

参赛队员姓名： 吴蕊杉

中学： 北京市十一学校

省份： 北京市

国家/地区： 北方赛区

指导教师姓名： 王潇

指导教师单位： 北京市十一学校

论文题目： 基于博弈模型对不同视角下搭便车问题的分析

# 基于博弈模型对不同视角下搭便车问题的分析

吴蕊杉

## 摘要

目前,我国经济已经进入高质量发展阶段,团队劳动在社会发展中具有重要地位,在任何形式的团队劳动中,搭便车的现象一直存在。考虑到搭便车效应挫伤集体成员积极性,使集体成员获得的最终收益降低的不良影响,解决搭便车问题十分重要。本研究利用纳什均衡和博弈模型,从成员和管理者两个视角对搭便车效应进行了分析。

自奥尔森提出搭便车效应以来,中外学者对其进行了各种研究。这些研究或是从某一方面,或是综合考虑各个因素提出抑制搭便车效应的方法,没有考虑在团队成员和管理者的不同视角下对劳动分工和搭便车效应进行解读。本文先介绍了纳什均衡求成员最佳劳动时间策略的方法,然后分别考虑成员效率、感知时间代价函数对于合作分工中搭便车效应的影响,将搭便车效应分为 4 个试验进行研究。纳什均衡是指在博弈过程中,无论对方策略选择如何,当事人一方都会选择某个确定的策略。本文通过求解不同情景下成员的感知收益找出能够使成员在对方选择任意策略时感知收益都为最大值的劳动时间,得出成员劳动时间的纳什均衡解。在之后的试验中,本研究先通过数值模拟找出搭便车现象在不同情况下发生的一般规律,然后对得出的规律进行分析,分别研究了成员效率和感知时间代价函数相同时效率增加对成员最优劳动时间的影响;成员效率和感知时间代价函数相同时感知时间代价函数斜率变化对成员最优劳动时间的影响;成员感知时间代价函数相同,但存在效率差时的搭便车效应;成员效率相同,但感知时间代价函数斜率有差异时的搭便车效应。

根据 4 个试验的研究,本文总结了不少关于劳动分工、搭便车效应发生的趋势和解决方案的结论。其中包括搭便车效应发生的一般规律、额外训练和激励机制对于改善搭便车现象的有效性和管理者视角下达到成员感知的集体总产出最大化的方法。本文对于搭便车问题的解决提出了较为成熟的理论,但本文对于个体行为的预估还是存在过于简单的问题。这些结论在社会生活中的各个涉及合作的领域都用途广泛,例如企业中的团队协作、供应链中的合作等等。

**关键词:** 团队合作; 搭便车效应; 纳什均衡

# 目录

第1章 引言 .....	4
1.1 时代背景.....	4
1.2 技术背景.....	4
第2章 文献综述 .....	4
第3章 基本假设和建模 .....	6
3.1 符号说明及名词含义.....	7
3.2 基本假设 .....	9
3.3 模型的建立 .....	10
3.4 模型求解.....	11
3.4.1 甲乙劳动时间的纳什均衡解的求法 .....	11
3.4.2 试验一：探究二人效率增加对劳动分工中成员劳动时间的纳什均衡的影响.....	13
3.4.3 试验二：探究二人感知时间代价函数改变对劳动分工中成员劳动时间的纳什均衡的影响.....	15
3.4.4 试验三：探究存在效率差时的搭便车效应.....	17
3.4.5 试验四：探究二人感知时间代价函数不同时的搭便车效应 .....	19
第4章 研究结论 .....	21
4.1 搭便车效应发生的一般规律.....	22
4.2 搭便车效应的解决.....	22
4.3 达到成员感知的集体总产出最大化.....	22
4.4 研究不足.....	23
第5章 小结 .....	23
参考文献 .....	24
致谢页 .....	25

## 第1章 引言

### 1.1 时代背景

目前,我国经济已进入高质量发展阶段,并实施创新驱动发展战略。党的十九大首次提出高质量发展新表述,习近平总书记反复强调高质量发展的重要性,推动经济实现质的有效提升和量的合理增长。高质量发展是能够满足人民日益增长的美好生活需要的发展,是体现新发展理念的发展,是创新成为第一动力、协调成为内生特点、绿色成为普遍形态、开放成为必由之路、共享成为根本目的的发展<sup>[1]</sup>。为了响应党的二十大号召,并为国家经济高质量发展贡献力量,本研究着眼于“团队合作”这一有关经济发展的重要话题,基于博弈模型,分别从管理者视角和团队成员视角下对劳动分工和搭便车效应进行了分析。

