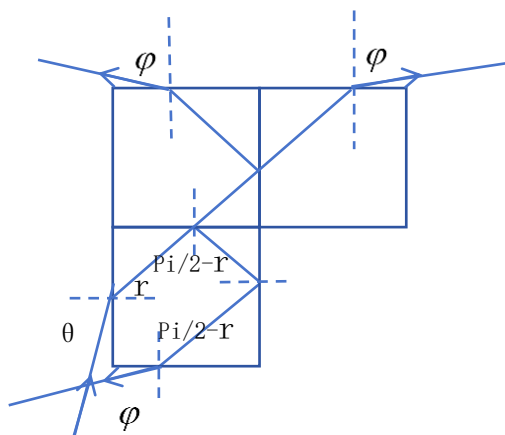


图3 色散型幻日

非平行面射出，偏向角为

$$\delta = \pi - (\pi/2 - (\pi - (\theta + \varphi))) = 3\pi/2 - \theta - \varphi \quad (2)$$

当 $\theta = \varphi$ 时，有最小偏向角，故冰晶 $\delta = 3\pi/2 - 67.87^\circ - 67.87^\circ = 134.26^\circ \approx 134^\circ$ ，水 $\delta = 3\pi/2 - 70.13^\circ - 70.13^\circ = 129.74^\circ \approx 130^\circ$ ，为色散型幻日。

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生。

(3) A3 线：普通色散光线

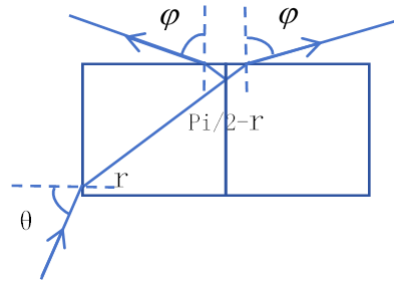


图4 色散光线 1

非平行面射出

$$r = \arcsin(\sin \theta / n) \quad (3)$$

$$\varphi = \arcsin(n \sin(\pi/2 - r)) = \arcsin(n \sin(\pi/2 - \arcsin(\sin \theta / n))) \quad (4)$$

$$\delta = \pi - (\pi/2 - \varphi + \theta) = \pi/2 - \theta + \arcsin(n \sin(\pi/2 - \arcsin(\sin \theta / n))) \quad (5)$$

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生。

(4) A4 线：普通色散光线

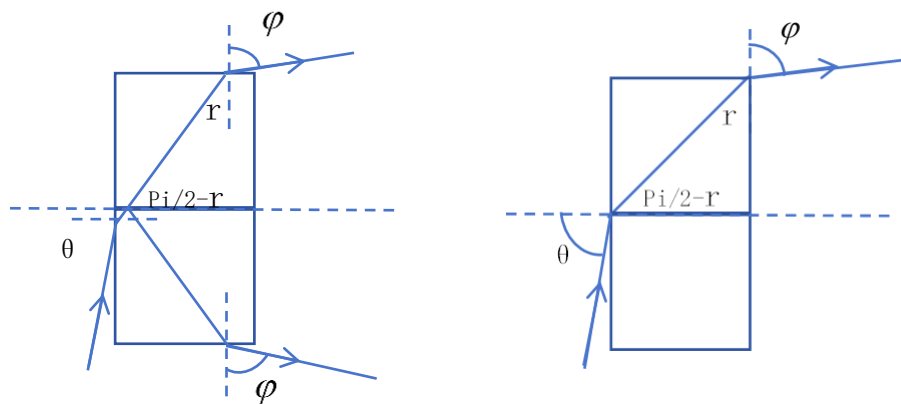


图5 色散光线 2

极限情况下， $r = 45^\circ$

$$\theta = \arcsin(n * \sin(\pi/2 - r)) \quad (6)$$

非平行面射出，在冰晶中 $\theta \geq 67.87^\circ$ ，比色皿中 $\theta \geq 70.13^\circ$ 时有出射光偏向角为：

$$\delta = \pi - (\pi/2 - \theta + \varphi) = \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi \quad (7)$$

由公式（4.1）得

$$r = \pi/2 - \arcsin(\sin(\theta)/n) \quad (8)$$

$$\varphi = \arcsin(n \sin r) = \arcsin(n \sin(\pi/2 - \arcsin(\sin \theta / n))) \quad (9)$$

所以偏向角为：

$$\delta = \pi/2 + \theta - \varphi = \pi/2 + \theta - \arcsin(n \sin(\pi/2 - \arcsin(\sin(\theta)/n))) \quad (10)$$

