参赛队员姓名：张朝钦

中学：华南师范大学附属中学

省份：广东省

国家/地区：中国

指导教师姓名：桂鹏

指导教师单位：华南师范大学附属中学

论文题目：正 Ricci 曲率图的研究

正 Ricci 曲率图的研究

张朝钦

华南师范大学附属中学

日期：October 26, 2023

摘　　要

Ricci 曲率是由 Bakry 和 Emery 提出的，近年来 Ricci 曲率的概念被扩展到图中。本文利用 Lin-Lu-Yau 给出的 Ricci 曲率的定义，证明了关于具有较大最小度图的 Ricci 曲率的两个结论。我们证明了以下定理：

1. Ricci 曲率 $\kappa(x,y) \geq 1$ 对任意 $xy \in E(G)$ 成立的充分必要条件是 $\delta(G) \geq n-2$，$\delta(G)$ 为图 G 的最小度；
2. 若 $G = K_n - M$，其中 M 是完全图 K_n 中的一个最大匹配，则 $\kappa(x,y) = 1$ 对任意 $xy \in E(G)$ 成立；

关键词：Ricci 曲率，最小度，匹配

目录

1 引言 4

2 定义 4

3 引理 5

4 定理 6

5 总结 10

参考文献 11

1 引言

Ricci 曲率是黎曼几何中的一个基本概念，它反映了黎曼流形相对于标准欧氏空间的扭曲程度。Ricci 曲率在广义相对论等理论物理中有着重要作用。

Bakry 和 Emery 首先在度量空间上定义了 Ricci 曲率。随后，许多学者考虑将 Ricci 曲率的概念推广到包括图在内的其他形式的度量空间中。1996 年，Fan Chung 和 Yau 首次定义了图上 Ricci 曲率 [2]。后来，Lin 和 Yau 在图的框架中推广了 Bakry 和 Emery 的 Ricci 曲率的定义 [6]。2009 年，Ollivier 在包括图在内的任意度量空间上引入了粗糙 Ricci 曲率的概念 [7]。2011 年 Lin，Lu 和 Yau 将 Ollivier 提出的 Ricci 曲率的定义修改为一个极限的形式，得到一个稍有不同但更适合于图的定义 [4]。近年来，图的 Ricci 曲率也有广泛的其他科学领域的应用 [8]。

本文在图上考虑 Lin-Lu-Yau 定义下的 Ricci 曲率，对具有较大的最小度图的 Lin-Lu-Yau Ricci 曲率进行刻画。

2 定义

在这一节中我们给出了 Lin-Lu-Yau Ricci 曲率的定义 [1]。设 $G = (V, E)$ 是一个无向简单连通无权图，对任意 $x, y \in V$，符号 $x \sim y$ 表示顶点 x 和顶点 y 被 G 中的一条边连接。$N(x) = \{y|d(x, y) = 1\}$ 表示与顶点 x 相邻的顶点的集合，令 $d_x = |N(x)|$ 为顶点 x 的度数，即与顶点 x 相邻的边的数量。

在 $G = (V, E)$ 这个无向简单连通无权图中，定义概率分布为一个映射 $m : V \to [0, 1]$ 如下，其中 $\sum_{x\in V} m(x) = 1$ 对任意 $x \in V$ 都成立，$\alpha \in [0, 1]$，$d_x := \sum_{y\in V : y\sim x} 1$ 为顶点 x 的度。

$$m_x^\alpha(v) = \begin{cases} \alpha, & \text{if } v = x, \\ \frac{1-\alpha}{d_x}, & \text{if } v \in N(x), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

假设 $xy \in E$，m_x^α 和 m_y^α 是 V 上的两个概率分布，定义运输计划为一个将概率分布 m_x^α 转移至概率分布 m_y^α 的映射 $A : V \times V \to [0, 1]$，并满足以下约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{v\in V}, A(u, v) & = m_x^\alpha(u), \\ u \in V, & \\ \sum_{u\in V}, A(u, v) & = m_y^\alpha(v), \\ v \in V, & \\ A(u, v) & \geq 0. \end{cases}$$