### 1.2 技术背景

在工业化大背景下,随着社会经济发展,生产技术的革新,生产程序变得越来越复杂,一人完成生产程序中的所有任务效率极低,因此,与他人合作和分工变得极为重要。1773年,亚当·斯密在《国富论》中首次提出“劳动分工理论”,并全面阐明了大规模工业化生产背景下合作分工对于提高劳动生产率,增进国民财富的重要性。劳动分工是组织生产的一种方法,是指人们社会经济活动的划分和独立化、专门化<sup>[2]</sup>。劳动分工的优点可以概括为两方面,第一是专业化的分工可以提高成员劳动熟练度,进而提高效率;第二是由于个人责任清楚,可以减少劳动监督成本。

劳动分工理论在现实中运用广泛,工业生产过程中的供应链本质上也是劳动分工。供应链可理解为制造企业内部的链式联结,一个企业先产出相应成果,然后将成果转入到下一个企业,在一系列这种运营模式的重复下产出最终产品。一个企业要想从激烈的竞争中脱颖而出,在具有独特优势的同时还需通过供应链体系中的交易和分工。在世界经济趋于全球化的大背景下,供应链系统可延伸至全球范围,形成全球供应链。由于供应链本质上是企业内部进行分工合作共同制造某样产品,如何构建一个合适且有效的分工方式对构造一个完整的供应链尤为重要。而在合作分工中,搭便车现象的发生往往会降低团队合作的有效性,甚至破坏合作生态。因此,为了使搭便车现象尽可能少发生,本文通过博弈模型对团队合作中的搭便车效应进行了分析。

## 第2章 文献综述

搭便车效应由奥尔森在其著作《集体行动的逻辑》首次指出并开始研究。他在书中指出:在抱有共同利益的小集团中,存在着少数“剥削”多数的令人惊讶的倾向<sup>[3]</sup>,即搭便车的倾向。搭便车行为是一种投机行为,是成员为了获得自身能获得的更多利益而有意对集体做出

较少的贡献的行为。

智猪博弈模型可以部分解释搭便车现象。其描绘的场景是大猪和小猪吃粮食，猪圈左边有食槽，右边有按钮，按一下按钮会有 10 个单位的粮食倒入石槽中，但是由于体力损失，会消耗两个单位的利益。假设吃一个单位的粮食可以获得 1 个单位的利益，由于大猪在此场景下具有体格和速度上的优势，如果他们同时吃食物，大猪所获收益为 7，小猪为 3，如果大猪先吃，那么大猪会获得更多收益，小猪的收益则会减少，大猪所获得的收益为 9，小猪为 1，反之，如果小猪先开始吃，那么大猪所获得的收益 6，小猪为 4。

考虑到按按钮会使大猪或小猪的收益-2，大猪小猪收益矩阵如表 1 所示：

表 1. 智猪博弈中大猪小猪的收益矩阵

大猪收益：小猪收益	大猪策略		
小猪策略		按	不按
	按	7： 3	9： -1
	不按	4： 4	0： 0

显然，此时小猪的最优策略为不按，因为无论大猪选择哪种策略，小猪选择不按所获得的收益都比按按钮获得的收益多。而在确定小猪选择不按按钮后，大猪的最优策略是按按钮，因为这样其最终所获收益比不按按钮要多。如果小猪是局中人 I，大猪为局中人 II，用 A 表示局中人 I 的策略，B 表示局中人 II 的策略，用向量 (A, B) 表示两个局中人的策略组合，则 (不按, 按) 为该博弈的纳什均衡解。

在智猪博弈中，大猪明显占优势，小猪明显占劣势，因此大猪明知小猪搭便车却仍去劳动，而小猪选择等待，否则就会利益受损。因此，造成此类搭便车的根本原因是能力差异所造成的获益不均。这可以用于解释生活中一些搭便车现象，科技创新问题就是其一。企业进行科技创新开支过于庞大，而科技创新的结果却可以被很多企业同时利用。因此，生活中常常出现这样的现象：资金和生产能力都有限的小企业就是“小猪”，“搭乘”资金和生产能力都达到一定规模的大企业的“便车”，在大企业成功研发出新技术并将其进行推广后将他们的产品和大企业推出的同类产品一同销售。

