

参赛队员姓名：周厚希

中学：中国人民大学附属中学

省份：北京市

国家/地区：中国大陆

指导教师姓名：张永平

马宇翰

指导教师单位：中国人民大学附属中学

北京师范大学

论文题目：欧拉磁摆的动力学与反常进
动摇曳

欧拉磁摆的动力学与反常进动摇曳

摘要

本文研究了一种由若干强磁铁构造的欧拉摆在外磁场与重力场中的动力学行为。我们首次报道了这一欧拉磁摆在运动中出现的进动方向交替的现象，我们将此现象称为反常摇曳。首先，我们用分析力学和转动方程分别刻画了理想无阻尼欧拉摆轨迹的动力学与运动的若干特征频率。进一步，在实验中我们对进动频率定量测量，检验了理论模型在无耗散时的正确性。特别地，实验中我们注意到欧拉摆的进动会在一定情况下出现方向的反复，这在一般的椭圆摆体系中并未发现。为解释这一现象，我们在理论上求解了进动角速度与摆角的二维相图，帮助我们确认阻尼带来的能量耗散使得欧拉摆在运动中穿过相图的不同区域从而产生的反常进动摇曳。最后，对反常进动摇曳的频率-时间曲线的定量测量表明，欧拉摆进动角速度的幅值和摇曳的切换频率在一定情况下会随着摇曳的进行而增大。本文的研究有助于深入理解耗散转动系统的能量转换，所搭建的实验装置也能用于进一步探索该系统不同转动自由度耦合带来的更多丰富有趣的运动模式。

关键词： 欧拉磁摆；动力学方程；轨迹；轴向进动；非闭合椭圆进动曲线；反常摇曳

目录

摘要.....	2
1 引言.....	4
2 理论分析.....	5
2.1 定性分析.....	5
2.2 欧拉拉格朗日方程求解摆的底部运动轨迹.....	7
2.3 轴进动角速度的解析分析.....	错误!未定义书签。
3 定量实验.....	11
3.1 实验装置及过程.....	11
3.2 对理论结果的定量检验.....	12
4 欧拉磁摆的反常进动摇曳.....	14
5 总结与展望.....	17
致谢.....	19
参考文献.....	20
附录.....	21
附录 1. 欧拉-拉格朗日方程的详细推导.....	21
附录 2. 欧拉-拉格朗日方程 Mathematica 求解代码.....	23
附录 3. 纯滚条件的验证.....	24
附录 4. 欧拉摆的耗散函数求解.....	24

1 引言

一枚类似硬币的圆盘在桌子上不断旋转滚动，这就是近年来饱受关注的欧拉盘模型。2000年，H. K. Moffatt [1]在 *Nature* 上发表文章分析了欧拉盘特殊的能量耗散机制，即在能量耗散的同时，欧拉盘的进动角速度变大，转速增快。他同时给出了在绝热条件下的停转时间，即时间奇点的大小和计算方法。后来，Lars Bildsten [2]提出了边界层理论，对欧拉盘的空气耗散模型进行了修正。R. I. Leine [3]在第七届欧洲固体力学会议上发布报告详细分析了不同条件下欧拉盘的停摆时间。H. Caps 等人[4]创新的使用激光反射的方法进行定量实验，得到类似结果。D. Petrie 等人[5]研究了欧拉盘的接触问题，确定了在大角度下欧拉盘接触点不滑动，在小角度下会有滑动的现象并给出相应理论解释，A.V. Borisov 等人[6]对粗糙平面上欧拉盘跳起离地现象进行了分析。M. Saje 和 D. Zupan [7]与 P. Kessler 和 O.M. O'Reilly [8]先后分析了因材料耗散产生声音的物理机制。A.A. Stanislavsky 和 K. Weron [9]重点研究了欧拉盘的非线性行为。

欧拉盘这种总能量持续减少，但盘的转速却增加的特殊性质，使其停转时间较长。有人依据此特征，开发了能长时间转动、具有周期性的欧拉盘解压玩具，如图 1 所示。



图 1 欧拉盘解压玩具

(图片来源：<https://myscienceshop.com/>)

欧拉盘解压玩具的这种神奇的性质吸引了我的兴趣。我尝试去了解欧拉盘背后的物理原理。这让我发现，在欧拉盘的众多理论之中，过往研究人员主要着手于盘体旋转频率及空气和材料耗散等方面的理论和发声、滑动、跳起等现象，而忽略了欧拉盘的运动轨迹及其自转轴指向等问题。然而欧拉盘的轴向长度太短，其实验现象并不明显，不好定量测量，于是我将欧拉盘模型进行改进，在不改变其圆柱形的几何架构的情况下，将欧拉盘在轴向延伸，由盘状拉

伸为柱状，并将其倒置使用磁场悬挂，于是我们得到了一个如图 2 所示的模型。

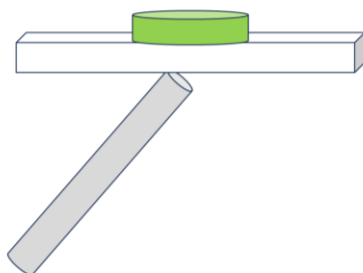


图 2 欧拉磁摆模型示意图

其中，中间的白色材料为一块由非磁性材料制成的厚板。上方固定一块大号钕磁铁，下方悬挂一根磁棒，并将其旋转，抬起一定角度后释放。

本文的具体安排如下：在第二节中，本文首先剖析了欧拉磁摆的运动模式，并给出欧拉摆椭圆摆运动、轴向进动、椭圆进动的定性解释。接着，本文从拉格朗日力学的角度入手，建立了欧拉摆的欧拉拉格朗日方程，并通过 Mathematica 进行数值模拟，解得了摆的运动轨迹，并给出了磁摆的轴向进动角速度的解析结果。第三节中我们进行了定量实验研究，检验了理论模型的合理性。在第四节，我们对第三节中意外观察到的进动反常摇曳现象进行了细致研究，在一定条件下，厘清了欧拉磁摆反常进动摇曳的物理实质。最后，根据我们建立的欧拉磁摆运动学理论，结合有关的解压心理学研究，本文自主研发了一个欧拉磁摆解压玩具。

2 理论分析

2.1 定性分析

欧拉磁摆的模型可以理解为由磁铁引力和重力的共同作用下所产生的回复力矩引发的带有两个非完整约束的四自由度的非保守系统。经过实验观察，在本文的欧拉摆模型中，我们考虑纯滚约束条件，具体纯滚约束的合理性在附录？中有所讨论。在纯滚条件的基础上，我们研究欧拉摆的运动模式如图三所示。

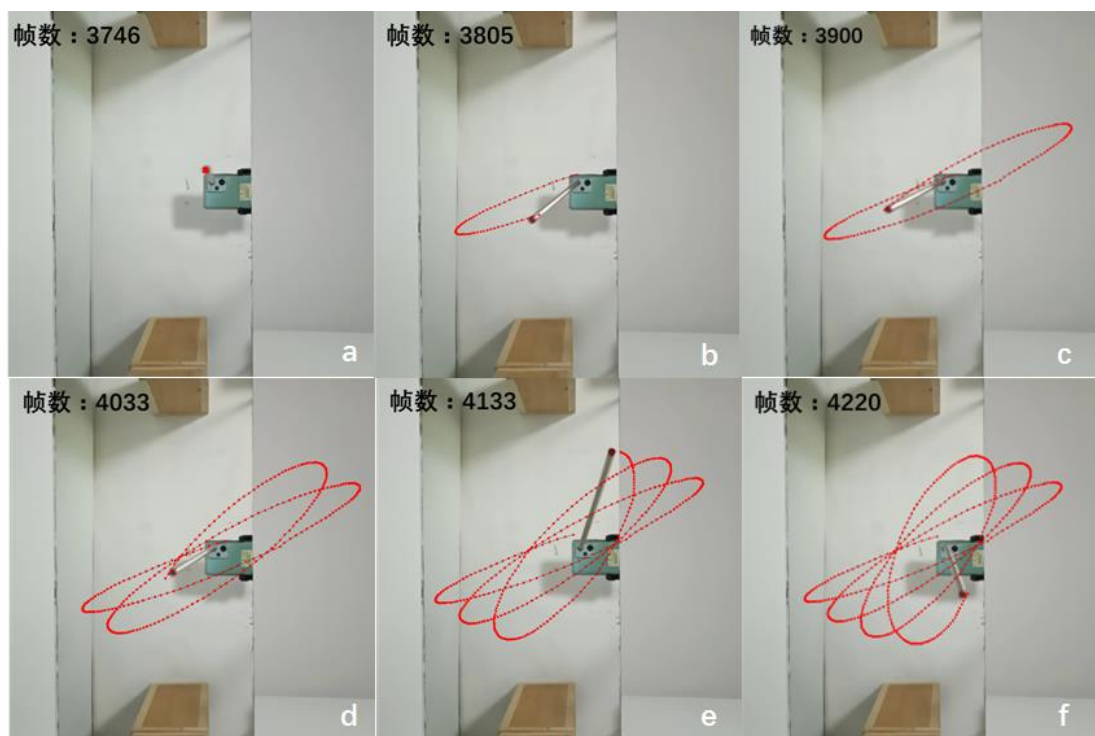


图 3 欧拉摆磁棒下端顶点运动轨迹

观察欧拉摆磁棒下端顶点运动轨迹。由图 3c 可得欧拉摆自转轴绕中心轴向进动，磁棒下端运动轨迹近似为椭圆轨道，即欧拉摆做椭圆摆运动。严格来说，欧拉摆的下端运动轨迹是非闭合椭圆进动曲线，即椭圆不闭合，其长轴绕中心轴向进动。于是，本文在这里定义欧拉摆的三个典型运动特征，第一其整体运动为椭圆摆，第二是其轴向进动，第三是其椭圆进动。