其中 $A(u, v)$ 表示从顶点 u 到顶点 v 的运输量。从 m_x^α 到 m_y^α 的所有运输方案的集合定义为 $\Pi(m_x^\alpha, m_y^\alpha)$。

两个概率分布 m_x^α 和 m_y^α 之间的最优运输距离定义为：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \min_{A\in\Pi(m_x^\alpha, m_y^\alpha)} \sum_{u,v\in V} d(u,v)A(u,v).$$

因为两个概率分布之间的运输问题是一个线性优化问题，根据线性优化问题的 Kantorovich 对偶定理 [5]，最优运输距离也可表示为：

$$W(m_x^\alpha, m_y^\alpha) = \max_{f\in\mathcal{L}_1} \sum_{u\in V} f(u)\left(m_x^\alpha - m_y^\alpha\right).$$

其中 $\mathcal{L}_1$ 表示在 G 上满足 $|f(u)-f(v)|\le d(u,v)$，$u,v\in V$，$u\ne v$ 的所有 1-Lipschitz 函数的集合。

对任意 $x,y\in V$，Lin-Lu-Yau Ricci 曲率 $\kappa(x,y)$ 定义如下：

$$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(m_x^\alpha, m_y^\alpha)}{1-\alpha}.$$

定义集合 $P_x(y)=|N(x)\setminus N(y)|$，即 $P_x(y)$ 是顶点 x 的邻点中不与顶点 y 相邻的顶点个数。

3 引理

引理 1: $G=(V,E)$ 是一个简单图，顶点数 $n\ge 3$，若 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立，则 $P_x(y)\le 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立。

证: 假设存在边 $xy\in E(G)$，有 $P_x(y)\ge 2$，$z\in V(G)$ 是与顶点 x 相邻但不与顶点 y 相邻的一个顶点，则有

$$W(x,y)\ge\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{d_x}\right)+P_x(y)\cdot\frac{1-\alpha}{d_x}=\alpha+(P_x(y)-1)\cdot\frac{1-\alpha}{d_x}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}\le\frac{1-\alpha-(P_x(y)-1)\frac{1-\alpha}{d_x}}{1-\alpha}=1-\frac{P_x(y)-1}{d_x}<1$$

与 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立矛盾，所以假设不成立，应有 $P_x(y)\le 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立。

引理 2: $G=(V,E)$ 是一个简单图，顶点数 $n\ge 3$，若 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立，则对所有 $xy\in E(G)$，G 中不存在既不与顶点 x 相邻也不与顶点 y 相邻的顶点。

证: 假设存在一个顶点 $z\in V(G)$，顶点 z 即不与顶点 x 相邻也不与顶点 y 相邻对所有 $xy\in E(G)$ 成立。假设 $d_G(x,z)=2$ 或 $d_G(y,z)=2$（否则若 $d_G(x,z)\ge 3$，则在 (x,z) 最短路径中我们可以找到另一个具有此性质的顶点，故 $d_G(x,z)=2$。同理 $d_G(y,z)=2$。）假设 $d_G(x,z)=2$，则存在一个顶点 $w\in V$ 使得 $x\sim w\sim z$。我们有以下断言：

断言 a: $wy\notin E(G)$。

假设 $wy\in E(G)$，则 $w\sim y$。因为 $x\sim w\sim z$，但顶点 z 即不与顶点 x 相邻也不与顶点 y 相邻，这与 $P_x(y)\le 1$ 矛盾，所以假设不成立，应有 $wy\notin E(G)$，断言 a 得证。

断言 b: 顶点 x 的度数 $d(x)\ge 3$。

假设 $d(x)=2$，因为 $x\sim w\sim z$，w 与 y 不相邻，$P_x(y)\le 1$，$P_y(x)\le 1$，所以 $d(y)\le 2$。我们有 $w\sim z$，x 与 z 不相邻，$P_w(z)\le 1$，$P_z(w)\le 1$，则 $d(z)\le 2$。

如果 y 和 z 有一个公共邻点 v，则

$$W(x,w)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{2}\right)+2\cdot\frac{1-\alpha}{2}=\alpha+\frac{1-\alpha}{2}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha-\frac{1-\alpha}{2}}{1-\alpha}=\frac{1}{2}<1.$$