自从奥尔森指出“搭便车”的现象，中外学者曾针对抑制搭便车效应从多个角度进行研究。从研究方法的角度，赵鼎新（2006）通过分析以囚徒困境为例的博弈论模型和以阿克塞罗德的著作《合作行为的发生》中的试验为例的社会行动者模拟模型，总结了形式模型在集体行动和社会运动的前景和存在的问题<sup>[4]</sup>；张华，邹东涛（2012）依据社会经济人个人效用最大化的条件定义了合作博弈空间，通过对比个人收益总和与集体收益的最优值，分析道德风险问题是否存在，并给出了通过改变合作战略空间使团队生产达到帕累托最优状态的特例<sup>[5]</sup>。

从管理机制的角度，黄斌（2003）通过构建物质强化激励机制模型，认为只通过物质奖惩的手段进行激励可能失效，其原因在于员工产出的不确定性和合理考评制度的缺乏<sup>[6]</sup>；赵

伟、韩文秀、罗永泰（1999）从激励理论出发，得出了“管理者采取的激励措施与团队成员为实现组织目标而付出的努力正相关”、“激励措施的边际效用与双方目标之间的差异程度正相关”等结论，为有效管理团队提供理论基础<sup>[7]</sup>；颜耀明（2009）表明由于团队生产过程中存在信息不对称、道德风险、搭便车以及难以实施准确的个人绩效考核的问题，团队协作中的监督、激励机制具有必要性，并强调了人性化管理的重要性<sup>[8]</sup>；田盈、蒲勇建（2003）通过构建团队协作静态博弈模型和重复博弈模型对团队成员最佳协作水平进行了分析并得出的一系列重要结论，如“重复博弈过程中，协作的重要性、效率工资水平与总产出分享水平都将促进团队成员间的协作”等<sup>[9]</sup>；孙锐、李海刚、石金涛（2006）基于委托代理的博弈理论，从团队成员晋升激励与薪资结构等方面出发，结合 Lazear、Holmstrom 等人的研究成果，总结了团队合作激励博弈机制目前的研究进展<sup>[10]</sup>。周燕、张麒麟、程奎（2010）改进了 Leuthold 的 L-D 实验，通过改变初始资金为 100 元、1 万元、100 万元，在三个情景下分别计算成员的搭便车指数，证明投资总额越大，搭便车行为越严重<sup>[11]</sup>；张朝孝、蒲勇建（2002）基于暗恋者模型分析了参与者风险规避等变量对合作博弈初始条件的影响并基于贝叶斯对合作博弈的学习效应的推断，强调了榜样的重要性<sup>[12]</sup>。基于多个因素，王济川、郭丽芳（2012）基于复制者动态模型建立下一期合作者所占比例变化的函数，将该函数进行求导并根据合作成本、惩罚成本、惩罚力度和监督力度四个变量间关系的变化绘制和分析了三种不同情况下的复制者动态方程相位，分析了物质水平等六个因素对抑制搭便车效应的影响<sup>[13]</sup>。

除了国内学者外，国外学者也曾进行过多项有意义的研究。Avadh Kishor 和 Rajdeep Niyogi(2017)指出搭便车效应的根本原因是成员追求个人利益最大化的目的和实现公共产品有效产出的目的之间的对抗，并通过将搭便车效应看作约束单目标优化问题，寻找一个能够满足两个目的的抑制机制，得出了每个参与者都必须贡献他们能力范围内的最大贡献量，搭便车效应才能得以解决，最后利用元启发式算法对该机制进行验证<sup>[14]</sup>。Sarah Mathew(2017)通过心理测验，将参与者分成两组，让两组参与者分别听关于懦弱和通奸的故事后完成有关对故事中施以惩罚的人的行为的看法的问卷，认为如果惩罚是在没有征求他人意见的情况下实施的，或是由不负责惩罚的群体实施的，团队成员会认为惩罚是错误的而不去惩罚搭便车者，构成二次搭便车<sup>[15]</sup>。