首先，本文对欧拉摆做椭圆摆运动进行解释。显而易见，如果整个系统为理想条件下的完美体系，在不给予初速度释放的情况下，欧拉摆的运动模式只可能为普通复摆运动，或者做基本的圆锥摆运动，不应有着两种运动模式之外的其他运动形式。所以整个欧拉摆模型不应该是绝对的理想模型。在这里，我们提出正反馈效应，以解释欧拉摆的这一椭圆轨道运动现象。

正反馈效应认为欧拉摆体系存在诸多的非理想性，而这些非理想性为欧拉摆提供了不同方向的微扰，进而提供了欧拉摆切向的初始速度。此切向的冲量导致欧拉摆的运动轨迹由一个简单的复摆或者基本圆锥摆逐步演化为椭圆摆的运动。如图三所示，可以看出椭圆的离心率逐渐减小，证实椭圆微扰的效果在被放大。在此，本文提出几个欧拉摆非理想性的可能来源。

首先，由于磁场分布无法达到绝对均匀，非磁性材料和磁铁边缘不平整，加之气流扰动等偶然因素，引起轨道偏移；同时，如图 4 所示，因接触点所在

直径与摆动平面不必然平行，加大轨道偏移，引起正反馈，为欧拉摆提供了切向冲量。

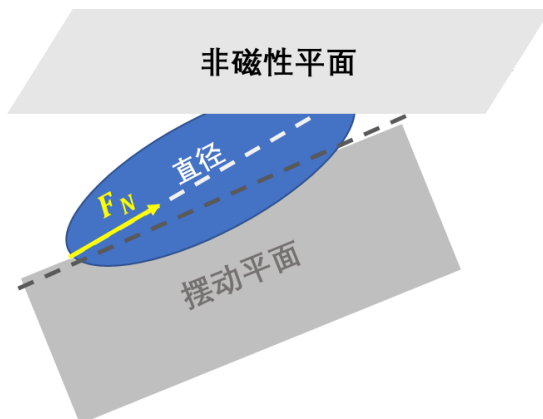


图 4 接触点不在摆动平面上

2.2 欧拉拉格朗日方程求解摆的底部运动轨迹

在本节中，我们忽略空气耗散及材料耗散可能带来的影响，即把整个体系视作保守系统，并考虑使用欧拉-拉格朗日方程[10]解出欧拉摆在无耗散体系下的运动模式。欧拉-拉格朗日方程广义坐标的设置如图 5。 x, y 顶部接触点的位置， θ 代表摆角。 ϕ 和 ψ 分别代表了绕 x, y 所在轴的转动坐标与摆的自转坐标。 η 和 ξ 分别代表了径向方向与轴向方向的方位矢量。同时在此，我们定义如下几组物理量来表征欧拉摆轴向指向的变化。摆角 θ 及章动角速度 Ω_θ ，轴向进动角 θ_0 与轴向进动角速度 Ω_0 ，椭圆进动角 θ_p 与椭圆进动角速度 Ω_p 。

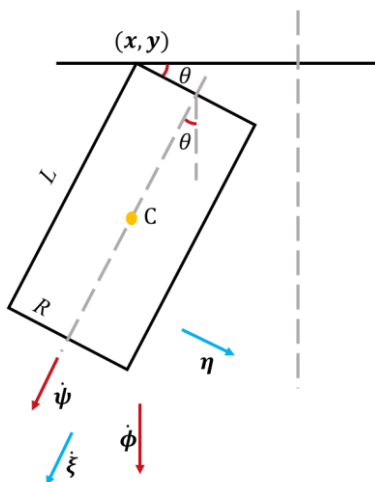


图 5 欧拉-拉格朗日方程的广义坐标

因此可以写出系统的拉格朗日量，

$$L = T - V \quad [1]$$

其中，总动能易得为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}mR^2 \right) (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad [2]$$

总势能由总力矩的积分得到

$$V = \int_0^\theta \tau(\alpha) d\alpha \quad [3]$$

其中总力矩为

$$\tau(\alpha) = Fl + \frac{1}{2}Gh \sin \alpha \quad [4]$$

显示得得到为

$$\begin{aligned} & \tau(\alpha) \\ &= \frac{M_1 M_2 S_1 S_2}{4\pi\mu_0 l^3} + \left(\frac{Gl}{2} - \frac{3M_1 M_2 S_1 S_2 h^2}{2\pi\mu_0 l^4} \right) \alpha \\ & - \frac{M_1 M_2 S_1 S_2 h}{8\pi\mu_0 l^3} \alpha^2 + \left(\frac{M_1 M_2 S_1 S_2 4h^2}{4\pi\mu_0 l^3 l} - \frac{1}{12}Gl \right) \alpha^3 \end{aligned} \quad [5]$$

考虑纯滚约束条件，并将关于时间 t 不显含的广义坐标 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 代入拉格朗日乘子，写出欧拉-拉格朗日方程如下（详细推导见附录 1）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\dot{x}) &= \frac{\partial}{\partial t}(R\dot{\psi} \sin \phi) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\dot{y}) &= \frac{\partial}{\partial t}(-R\dot{\psi} \cos \phi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) R \sin \phi + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) R \cos \phi \end{aligned} \quad [6]$$

我们将此方程组代入 Mathematica 进行数值求解（Mathematica 的代码在附录 I 中给出），解得欧拉摆的磁棒下端定点运动轨迹如图 6 所示。从轨迹图像可以看出，在无耗散的理想条件下，欧拉摆磁棒下端定点运动轨迹，是一个不闭合的进动椭圆曲线。

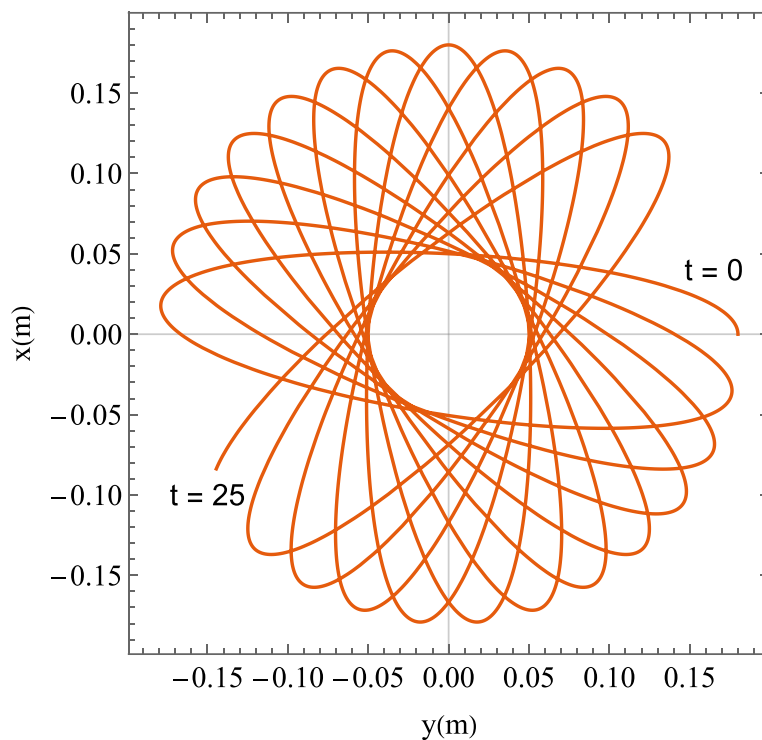


图 6 欧拉摆磁棒下端定点运动轨迹

2.3 轴进动角速度的解析分析

本节旨在欧拉-拉格朗日方程的基础上，进一步对轴向进动角速度进行解析分析，为第四节椭圆进动角速度分析做铺垫。

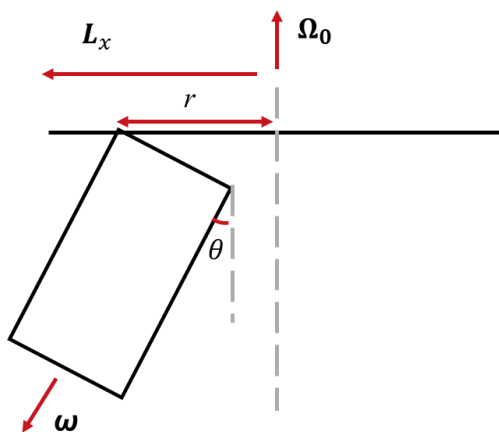


图 7 欧拉摆旋转的解析分析示意图

如图 7 所示，在接触距离 r 和摆角 θ 一定的前提下，角动量定理给出

$$\frac{dL}{dt} = \tau(\theta) = \Omega_0 L_x \quad [7]$$

将 L_x 以惯量张量的形式展开

$$\begin{aligned}
 L_x &= \vec{I} \cdot (\omega + \Omega_0) \cdot \widehat{e}_x \\
 &= \frac{1}{2} m R^2 \omega \sin \theta - \frac{1}{2} m R^2 \Omega_0 \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m l^2 \right) \Omega_0 \sin \theta \cos \theta \\
 &\quad + m \left(r - R \cos \theta + \frac{l}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{l}{2} \cos \theta + R \sin \theta \right) \Omega_0
 \end{aligned} \tag{9}$$