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生。

（5）B1 线：蓝斑

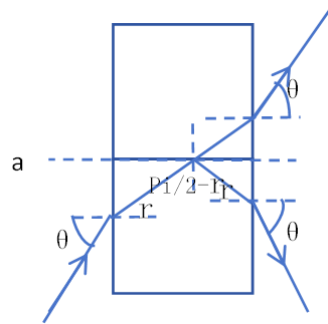


图6 蓝斑光路图

平行面射出，无色散

$$\delta = \pi - (\pi - 2\theta) = 2\theta \quad (11)$$

对于冰晶， $\theta = \arcsin(n \sin(\pi/2 - \arcsin(1/n))) = \arcsin(1.317 * \sin(90^\circ - 49.76^\circ)) = 58.98^\circ$ 时，a 面发生全反射，产生蓝光，所以当偏向角为 $\delta = 2\theta = 117.96 \approx 118$ 时产生蓝斑，对于水， $\theta = \arcsin(1.33 * \sin(\pi/2 - \arcsin(1/1.33))) = 61.27^\circ$ ， $\delta = 2\theta = 122.54 \approx 123^\circ$ 。故

$$\delta = 2 \arcsin(n \sin(\pi/2 - \arcsin(1/n))) \quad (12)$$

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生，同样蓝斑也需要六棱柱切面符合一定的宽高比才能产生。

（6）B2：180°定位型幻日

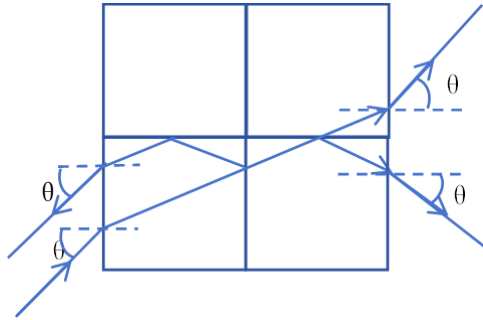


图7 180° 定位型幻日光路图

此光路产生180°定位型幻日。

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生。

(7) B3 线：0°定位型幻日

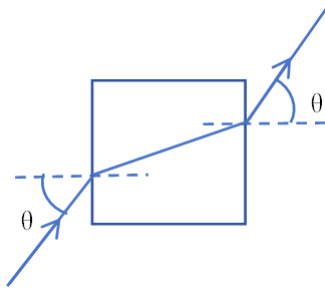


图8 0° 定位型幻日光路图

此光路产生0°定位型幻日。

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生。

(8) B4 线：

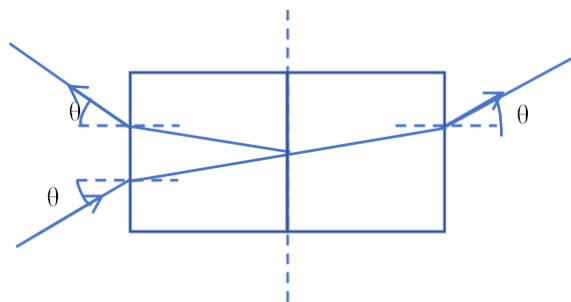


图9 0° 平行光

最小偏向角为：

$$\delta = \pi - 2\theta \quad (13)$$

在六棱柱冰晶中，此光路需要切面符合一定的宽高比才能在特定角度下产生。

综上，在四棱柱冰晶中，可产生如上八条光路，在六棱柱冰晶中，较易产生46°幻日的光路，其他光路对冰晶形状和入射光角度要求较高，较难以发生。

附录 4 上传的实验视频

共上传了 6 个实验视频，每个视频的详细描述如下。

1. 视频 1

22°晕的实验：玻璃六棱柱，转动电机 1，转动电机 2，时间 13s

2. 视频 2

46°晕的实验：装水四棱柱，转动电机 1，转动电机 2，时间 20s

3. 视频 3

切弧的实验：玻璃六棱柱，转动电机 1，转动电机 2，电机 3 调整仰角，时间 23s

4. 视频 4

Parry 弧的实验：玻璃六棱柱，转动电机 2，电机 3 调整仰角，时间 33s

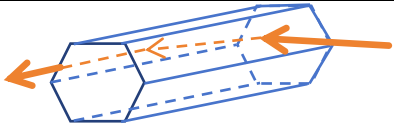
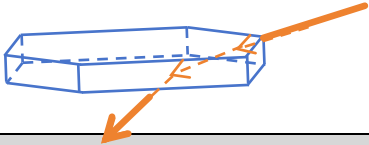
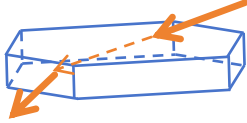
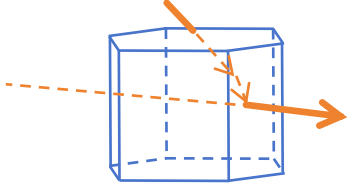
5. 视频 5