如果 y 和 z 没有公共邻点，则

$$W(x,w)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{2}\right)+3\cdot\frac{1-\alpha}{2}=\alpha+(1-\alpha)=1.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-1}{1-\alpha}=0.$$

以上两种情况都与 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立矛盾，所以假设不成立，应有 $d(x)\ge 3$，断言 b 得证。

根据断言 b，存在 $v\in V(G)$ 使得 $xv\in E(G)$。因为 $w\sim x\sim y$，w 与 y 不相邻，$P_x(y)\le 1$，$P_y(x)\le 1$，则 $wv\in E(G)$，$yv\in E(G)$。因为 $x\sim w\sim z$，z 与 x 不相邻，$P_w(z)\le 1$，则 $zw\in E(G)$。我们有 $w\sim v$ 和 $z\sim v$，但是 w 和 z 都与 y 不相邻，因此 $P_v(y)\ge 2$。由引理 1 我们有 $\kappa(v,y)<1$，这与 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立矛盾，所以假设不成立，对所有 $xy\in E(G)$，G 中不存在既不与顶点 x 相邻也不与顶点 y 相邻的顶点，引理 2 得证。

4 定理

定理 3: $G=(V,E)$ 是一个简单图，顶点数 $n\ge 3$，$\delta(G)$ 为 G 的最小度，则有 $\delta(G)\ge n-2\Leftrightarrow \kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立.

证:

($\Leftarrow$) 首先我们证明定理 3 的充分性。因为 $G=(V,E)$ 是一个顶点数 $n\ge 3$ 的简单图，$\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立。对于任意 $xy\in E(G)$，如果其余的 $n-2$ 个顶点都与顶点 x 和顶点 y 相邻，则 $d(x)=d(y)=n-1>n-2$。否则如果有 q 个顶点与顶点 x 相邻，$n-2-q$ 个顶点与顶点 y 相邻，根据引理 1 我们有 $P_x(y)\le 1$，则 $N(x)$ 中至少有 $q-1$ 个顶点与顶点 y 相邻，因此 $d(y)\ge 1+(n-2-q)+(q-1)=n-2$。同理可以得到 $d(x)\ge 1+q+(n-3-1)=n-2$。即有 $\delta(G)\ge n-2$ 成立，定理 3 的充分性得证。

($\Rightarrow$) 接下来通过列举所有可能的情况来证明定理 3 的必要性。因为 $\delta(G)\ge n-2$，所以 G 中所有顶点的度数为 $n-2$ 或 $n-1$。

情况 1: $d(x)=d(y)=n-2$，x 和 y 有 $n-3$ 个公共邻点和一个公共非邻点 w.

Figure 1: m_x^α and m_y^α when $d(x)=d(y)=n-2$, x and y have one common nonadjacent vertex

$$W(x,y)=\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha+\frac{1-\alpha}{2}}{1-\alpha}=\frac{n-1}{n-2}>1.$$

情况 2: $d(x)=d(y)=n-2$, x 和 y 有不同的不相邻顶点。假设顶点 a 是 x 的邻点但不与 y 相邻, b 是 y 的邻点但不与 x 相邻。因为 $d(a)\geq n-2$ 且 a 不与 y 相邻, 所以有 $d(a)=n-2$ 及 $a\sim b$.

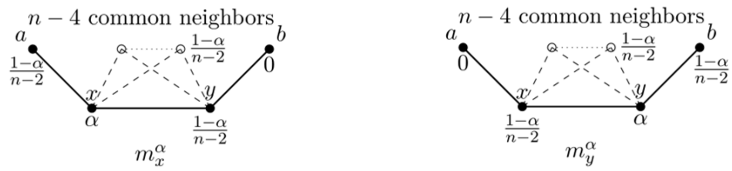

Figure 2: m_x^α and m_y^α when $d(x)=d(y)=n-2$, x and y have different nonadjacent vertex

$$W(x,y)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+\frac{1-\alpha}{n-2}=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