直接得到

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\tau(\theta)}{\frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{r}{R} - \cos \theta \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m l^2 \right) \sin \theta \cos \theta + m \left(r - R \cos \theta + \frac{l}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{l}{2} \cos \theta + R \sin \theta \right)}} \tag{10}$$

利用该式，我们在图 8 绘出 Ω_0 关于接触距离 r 和摆角 θ 的相图

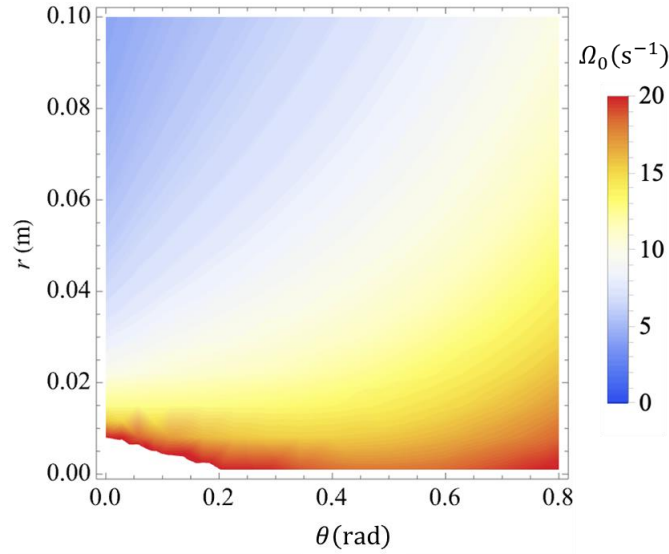


图 8 轴向进动角速度 Ω_0 关于接触距离 r 和摆角 θ 的关系

由图 8 可知，对于无耗散欧拉摆，给定一个接触距离，摆角变小时，总力矩和相应的转动惯量分量都变小。显然，在 r 相对较大区域 ($r > 0.02\text{m}$)，等效转动惯量随摆角变化程度低于力矩随摆角变化程度，导致轴向进动角速度明显变小；然而，在 r 相对较小区域 ($r < 0.02\text{m}$)，轴向进动角速度随摆角变小可能出现先减小后增大且渐强的情况（图中由红变黄再转红），这一点在我们的定量实验中发现了，即在某些摆角减小的过程中摆的轴向进动加快。最后，我们还要提到一种极限情况，即 $r \rightarrow 0$ ，此时摆的上端自由度被限定为定点，该欧拉摆退化为一仅有 2 个自由度的给定初始进动转动惯量的椭圆摆，这种情况下轴向进动的角速度将趋于恒定。至此，图 8 的理论结果表明，正是因为欧拉摆上端点与所绕转轴的距离差异，导致了进动角速度随摆角变化的丰富行为。

3 定量实验

3.1 实验装置及过程

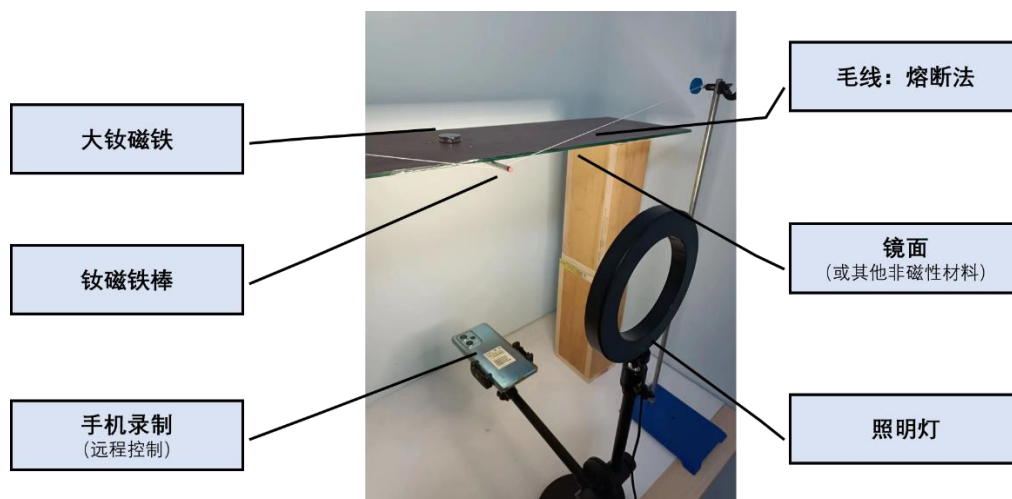


图 7 实验装置展示

如图 7 所示为定量实验装置。实验中使用不导磁的支架，支撑实验装置。并将欧拉摆固定在镜面上。非磁性材料采用镜面是考虑到镜面摩擦系数较小，材料耗散较小，摆动时间较长，更便于观察现象。本实验中采用熔断法烧断毛线释放磁摆，以减少释放时偶然误差的干扰；同时使用手机从正下方拍摄，并使用 Tracker 软件进行视频分析，如图 8 所示。

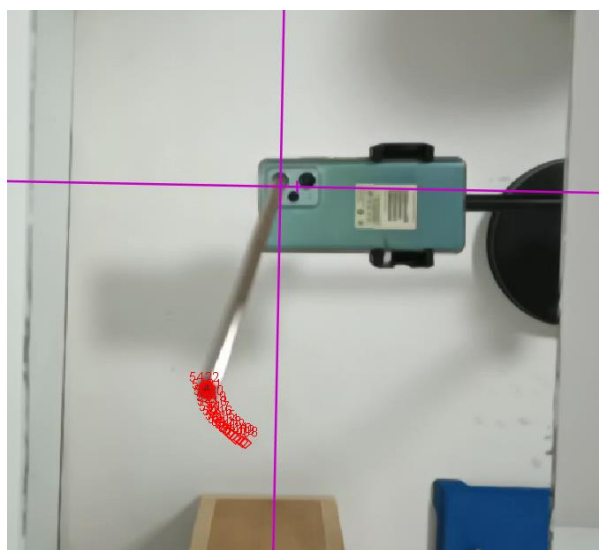


图 8 Tracker 软件视频处理分析

如图 9 所示，对于磁棒的控制，实验中我们采用圆片状的钕磁铁片组装成磁棒代替诸如被磁化的铁芯等方法，其目的在于可以通过增加或减少磁片数量改变磁棒长度。同时，实验选用不同直径的磁片，例如 0.606cm、0.800cm、1.004cm、1.202cm 等，以改变磁棒半径。



图 9 不同直径的磁片及大钕磁铁

3.2 对理论结果的定量检验

基于上一节所搭建的实验装置，我们可以对该体系中欧拉摆任意几何位置进行追踪打点，从而确定其运动轨迹。显然，要想对理论结果进行检验，直接比较实验中所得到的轨迹与理论方程给出的计算轨迹是最直接的。然而，在理论部分，我们忽略了机械摩擦和空气摩擦等一系列耗散力，这会导致理论预测的轨迹与实验轨迹出现差异且会随着时间的增加而累计越发大的误差。因此，轨迹比对无法实现对理论模型所给出欧拉摆的物理实质的检验。

当然，我们也注意到如下事实，对于一个经典的耗散模型，耗散谐振子 [11] 而言，其运动的特征频率 ω 在耗散系数 γ 远小于无阻尼时本征频率 ω_0 的情况下就等于本征频率。在本文中，我们所关注的欧拉摆进动频率约 10-30Hz，而阻尼的特征时间一般在 1 分钟以上（即 $\gamma < 1/60$ ）。这意味着，如果我们认为耗散对欧拉摆的周期运动影响与耗散谐振子中阻尼的影响有相似的特征，则可以推断尽管阻尼对轨迹的影响不可忽略，但是却几乎不影响系统的进动频率。因此，我们在实验部分直接对磁棒顶端接触点的运动轨迹进行采样打点进而得到欧拉摆的进动频率，并和理论部分基于 3.3 的模型给出的解析结果计算进行分析对比。

以下，是对于轴向进动角速度进行定量检验

表 1 轴向进动角速度检验实验 A

系统/测量参数值	理论	实验
$m(\text{g})$	20.1 ± 0.1	
$L(\text{mm})$	35.56 ± 0.02	
$R(\text{mm})$	4.784 ± 0.005	
$r(\text{mm})$	9.154 ± 0.005	
$\theta(\text{rad})$	0.263 ± 0.010	
$\Omega_0(\text{s}^{-1})$	22.6	22.9 ± 0.2