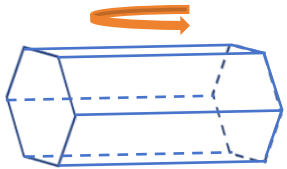
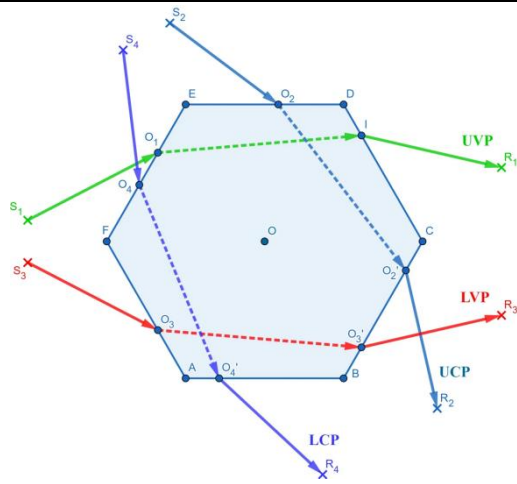
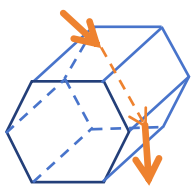
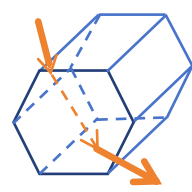
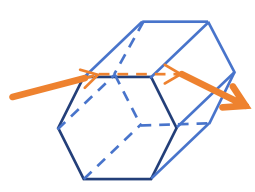
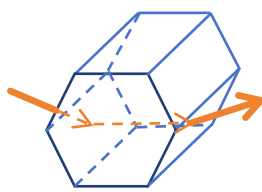
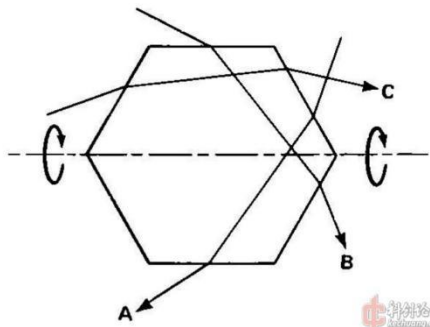
环天顶弧的实验：装水六棱柱，转动电机 3，时间 25s

6. 视频 6

幻日环的实验：玻璃六棱柱，转动转盘，时间 38s

附录 5 各种冰晕的取向、光路图

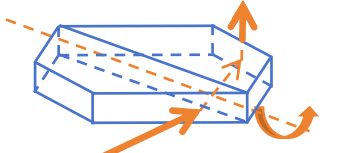
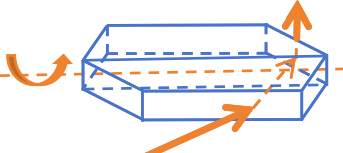
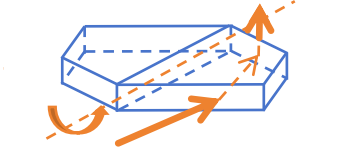
上/下切弧和外接弧	
<p>介绍：因为位于太阳上方而且与 22 度晕相切而得名。上下切弧的形态会随着太阳高度改变而变化，在大阳接近 35 度时，上下切弧会逐渐连接起来，而后成环。这个时候，切弧变成了外接晕。但是实际上由于不少冰晶取向很差，即使太阳角度很高，切弧也无法成环。</p>	
冰晶形态：Column 柱状冰晶	冰晶取向：Column 取向
光路图	
环天顶弧/环地平弧	
<p>介绍：由于它们色彩鲜艳引人注目，加上外形特别。前者经常被当成彩虹，后者经常被叫做“火焰彩虹”。环天顶弧和环地平弧可以算是一个东西，不过环天顶弧光路为 1-3，而环地平弧光路为 3-1。这两个弧对太阳高度都是有要求的。例如环天顶弧的光路来说，太阳角度太高，则光线可能无法从冰晶内射出。</p>	
冰晶形态：Plate 片状冰晶	冰晶取向：Plate 取向
光路图——环地平弧	光路图——环天顶弧
	
幻日	
<p>介绍：太阳角度比较低的时候，幻日位于太阳左右两侧 22 度附近。不过当太阳高于 20 度后。幻日就明显和 22 度晕分离；如果太阳角度太高，进入冰晶侧面的光线会太少，而且内反射不是全反射，所以在太阳高度超过 55 度后就见不到幻日了。</p>	
冰晶形态：柱状冰晶	冰晶取向：垂直取向
光路图	
Parry 弧	