情况 3: $d(x)=n-2$, $d(y)=n-1$。假设顶点 z 是 y 的邻点但不与 x 相邻。因为 $d(az)\geq n-2$ 且 z 不与 x 相邻，所以有 $d(z)=n-2$，z 与 x 和 y 的 $n-3$ 个公共邻点公共邻点都相邻。

Figure 3: m_x^α and m_y^α when $d(x)=n-2$, $d(y)=n-1$

$$W(x,y)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1}\right)+(n-3)\left(\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1}\right)=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

情况 4: $d(x)=d(y)=n-1$，x 和 y 有 $n-2$ 个公共邻点。

$$W(x,y)=\alpha-\frac{1-\alpha}{n-1}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha+\frac{1-\alpha}{n-1}}{1-\alpha}=\frac{n}{n-1}>1.$$

综上，定理 3 对阶数至少为 3 的简单图都成立。

定理 4: $G=(V,E)$ 是一个简单图，顶点数 $n\geq 3$，M 是完全图 K_n 中的一个最大匹配，G 通过在 K_n 中删去 M 得到，则有 $G=K_n-M\Rightarrow\kappa(x,y)=1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立。

证: 通过列举所有可能的情况来证明定理 4，分为以下两种情况。

情况 1: 若 n 是偶数。

因为 n 是偶数，完全图 K_n 是 $(n-1)$-正则的，由 $G=K_n-M$ 有 $d(x)=n-2$ 对任意 $x\in V(G)$ 成立。假设 $u\in N(x)\setminus\{y\}$，$v\in N(y)\setminus\{x\}$，则

$$A(x,y)=\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2},\quad d(x,y)=1.$$

$$A(u,v)=\frac{1-\alpha}{n-2},\quad d(u,v)=1.$$

$$W(x,y)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+\frac{1-\alpha}{n-2}=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

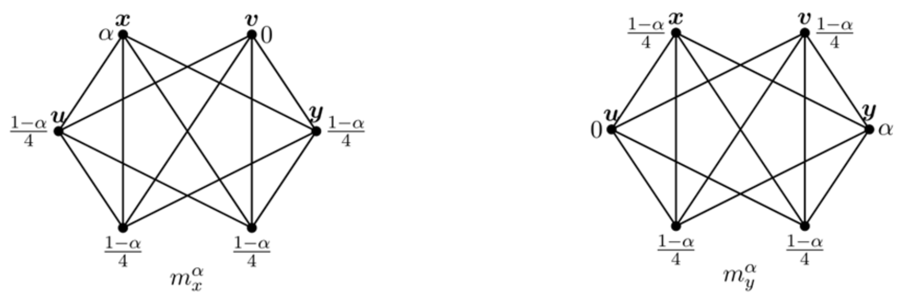

Figure 4: m_x^α and m_y^α on K_6-M

以 K_6-M 为例，有:

$$W(x,y)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{4}\right)+\frac{1-\alpha}{4}=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

情况 2: 若 n 是奇数。

设 K_n 中最大匹配的边数为 m，$m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。因为 n 是奇数，所以 G 中一定存在一个顶点与其余 $n-1$ 个顶点相邻，记作 y，则 $d(y)=n-1$，$d(x)=n-2$ 对任意 $x\in V(G)\setminus\{y\}$ 成立。

1. $d(x)=d(y)=n-2$，假设 $u\in N(x)\setminus\{y\}$，$v\in N(y)\setminus\{x\}$，则

$$A(x,y)=\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2},\quad d(x,y)=1.$$

$$A(u,v)=\frac{1-\alpha}{n-2},\quad d(u,v)=1.$$

$$W(x,y)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+\frac{1-\alpha}{n-2}=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

2. 对于顶点 y 和它的邻点之间的连边，$d(y)=n-1$，$d(x)=n-2$，假设 w 是顶点 y 的邻点但不是顶点 x 的邻点，$|N(x)\setminus\{y\}|=n-3$，假设 $u\in N(x)\setminus\{y\}$，则

$$A(u,w)=\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1},\quad d(u,w)=1.$$

$$A(x,y)=\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2},\quad d(x,y)=1.$$

$$A(x,w)=\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1},\quad d(x,w)=2.$$

$$W(x,y)=(n-3)\left(\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1}\right)+\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+2\left(\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1}\right)=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