表 2 轴向进动角速度检验实验 B

系统/测量参数值	理论	实验
$m(\text{g})$	45.9 ± 0.1	
$L(\text{mm})$	79.46 ± 0.02	
$R(\text{mm})$	5.060 ± 0.005	
$r(\text{mm})$	6.079 ± 0.005	
$\theta(\text{rad})$	0.242 ± 0.010	
$\Omega_0(\text{s}^{-1})$	16.7	16.3 ± 0.2

经检验，对于不同规格的磁摆，在不同初始条件下，其轴向进动角速度理论值与实验值均匹配，充分验证在轴向进动角速度解析结果的正确性。

同时值得注意的是，我们观察到在实验过程中，欧拉摆在一定条件下会出现反向进动的现象，这是一般的椭圆摆所不具有的性质，本文将在第 4 节中展开分析。

4 欧拉磁摆的反常进动摇曳

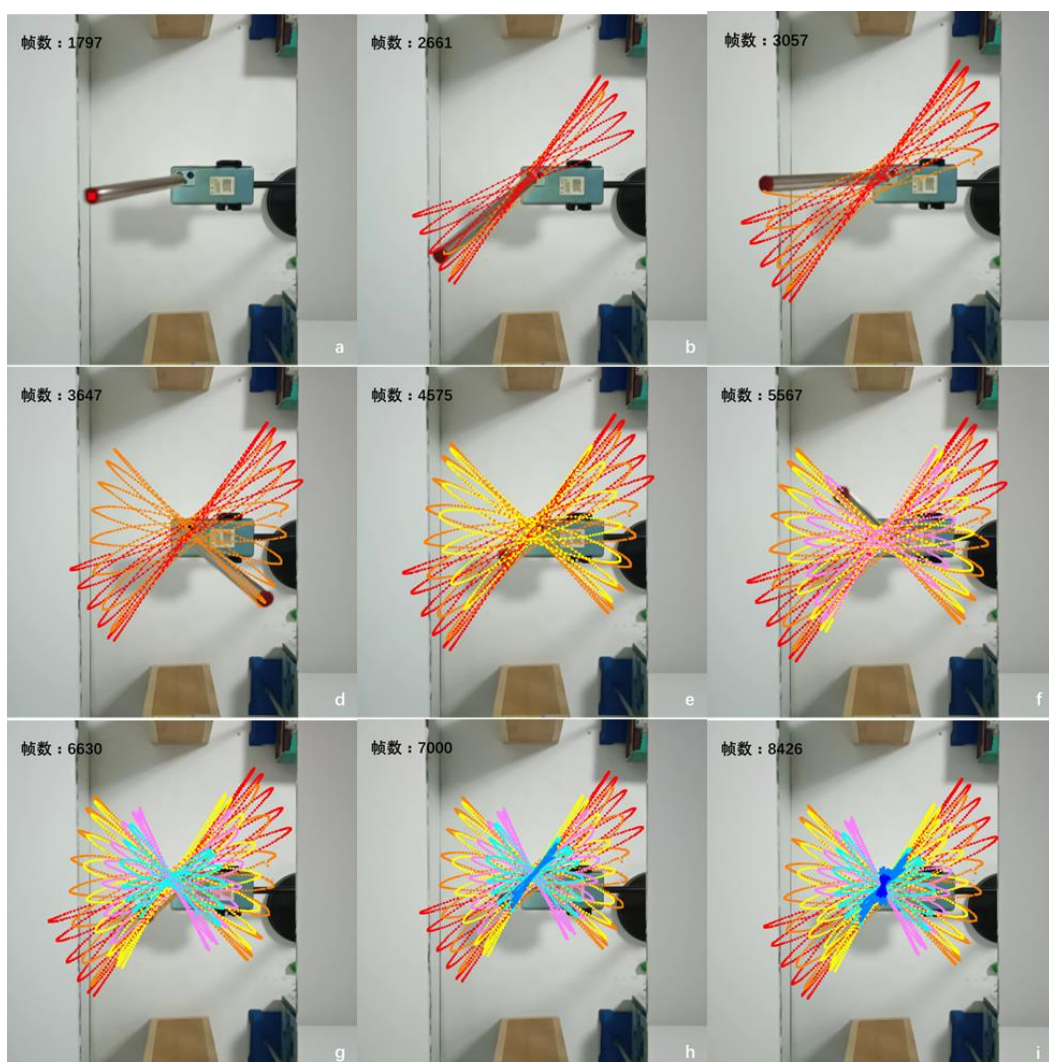


图 10 欧拉磁摆的反常进动摇曳

图 10 中欧拉摆运动轨迹的颜色变换代表了一种磁摆的进动方向，即颜色交替代表进动反向。由此可知，我们观察到随时间的变化，欧拉摆的摆动的副值逐渐变小，但椭圆进动运动不断改变方向。这种椭圆进动角大小的往复震荡，我们称其为欧拉磁摆的反常进动摇曳现象。

为解释这一现象，我们在小角近似下的前提下，定量求解椭圆进动角速度关于距离 r 和摆角 θ 的关系

$$\theta = \theta_0 + \delta \quad (\delta \ll \theta_0) \quad [11]$$

易得

$$I\ddot{\alpha} = \tau(\theta) - \Omega_0 L_x \quad [12]$$

进行微扰论展开 $\delta + \Omega_\theta^2 \delta = 0$ ，得到章动角频率与距离 r 和摆角 θ 的关系

$$\Omega_\theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mL^2}} \left\{ \frac{dM}{d\theta} - \left[\frac{1}{2}mR^2 \left(\left(\frac{r}{R} - \cos\theta_0 \right) \cos\theta_0 + \sin^2\theta_0 \right) + \left(\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 \right) (\sin^2\theta_0 - \cos^2\theta_0) + m \left(\left(R \sin\theta_0 + \frac{L}{2} \cos\theta_0 \right)^2 + \left(r - R \cos\theta_0 + \frac{L}{2} \sin\theta_0 \right) \left(R \cos\theta_0 - \frac{L}{2} \sin\theta_0 \right) \right) \right]^{1/2} \right\} \quad [13]$$

椭圆进动角速度的实质是轴向进动角速度与章动角频率存在相位差，进而得到进动角速度

$$\Omega_p = \Omega_\theta - \Omega_0 \quad [14]$$

根据该式，我们在图 11 绘出 Ω_p 关于接触距离 r 和摆角 θ 的相图

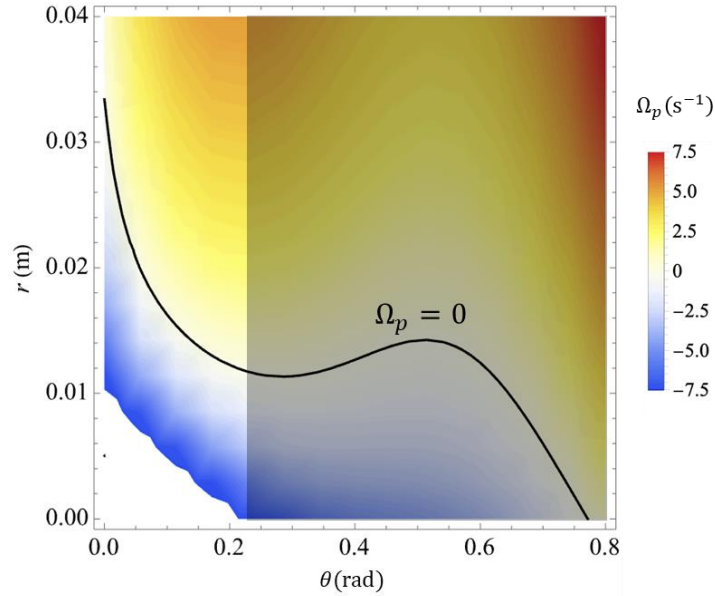


图 11 椭圆进动角速度 Ω_p 关于接触距离 r 和摆角 θ 的关系

图 11 中灰色区域的解与小角近似的前提不自洽需要进一步研究求解。而正常区域是能够与实验对比的小角区域。该区域中可以看到，在不同的 $r - \theta$ 的参数空间，摆的进动角速度可以有不同方向。这就意味着，在给定一个 r 时，若摆在运动过程中的最大摆角出现变化，就可能导致摆的进动方向变化。显然，摆的最大摆角反映了系统总能量的大小，最大摆角减小意味着总能量减小。这一过程刚好可以由阻尼耗散实现。因此我们得出结论，阻尼耗散导致的能量减小使得欧拉摆最大摆角减小，导致摆动过程中欧拉摆的进动方向出现变化，这就是我们观察到反常摇曳的物理本质。