<p>介绍：22° Parry 弧分为四种，按其位置和弯曲方向分别称为上凸（upper sunvex）、上凹（upper suncave）、下凸（lower sunvex）、下凹（lower suncave）Parry 弧。这里的“凹凸”是相对太阳而言的，也就是凸向太阳时称作“凸”，凹向太阳时称作“凹”。</p>			
冰晶形态：柱状冰晶		冰晶取向：Parry 取向	
<p>Parry 取向要求六棱柱冰晶的 c 轴保持水平，与 column 取向不同的是，同时还要有一个侧面也保持水平，如下图所示¹。 Parry 弧汇总图如右图所示²</p> 			
光路图——上凹弧	光路图——下凹弧	光路图——上凸弧	光路图——下凸弧
			
Lowitz 弧			
<p>介绍：Lowitz 弧需要晶体的一根轴需要保持水平，同时晶体还要围绕它作往复的剧烈摆动和旋转。</p>			
冰晶形态：Plate 片状冰晶		冰晶取向：Lowitz 取向	
<p>Lowitz 弧的光路（俯视）。A 为上 Lowitz 弧，B 为下 Lowitz 弧，C 为中 Lowitz 弧³。</p>			

¹ <https://www.kechuang.org/t/85403>

² <https://www.kechuang.org/t/85403>

³ <https://www.kechuang.org/t/85403>

上 Lowits 弧	下 Lowits 弧	中 Lowits 弧
		

附录6 冰晕相关词汇表

日晕/Halo
圆虹/Circular halo
大气光学现象/Atmospheric optical phenomenon
卷层云/Cirrus cloud
冰晶/ice crystal
折射/Refraction
反射/Reflection
色散/Dispersion
高云/High cloud
大气晕族 /atmospheric halos
上凸 /upper sunvex
上凹 /upper suncave
下凸 /lower sunvex
下凹 /lower suncave
环天顶弧/Circumzenithal arc
环地平弧/ Circumhorizontal arc
椭圆晕 /elliptical halo
映日 /subsun
Bottlinger 环/Bottlinger's ring
Moilanen 弧/Moilanen arc / M-arc
上侧弧/ Supralateral arc
下侧弧/ infralateral arc
幻日/Parhelia
22 度晕/22-degree halo
空中巴氏线/Airy's spiral
120 度幻日/120-degree parhelion
46 度晕/46-degree
90 度幻日/90-degree parhelion
幻日/parhelion
幻日环/parhelic circle
Parry 弧/parry arc
Lowitz 取向弧/Lowitz orientation arc
顶半晕/Upper tangent arc
底半晕/lower tangent arc
转向晕/Supralateral arc
内晕/nfralateral arc
Tape 弧/ Tape arcs
偕日弧 /helic arc
下日弧/ subhelic arc
反日弧 /anthelic arcs
弥散反日弧 /diffuse anthelic arcs

对日弧 /subanthelic arc / antisolar arc
Liliequist 幻日 /Liliequist parhelia
日柱/ sun pillar
蓝环/蓝斑 /blue circle / blue spot
萨斯卡通晕景 /Saskatoon Display
异径晕 /odd radius halos
异形六棱锥晶 /exotic pyramid
双晶 /twinned crystal
冰晶形态 /Ice crystal morphology
冰晶朝向 /Ice crystal orientation
冰晶取向方向 /Ice crystal orientation direction
水平方向/horizontal direction
垂直方向/vertical direction
水平旋转方向/horizontal rotation direction
垂直旋转方向/vertical rotation direction
侧向偏转方向/lateral deviation direction
前后偏转方向/longitudinal deviation direction
太阳所在的点/ helioc point
反日点/ anthelic point
下日点/ subhelic. point
对日点/ subanthelic point 或 antisolar point
彩色光环/Colorful halo
光点/Light spot
光弧/Light arc
单色光 /Monochromatic light
彩色光 /Polychromatic light
太阳高度角/Solar elevation angle
偏转方向/Deviation direction
平行六面体/Prism
三棱锥/Pyramid
六棱柱/Hexagonal column
交叉柱/Crossed column
针状晶/Needle crystal
板状晶/Plate crystal
螺旋晶/Screw crystal
冰晶晕 /ice halos
斯涅尔定律/Snell's Law
亨利 - 菲涅耳原理/Huygens - Fresnel principle
米氏散射理论/Mie Scattering Theory
最小偏向角公式/Minimum deviation formula
绝对折射率公式/Absolute refractive index formula
相对折射率公式/Relative refractive index formula
临界角公式/Critical angle formula