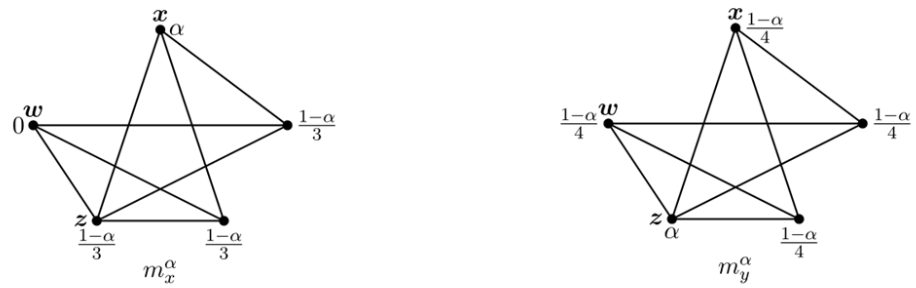

Figure 5: m_x^α and m_y^α on K_5-M

以 $K_5 - M$ 为例，有：

$$W(x,y) = 2\left(\frac{1-\alpha}{3} - \frac{1-\alpha}{4}\right) + \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{3}\right) + 2\left(\frac{1-\alpha}{3} - \frac{1-\alpha}{4}\right) = \alpha.$$

$$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

5 总结

通过上文所引用的引理，以及一些其他的数学方法，本文证明了如下两个结论

1. $\kappa(x,y) \geq 1$ 对任意 $xy \in E(G)$ 成立的充分必要条件是 $\delta(G) \geq n-2$，$\delta(G)$ 为图 G 的最小度；
2. 若 $G = K_n - M$，其中 M 是完全图 K_n 中的一个最大匹配，则 $\kappa(x,y) = 1$ 对任意 $xy \in E(G)$ 成立；

关于其他正曲率图，我们还有很多可以研究的地方，如，下一个更小的正曲率图的刻画，是一个值得深究的地方。

参考文献

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. American Mathematical Society, 2008.

[2] F. Chung and S. T. Yau. "Logarithmic Harnack Inequalities". In: *Mathematical Research Letters* 3.6 (1996), pp. 793–812.

[3] D. Cushing et al. "Erratum for Ricci-flat graphs with girth at least five". In: *Communications in Analysis and Geometry* 29.8 (2021), pp. 1775–1781.

[4] Y. Lin, L. Lu, and S. T. Yau. "Ricci Curvature of Graphs". In: *Tohoku Mathematical Journal* 63.4 (2011), pp. 605–627.

[5] Y. Lin, L. Lu, and S. T. Yau. "Ricci-flat graphs with girth at least five". In: *Communications in Analysis and Geometry* 22.4 (2014), pp. 671–687.

[6] Y. Lin and S. T. Yau. "Ricci Curvature and Eigenvalue Estimate on Locally Finite Graphs". In: *Mathematical Research Letters* 17.2-3 (2010), pp. 343–356.

[7] Y. Ollivier. "Ricci Curvature of Markov Chains on Metric Spaces". In: *Journal of Functional Analysis* 256.3 (2009), pp. 810–864.

[8] R. Sandhu et al. "Graph Curvature for Differentiating Cancer Networks". In: *Scientific Reports* 5.1 (2015), p. 12323.

致谢

衷心的感谢何伟骅教授引导我了解图论的概念，并向为图论着迷的我推荐了关于图论的多篇文章，感谢他对于我数学兴趣的支持和引导。

谨以此文向在本篇论文完成的过程中给予我指导和支持的桂鹏老师致以诚挚的感谢！

也衷心的感谢我的爸爸妈妈和老师们在生活和学习上给与我的关心、支持和爱护！

同时，也诚挚感谢丘成桐中学科学奖的主办方和工作人员给予我宝贵的机会参与这次比赛，能够有机会让我将我对数学的探索呈现出来。

正是您们给予的机会、支持、引导和帮助让我能够完成这篇学术论文，在此我深表感谢！