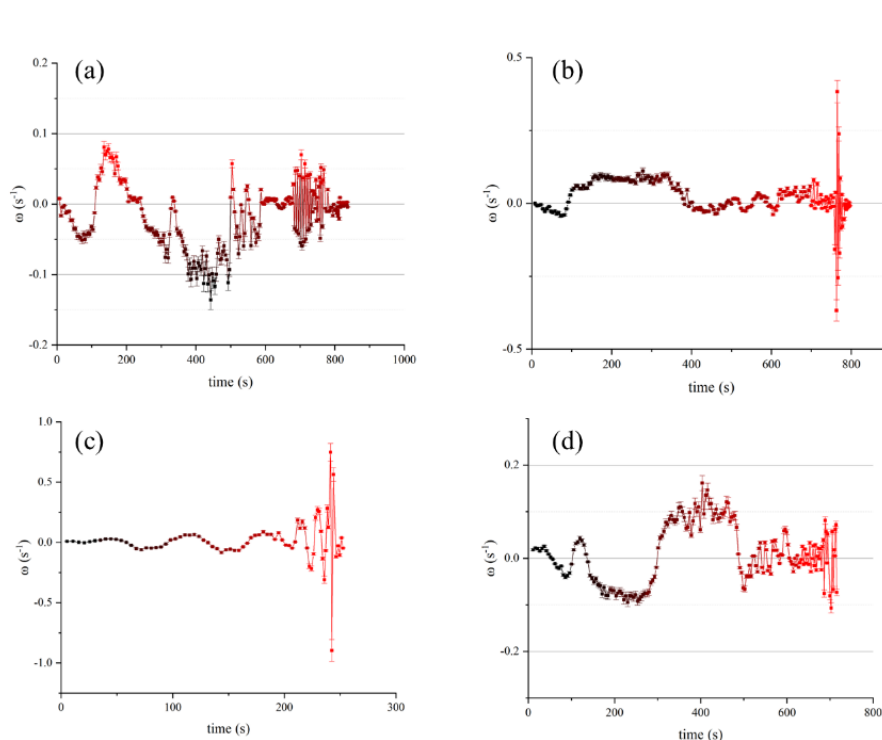


图 12 欧拉磁摆的反常进动摇曳的频率-时间曲线

如图 12 所示，不同参数下的实验结果表明，我们所关心的进动角速度确实随着欧拉摆的摆动出现了方向多次交替变化的现象。需要注意的是，按照我们根据图 11 给出相图的解释，若 r 固定不变，则交替在小角度区域仅仅可能出现一次，因为最大摆角随着能量耗散的进行是单向见小的。因此，这里的多次方向交替意味着，实验中的摆端点轴间距 r 可能并非一个常数，而是时间依赖的。若 r 随着时间可以呈现一定程度的震荡，则在图 11 相图中，进动角速度除了可以因为最大摆角减小而变号，还可以因为 r 的震荡实现沿着相图竖直轴的上下交替变化，从而实现更多次的转动方向变化，及多次往复的反常摇曳。关于这一点的定量研究，需要将 r 作为额外自由度引入拉格朗日方程，求解更严格的运动轨迹来进一步确认。

此外，图 12 的结果还显示出，反常摇曳自己呈现出一定的准周期性，随着时间的进行，摇曳角速度的振幅与交替频率在某些情况下呈现增加的趋势。这部分的研究需要接下来更多的数据佐证，我们希望用短时傅立叶变换找到其中存在的正则模式与正则频率。关于这一点的理论与实验定量比对，在目前的框架下还无法深入进行，这将会是我们在该问题接下来的探索中的重要方向。

5 总结与展望

本文研究了一种磁制欧拉摆的动力学与运动轨迹。该欧拉摆在重力、外磁场和耗散力的共同作用下做阻尼椭圆摆动。在理论研究部分，我们基于拉格朗日力学给出了无耗散欧拉摆的动力学方程，数值求解发现该摆轨迹是非闭合的类椭圆轨迹簇。此外，利用角动量定理，我们给出了椭圆摆轴向进动速度关于摆角与摆端点轴间距的二维函数图像。结果表明，摆端点轴间距的不同会导致轴向进动速度关于摆角的变化有不同的行为，如迅速减小、先见小后增大等。这是欧拉摆具有丰富动力学行为的原因之一。

接着，我们在定量实验部分基于对欧拉摆不同位置的运动捕捉，确定了其运动轨迹和轴向进动频率。实验结果表明无阻尼的理想模型对该系统有较高适用性。与此同时，实验中我们意外发现欧拉摆进动过程会出现进动方向反向现象，且该反向会反复多次出现。我们将此发现命名为反常进动摇曳。考虑到无阻尼的理论模型给出的轨迹并不会出现进动反常摇曳，我们猜测摩擦阻尼的存在是该现象产生的原因。

为确认反常进动的产生机制，我们从理论上计算了进动角速度关于欧拉摆最大摆角和摆端点轴间距的二维相图。结果表明，只要最大摆角减小，欧拉摆就可能实现角速度方向的突然反向。这就意味着，阻尼带来的能量耗散导致的最大摆角减小就是反常摇曳的核心机制。我们进一步通过对进动角速度的测量，实验上得到了反常摇曳频率随时间变化趋势。结果表明，反常摇曳的角速度幅值和方向交替频率都会随着摇曳的进行而增大。关于此部分的定量理论研究，和潜在的阻尼导致不同转动自由度耦合带来的更多丰富动力学是我们在该问题上下一步研究的重点。

最后，在本文的理论与实验研究的启发下，我们设计了一种解压欧拉摆玩具。它可用于日常家居装饰和通过有趣丰富的周期运动模式，达到让观者解压和舒缓的目的，如图 11 所示



图 11 欧拉磁摆解压玩具

根据 E.J. Cohen 等人[12]基于手指陀螺的研究，有周期性的、能给予人共振之感的快速旋转的物体能使人集中注意力，进而缓解压力。同时，有一定频率的声音刺激也能使人放松心神，这也正式欧拉磁摆解压玩具所具有的。

致谢

从 IYPT 初识这个题目，便与它结下了这个缘分，一路陪伴我研究至今。我要由衷的感谢指导老师张永平老师从选题起的一年来的陪伴，从查文献，探讨理论到陪伴我做实验；我要由衷感谢指导老师马宇翰老师在这篇论文上对我的启发，让我有了豁然开朗之感，也十分感谢他在论文写作上的指点，让我能如今天这般逻辑缜密的展现我的研究成功。我十分感谢王泽华同学在欧拉摆这个模型上给予我的全方面的帮助与启发，才有我这篇研究的诞生。我真挚的感谢周家宇同学在数据处理与图像绘制上的帮助。

参考文献

- [1] H.K. Moffatt, *Nature* **404**, 833 (2000).
- [2] L. Bildsten, *Physical Review E* **66**, 056309 (2002).
- [3] A.J.A. C., in *ESMC 2009* (2009).
- [4] H. Caps, S. Dorbolo, S. Ponte, H. Croisier, and N. Vandewalle, *Physical Review E* **69**, (2004).
- [5] D. Petrie, J.L. Hunt, and C.G. Gray, *American Journal of Physics* **70**, 1025 (2002).
- [6] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, and Y.L. Karavaev, *Nonlinear Dynamics* **79**, 2287 (2014).
- [7] M. Saje and D. Zupan, *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures* **2**, 49 (2006).
- [8] P. Kessler and O.M. O'Reilly, *Nelineinaya Dinamika* 247 (2005).
- [9] A.A. Stanislavsky and K. Weron, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **156**, 247 (2001).
- [10] 周衍柏.理论力学教程.人民教育出版社,1979.
- [11] 梁绍荣.普通物理学:力学.北京师范大学出版社, 1985.
- [12] E.J. Cohen, R. Bravi, and D. Minciocchi, *Scientific Reports* **8**, (2018).

附录

本附录对正文若干讨论进行补充分析与数据支持

附录 1. 欧拉-拉格朗日方程的详细推导

系统的拉格朗日量

$$L = T - V \quad [\text{附录 1}]$$

由克尼希定理写出系统的总动能

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_\xi\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}I_\eta\dot{\eta}^2 \quad [\text{附录 2}]$$

并进行惯量张量展开, 易得

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}mR^2 \right) (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad [\text{附录 3}]$$

质心的坐标为

$$x_c = x + \left(\frac{1}{2} \sin \theta - R \cos \theta \right) \cos \phi \quad [\text{附录 4}]$$

$$y_c = y + \left(\frac{1}{2} \sin \theta - R \cos \theta \right) \sin \phi \quad [\text{附录 5}]$$

$$z_c = \frac{1}{2} \cos \theta + R \sin \theta \quad [\text{附录 6}]$$

势能由总力矩的积分得到

$$V = \int_0^\theta \tau(\alpha) d\alpha \quad [\text{附录 7}]$$

由磁偶极子和磁四级子模型推得

$$B_r = \frac{9q_m l^2}{4\pi\mu_0 r^4} \sin \alpha \cos \alpha \quad [\text{附录 8}]$$

$$B_\theta = -\frac{3q_m l^2}{16\pi\mu_0 r^4} \cos 2\alpha \quad [\text{附录 9}]$$

推得切向磁场强度

$$H_\theta = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{M_1 S_1 l_1}{r^3} \cos \alpha - \frac{3l_1^2 M_1 S_1}{r^4} \sin 2\alpha \right) \quad [\text{附录 10}]$$

将磁场力 $F = M_2 S_2 H_\theta$ 进行泰勒展开, 可得磁场力的表达式

$$F = \frac{M_1 M_2 S_1 S_2}{4\pi\mu_0 r^3} \left(1 - \frac{6l_1}{r} \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{4l_1}{r} \alpha^3 \right) \quad [\text{附录 11}]$$

$$\left(\sin 2\alpha \approx 2\alpha - \frac{4}{3} \alpha^3 \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right)$$

得到总力矩的大小

$$\begin{aligned} \tau &= Fh + \frac{1}{2} Gh \sin \alpha \\ &= \frac{M_1 M_2 S_1 S_2}{4\pi\mu_0 h^3} + \left(\frac{Gh}{2} - \frac{3M_1 M_2 S_1 S_2 l_1^2}{2\pi\mu_0 h^4} \right) \alpha \\ &\quad - \frac{M_1 M_2 S_1 S_2 l_1}{8\pi\mu_0 h^3} \alpha^2 + \left(\frac{M_1 M_2 S_1 S_2 4l_1^2}{4\pi\mu_0 h^3} - \frac{1}{12} Gh \right) \alpha^3 \end{aligned} \quad [\text{附录 12}]$$

写出欧拉-拉格朗日方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda_x = \lambda_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda_y = \lambda_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \psi} - \lambda_x R \sin \phi + \lambda_y R \cos \phi \end{aligned} \quad [\text{附录 13}]$$

由纯滚约束条件可得

$$\dot{x} = R\dot{\psi} \sin \phi \quad [\text{附录 14}]$$

$$\dot{y} = -R\dot{\psi} \cos \phi \quad [\text{附录 15}]$$

广义坐标 x 和 y 关于时间 t 不显含，代入拉格朗日乘子，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} (R\dot{\psi} \sin \phi) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\dot{y}) &= \frac{\partial}{\partial t} (-R\dot{\psi} \cos \phi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) R \sin \phi + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) R \cos \phi \end{aligned} \quad [\text{附录 16}]$$

式附录 16 为最终的欧拉-拉格朗日方程。

附录 2. 欧拉-拉格朗日方程 Mathematica 求解代码

```

In[ ]:= ClearAll["Global`*"]
清除全部

M[θ_] := 0.036 + 9.8 + 0.001 * (9.03 + 51.8 - 4.01 * θ^2 + 31.0 * θ^3);
V = Function[θ, Integrate[M[x], {x, 0, θ}]];
纯函数 积分

X = x[t] + (1/2 Sin[θ[t]] - R Cos[θ[t]]) Cos[φ[t]];
正弦 余弦 余弦

Y = y[t] + (1/2 Sin[θ[t]] - R Cos[θ[t]]) Sin[φ[t]];
正弦 余弦 正弦

Z = 1/2 Cos[θ[t]] + R Sin[θ[t]];
余弦 正弦

L = m/2 (D[X, t]^2 + D[Y, t]^2 + D[Z, t]^2) - V[θ[t]] + m/2 (R^2/2 (ψ'[t] + φ'[t] Cos[θ[t]])^2 + (R^2/4 + 1/12) (θ'[t]^2 + φ'[t]^2 Sin[θ[t]]^2));

In[ ]:= (*
eqn1=D[(D[L,x'[t]]),t]= D[L,x[t]]+λx[t];
eqn2=D[(D[L,y'[t]]),t]= D[L,y[t]]+λy[t];
*)
R = 0.005060;
l = 0.07946;
m = 0.0459;

θ0 = 0.2;
θ̇0 = 0;
φ0 = 0;
φ̇0 = 40;
ψ̇0 = -22;

T = 1;

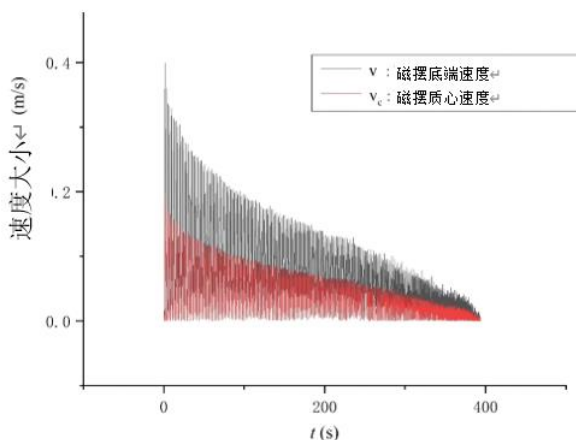
eqn1 = D[(D[L, θ'[t]]), t] = D[L, θ[t]];
偏导 偏导
eqn2 = D[(D[L, φ'[t]]), t] = D[L, φ[t]];
偏导 偏导
eqn3 = D[(D[L, ψ'[t]]), t] = -D[D[L, x'[t]], t] * R * Sin[φ[t]] + D[D[L, y'[t]], t] * R * Cos[φ[t]];
偏导 偏导 偏导 偏导 偏导 偏导
eqn4 = D[x'[t], t] = D[R * ψ'[t] * Sin[φ[t]], t];
偏导 偏导 偏导 偏导
eqn5 = D[y'[t], t] = D[-R * ψ'[t] * Cos[φ[t]], t];
偏导 偏导 偏导 偏导
ics = {x[0] == 0, x'[0] == R * ψ0 * Sin[φ0], y[0] == 0, y'[0] == -R * ψ0 * Cos[φ0],
偏导 偏导 偏导 偏导
θ[0] == θ0, θ'[0] == θ̇0, φ[0] == φ0, φ'[0] == φ̇0, ψ[0] == 0, ψ'[0] == ψ̇0};

sol = NDSolve[{eqn1, eqn2, eqn3, eqn4, eqn5, ics}, {θ, φ, ψ, x, y}, {t, 0, T}, Method -> {"EquationSimplification" -> "Residual"}];
数值求解微分方程组 方法

Plot[{θ[t] /. sol[*, θ'[t] /. sol]}, {t, 0, T}, PlotLegends -> {"θ[t]", "θ'[t]"}]
绘图 绘图的图例
Plot[{φ[t] /. sol[*, φ'[t] /. sol]}, {t, 0, T}, PlotLegends -> {"φ[t]", "φ'[t]"}]
绘图 绘图的图例
Plot[{ψ[t] /. sol[*, ψ'[t] /. sol]}, {t, 0, T}, PlotLegends -> {"ψ[t]", "ψ'[t]"}]
绘图 绘图的图例
Plot[{x[t] /. sol[*, x'[t] /. sol]}, {t, 0, T}, PlotLegends -> {"x[t]", "x'[t]"}]
绘图 绘图的图例
Plot[{y[t] /. sol[*, y'[t] /. sol]}, {t, 0, T}, PlotLegends -> {"y[t]", "y'[t]"}]
绘图 绘图的图例

```

附录 3. 纯滚条件的验证



磁棒质心速度大致约为磁棒底端速度的一半，即磁棒纯滚无滑动。

附录 4. 欧拉摆的耗散函数求解

本附录主要研究欧拉摆运动过程中阻碍其运动的耗散，并将耗散拆解为两部分，碰撞摩擦耗散和空气耗散。本附录主要研究其中的空气耗散部分，建立有空气耗散下的基本轴向进动角速度模型，和其对应的顶部空气层模型和下端空气扰动模型，分析可能存在的空气耗散对欧拉摆运动的影响。并希望以其反应对不可忽略半径的圆柱棒做椭圆摆或类椎摆运动过程中空气耗散的一般性求解方法。

一、基本假设与模型建立

1. 符号约定

如图 1.2 符号设定， Ω 是轴向进动角速度，表示自转轴 \hat{e}_q 绕进动轴 \hat{e}_p 旋转的角速度。 r 是接触距离，表示磁棒和平面的接触点和进动轴的距离。 θ 是磁棒的摆角，表示自转轴 \hat{e}_q 与垂直轴的夹角。 L 为磁棒的长度， R 为磁棒的截面半径， ω 是自转角速度。

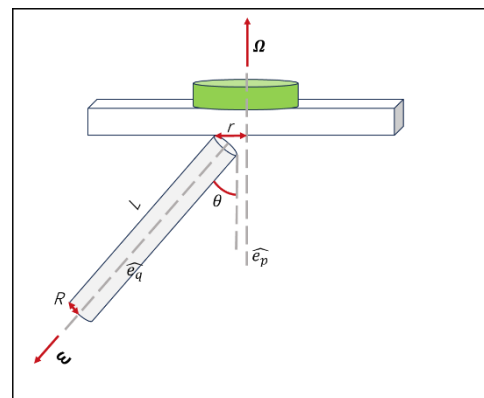


图 2.1 符号约定

2. 基本假设

在这里本附录做如下基本假设，以方便对模型的分析：

1. 磁棒纯滚，与平面接触点之间不存在相对滑动

重复试验表明，磁棒在滚动时不会出现可观测的滑动运动，而滑动所导致的能量损耗主要以横向震动的形式呈现，只会在最后极小角平面摆动阶段产生微弱的影响。

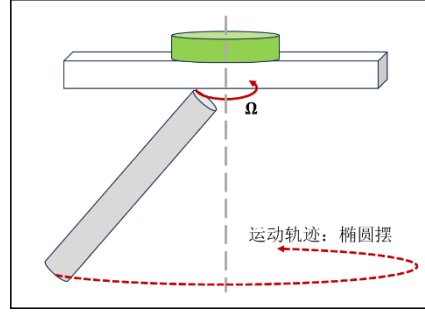


图 2.2 欧拉摆的运动

2. 不考虑章动等扰动对角速度大小变化的影响，本附录分析的是整体角速度模型，即磁棒与平面接触点绕中心轴旋转的角速度

除空气阻力外，主要扰动是又不同方向上的震动（例如章动）导致的。特别的，Moffatt [1]说明了在不考虑其他扰动的情况下实现精确模型的可能性。

3. 不考虑最后的极小角类平面摆运动

其时长太短，并非欧拉摆的典型特征，不是本附录主要研究对象。

4. 对磁场做适当合理的近似，忽略因磁场所产生的涡旋电场对磁场产生的影响由涡旋电场产生的感应磁场的量级远小于磁铁磁场。

5. 欧拉摆顶部空气层与外界空气之间不存在空气流动

本质上，欧拉摆与外界空气不发生相互作用或交流。这主要是因为欧拉摆在摆动过程中虽然会对与其直接接触空气区域造成少量扰动并在短时间内旋转导致空气缺失造成低压区域，但其物理过程无需其与周边大气的交换，不会影响区域整体空气流动。

6. 类平面摆时的摆下部与空气摩擦系数与圆锥摆时的摆下部与空气摩擦系数大小基本相同

根据物理常识及模型定义、性质可知。

根据以上基本假设，通过基本物理研究方法，我们可以得出以下的轴向进动角速度有关于摆角和接触距离的表达式（单位： $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ）：

$$\Omega = \sqrt{\frac{\frac{M_1 M_2 S_1 S_2}{4\pi\mu_0 L^3} + \left(\frac{mgL}{2} - \frac{3M_1 M_2 S_1 S_2 l^2}{2\pi\mu_0 L^4}\right)\theta - \frac{M_1 M_2 S_1 S_2 l}{8\pi\mu_0 L^3}\theta^2 + \left(\frac{M_1 M_2 S_1 S_2 4l^2}{4\pi\mu_0 L^3} - \frac{1}{12}mgL\right)\theta^3}{\frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{r}{R} - \cos\theta\right) \sin\theta + \left(\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2\right) \sin\theta \cos\theta + m\left(r - R\cos\theta + \frac{L}{2}\sin\theta\right) \left(\frac{L}{2}\cos\theta + R\sin\theta\right)} \quad [2.2]$$

这里得到的关于角速度的表达式，并不是本附录想研究的空气耗散模型的主体，只不过为了推出相关的空气耗散模型，我们必不可少的需要一些系数。

而这些系数均可以通过这个式子得到。因为主要研究空隙耗散模型，所以在里就不讨论如何由这个式子得到相关的系数的问题了。

3. 基本空气耗散模型

我们首先考虑一个基本空气耗散模型。根据物理规律[1,2]显然角速度为关于时间的幂函数的修正，即对时间 t ，待定函数 f 以及常数 k ：

$$\Omega \approx f(t)^k \tag{3.1}$$

由于摆一定会停止，可设其停止时间为 t_{stop} ，并且振幅与距离 t_{stop} 的时间有关，因此可设：

$$\Omega = g(t_{stop} - t)^k \tag{3.2}$$

一般而言，摆会随时间增加越转越快(Moffatt, 2000)，因此设 $k = -\alpha$ ：

$$\Omega = g(t_{stop} - t)^{-\alpha} \tag{3.3}$$

我们发现，进行修正时需要同时考虑进下端空气扰动的影响，这揭示了我们需要在前面乘上一个指数型衰减，经过简单变形得到：

$$\Omega = kme^{-\frac{k}{n}t}(t_{stop} - t)^{-\alpha} \tag{3.4}$$

式 3.4 为关于轴向进动角速度的基本空气耗散模型。式中，系数 m 和 n 由式 2.2 决定， t_{stop} 由摩擦耗散决定。 α 由顶部空气层模型求解， k 为磁棒下端与空气间摩擦阻尼，由下端空气扰动模型决定。

二、 顶部空气层模型的建立与求解

正如前文所述，顶部空气层模型的空气粘滞阻力过于复杂，无法得到解析解，只能近似成幂函数形式，所以我们不妨进行幂次分析，简化分析难度。

如图 3.1 所示，想要得到轴向进动角速度与时间的幂次关系，需要分别对轴向进动角速度与摆角之间的幂次关系和摆角与时间之间的

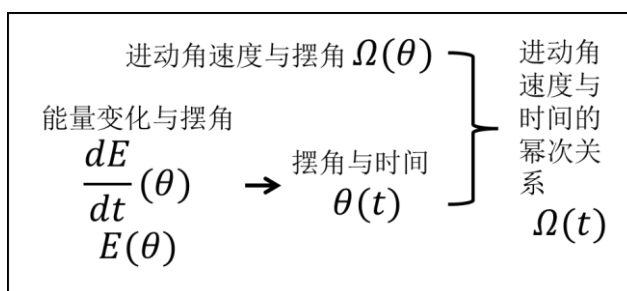


图 3.1 顶部空气层模型的建立逻辑

本图是幂次分析的模型，展示了推导过程的逻辑。本附录从进动角速度与摆角的关系入手；同时研究能量变化与摆角之间的关系，得出摆角与时间的关系。最终求出进动角速度与时间的幂次关系，以得到我们基本空气耗散模型中幂函数的幂次。

幂次关系进行分析(Moffatt, 2000)。

1. 进渐过程模型：轴向进动角速度与摆角

本节的目的是得到轴向进动角速度 Ω 与摆角 θ 之间的关系，而式 2.2 的自变量有摆角 θ 和接触距离 r 两个。我们对式 2.2 取进渐过程，即理解其中的变量 r 是缓变的，从而在进行幂次分析时，忽略 r 的影响。同时对力矩进行估计，其零次项最大。则可将轴向进动角速度，简化为如下的简单表达式：

$$\Omega \sim \sqrt{\frac{\tau^0}{A + B\theta}} \quad [3.1]$$

其中对于这个模型，我们可以对 A 和 B 进行简单的量级估计：

$$A = m(r - R)\frac{L}{2} \sim 40m \quad [3.1.1]$$

$$B = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{r}{R} - 1\right) + \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m(r - R)R + m\frac{L^2}{4} \sim 2000m \quad [3.1.2]$$

易得：

$$B \gg A$$

因此，忽略 A 项的影响，进行幂次分析，可得如下关系式：

$$\Omega \sim \sqrt{\frac{\tau^0}{\theta}} \rightarrow \theta^{-\frac{1}{2}} \quad [3.2]$$

2. 空气黏滞阻力模型：通过能量耗散与摆角的幂次关系推出摆角与时间的幂次关系

1) 能量变化率与摆角

本节分析能量变化率与摆角之间的幂次关系。因此在这里我们对顶部空气层模型进行建模。在这个过程中，欧拉摆做椭圆摆运动，磁棒与平面接触点不断旋转，挤压顶部空气层快速旋转，造成能量耗散。

在这里我们假设：顶部空气层与外界空气之间不存在交流互换。

基于此假设可以推得：空气流动的角速度等于磁棒旋转的角速度，因此可以得到空气层速度：

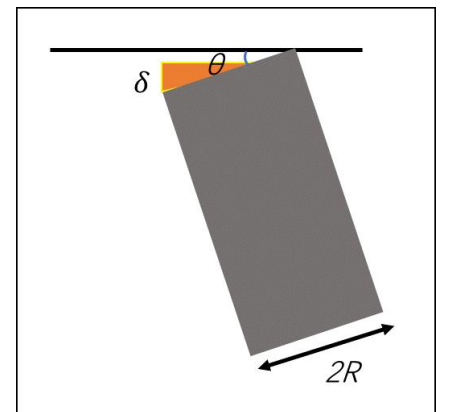


图 3.2 空气黏滞阻力模型

本图展示了顶部空气层模型的建模，其本质为考虑了边际层理论后的顶层空气快速旋转，产生粘滞阻力，造成耗散。

$$v_m \sim \Omega R \quad [3.3]$$

基于边界层理论(Bildsten, 2002), 我们同时考虑到存在一个有效厚度(Landau & Lifshits, 2012), 在这里对模型进行修正: 我们认为主要产生耗散的空气, 并不包括最顶层的空气, 而是除最顶层空气外的下部空气层的所有空气, 如图 3.3 所示。

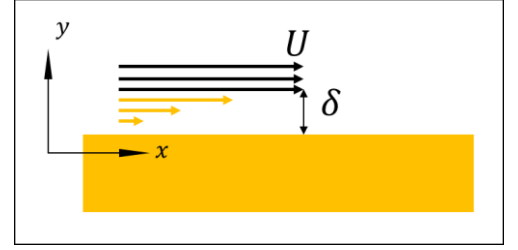


图 3.3 边界层理论

本图展示的是通过边界层理论得到的速度梯度的模型。可以直观的看出, 最上层的空气是不参与主要的耗散的. 边界层理论就是考虑合理的空气层厚度, 忽略掉最上层的边界层。

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \quad \left(\text{边界层理论: } \nu = \frac{\mu}{\rho} \right) \quad [3.4]$$

忽略 y 方向空气流速, 对 x 向空气流速的求导, 可得速度梯度。并分别将式 3.3、式 3.4 带入, 可得速度梯度与轴向进动角速度之间的幂次关系:

$$\frac{dv_x}{dz} \sim \frac{v_m}{\delta} \sim \frac{\Omega R}{\delta} \sim \Omega^{\frac{3}{2}} \quad [3.5]$$

推得能量变化率与轴向进动角速度之间的幂次关系:

$$\frac{dE}{dt} \sim -\mu \left(\frac{dv_x}{dz} \right)^2 R^2 \delta \sim -\Omega^{\frac{5}{2}} \sim -\theta^{-\frac{5}{4}} \quad [3.6]$$

2) 能量与摆角

前文曾述, 力矩主体为零阶项, 能量与摆角之间的幂次可推得为一次幂:

$$E \sim \tau^{(0)} \theta \sim \theta^1 \quad [3.7]$$

3) 摆角与时间

通过能量与摆角的关系, 代换能量变化率与摆角的关系, 可得:

$$\theta^{-\frac{5}{4}} \rightarrow \frac{dE}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} \quad [3.8]$$

解微分方程得摆角与时间的幂次关系为:

$$\theta \rightarrow t^{\frac{4}{9}} \quad [3.9]$$

3. 轴向进动角速度与时间的幂次关系

将式 3.9 代入式 3.2，易得轴向进动角速度与时间的幂次关系为：

$$\Omega \rightarrow \theta^{-\frac{1}{2}} \rightarrow t^{-\frac{2}{9}} \quad [3.10]$$

推得：

$$\alpha = \frac{2}{9} \approx 0.222 \quad [3.11]$$

三、 下端空气扰动模型的建立与求解

1. 下端空气扰动模型的建立

我们对下端空气扰的模型定位为整体模型的一个修正，其在诸多耗散中并不占主体地位，这可以从本附录后面推导所得出的结论中可以分析得到。

在这里本附录展示的是对下端空气扰动模型中的磁棒下端与空气间摩擦阻尼 k 进行建模求解的过程。这里假设：

当摆做平面摆动时的摩擦阻尼 k_{plane} 应等价于摆做椭圆摆运动时的摩擦阻尼 $k_{elliptical}$

所以本附录采用如图 4.1 的平面空气扰动模型。

首先可以写出空气粘滞阻力：

$$\tau = k\Omega \quad [4.1]$$

并建立复摆的运动方程：

$$I\ddot{\theta} = -kL^2\dot{\theta} - mgd \sin \theta$$

(边界条件： $\theta|_{t=0} = \theta_0, \dot{\theta}|_{t=0} = 0$) [4.2]

其中，复摆的转动惯量可以表示为

$$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2 + md^2 \quad [4.2.1]$$

解式 4.2 二阶线性微分方程得关于摆角的表达式为：

$$\theta = \theta_0 e^{-kt} \cos \omega't \quad [4.3]$$

可以见得，摩擦阻尼 k 与复摆本身的参数无关，这也是符合物理直觉的。

2. 摩擦阻尼 k 的求解

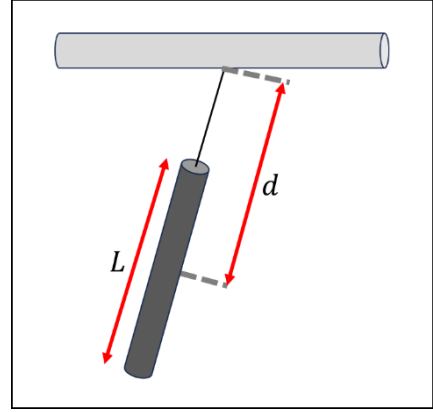


图 4.1 下端空气扰动模型

本图展示的是为求解下端空气扰动模型中摩擦阻尼 k 所建立的平面摆动模型。其将磁棒悬挂在细线下，并偏转一定角度释放，通过求解复摆模型计算出摩擦阻尼 k 。

如图 4.2 所示，是本附录的实验装置，本附录采用 tracker 软件进行视频追踪分析，并采集单侧摆每一次达到最大振幅时的摆角 θ_{max} 。

由式 4.3 得到理论曲线包络线：

$$\theta_{theory} = \theta_0 e^{-kt} \quad [4.4]$$

通过 Python 将实验数据与理论包络曲线式 4.4 拟合，得到关于释放角 θ_0 和 k 的值。

实验验证求解

序号	磁棒长度 L	磁棒截面半径 R	磁棒质量 m	复摆长度 d
1	18.382 cm	0.502 cm	106 g	28.7 cm
2	14.980 cm	0.601 cm	124 g	26.9 cm

表 4.1 摩擦阻尼 k 的实验验证求解

对验证实验 1 及验证实验 2 分别进行拟合求解，可得到初始摆角的理论值，并根实验值进行比对如下：

$$\begin{cases} \theta_0^{1 theory} = 0.551 \\ \theta_0^{1 experiment} = 0.575 \end{cases} \Rightarrow \theta_0^{1 theory} \approx \theta_0^{1 experiment} \quad [4.5.1]$$

$$\begin{cases} \theta_0^{2 theory} = 0.765 \\ \theta_0^{2 experiment} = 0.764 \end{cases} \Rightarrow \theta_0^{2 theory} \approx \theta_0^{2 experiment} \quad [4.5.2]$$

三组实验 θ_0 的理论值和实验值均相匹配，证明了拟合的合理性。

同时，我们得到了摩擦阻尼 k 的数值：

$$\begin{cases} k_1 = 1.706 \times 10^{-2} \\ k_2 = 1.835 \times 10^{-2} \end{cases} \quad [4.5.3]$$

可以发现，两组数据近似相同，证实了摩擦阻尼 k 与复摆本身的参数无关。

$$k_1 \approx k_2 \quad [4.5.4]$$

取平均得到理论 k 值：

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1.706 \times 10^{-2} + 1.835 \times 10^{-2}}{2} = 1.771 \times 10^{-2} \quad [4.5.5]$$

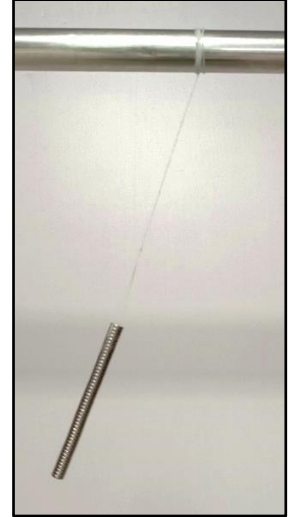


图 4.2 实验装置
如图。

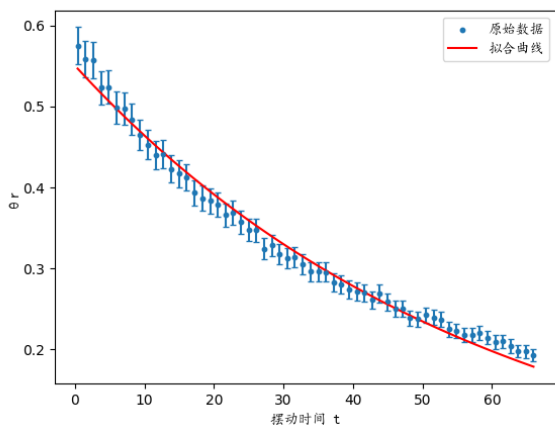


图 4.3 摩擦阻尼 k 的实验求解一

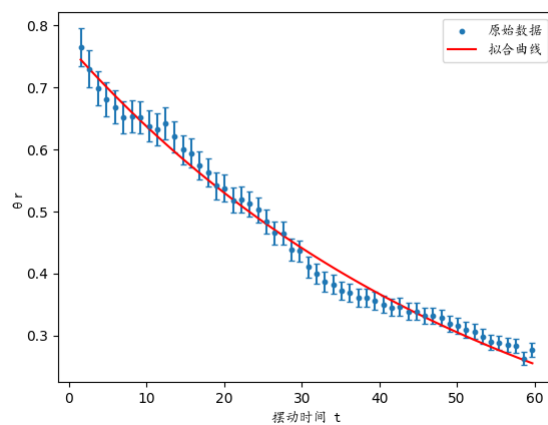


图 4.3 摩擦阻尼 k 的实验求解二

四、模型分析与检验

综上所述，我们将顶部空气层模型求解的幂次关系与下端空气扰动模型所得到的摩擦阻尼的结论代入基本空气耗散模型中，可得：

$$\Omega = 1.771 \times 10^{-2} \cdot m e^{-\frac{1.771 \times 10^{-2}}{n} t} (t_{stop} - t)^{\frac{2}{9}}$$