以上这些研究或是从某一方面，或是综合考虑各个因素提出抑制搭便车效应的方法，没有考虑在团队成员和管理者的不同视角下对劳动分工和搭便车效应进行分析。本研究的创新点在于，从一个日常情景出发，考虑团队成员和管理者在团队合作中追求的利益各有不同，分析如何通过调整各个因素得到一个能够满足双方需求的搭便车效应的处理办法。

### 第 3 章 基本假设和建模

本研究设置一个特定场景，即校园学术研究中的团队合作问题，通过纳什均衡的方法探究出一个让成员和管理者都满意的搭便车效应的处理办法和劳动分工方案。该模型也可推广

至一般性公共事务的团队管理问题中。本研究的研究场景具体为：甲、乙组合参与一次学习任务，这项学习任务为一项计时任务，即要在有限时间内产出成果，最终成果以一篇研究报告的形式呈现。

### 3.1 符号说明及名词含义

表 2. 符号说明及名词含义

符号	定义	单位
$e_1, e_2$	$e_1$ 为成员甲的效率， $e_2$ 为成员乙的效率； $e_1 \geq 0, e_2 \geq 0$	百字/小时
$m$	甲的劳动时间， $m \in \{Z   0 \leq m \leq x\}$	小时
$n$	乙的劳动时间， $n \in \{Z   0 \leq n \leq x\}$	小时
$x$	可劳动时间， $x \in Z$	小时
$a_{ij}$	甲的劳动时间为 $m$ ，乙的劳动时间为 $n$ 时甲的感知的收益， $i=m+1, j=n+1$	分数
$b_{ij}$	甲的劳动时间为 $m$ ，乙的劳动时间为 $n$ 时乙的感知的收益， $i=m+1, j=n+1$	分数
$A$	甲感知的收益所构成的矩阵， $A=(a_{ij})_{x+1 \times x+1}$ ， $i, j$ 分别表示行数和列数， $i=m+1, j=n+1$	\
$B$	乙感知的收益所构成的矩阵， $B=(b_{ij})_{x+1 \times x+1}$ ， $i, j$ 分别表示行数和列数， $i=m+1, j=n+1$	\
$\alpha$	纳什均衡下甲的劳动时间， $\alpha \in \{R   0 \leq \alpha \leq x\}$	小时
$\beta$	纳什均衡下乙的劳动时间， $\beta \in \{R   0 \leq \beta \leq x\}$	小时
$k$	达到纳什均衡时甲的搭便车指数	\
$d$	甲和乙效率的差值	百字/小时
$C(m), C(n)$	$C(m)$ 是指甲所感知的的时间代价函数， $C(n)$ 是指乙所感知的的时间代价函数	百字
$v_{ij}$	甲的劳动时间为 $m$ ，乙的劳动时间为 $n$ 时集体成员感知的集体总产出， $i=m+1, j=n+1$	百字
$\gamma$	纳什均衡下集体成员感知的集体总产出	百字
$V$	集体成员感知的集体总产出所构成的矩阵， $V=(v_{ij})_{x+1 \times x+1}$	\

本研究中， $e_1, e_2$  分别表示甲、乙的效率。由于  $e_1, e_2$  代表效率，所以可以用单位时间的产出作为单位，本研究以“小时”作为时间单位。然而，产出的单位需要根据具体情况而决定，因为本研究的场景为合作学习项目，最终成果以研究报告的形式呈现，研究报告为团队合作的产出，其中的有效内容越多越好，因此用有效字数作为产出的单位，最终得到的分

数以有效字数作为计量依据。由于时间单位选取“小时”，为了使单位更符合现实意义，本研究用“一百个有效字数”，即“百字”作为一个单位。 $d$ 为甲和乙效率的差值，其单位与效率单位一致，也为“百字/小时”。不仅如此，规定 $e_1, e_2$ 都大于等于0，也就是说不存在成员“捣乱”的状况。 $d=e_1-e_2$ ，当 $d=0$ 时，甲乙效率相等，当 $d>0$ 时， $e_1>e_2$ ，甲的效率比乙高，当 $d<0$ 时， $e_1<e_2$ ，甲的效率比乙低。

本研究将情景设置为限时任务，必须要在 $x$ 个小时内完成任务。在这 $x$ 个小时的限时中，甲乙二人劳动的时间都不能超过 $x$ 个小时，因此甲乙二人劳动的时间 $m, n$ 大于等于0小于等于 $x$ 。在本研究的情景中， $x, m, n$ 都被设为整数。

$a_{ij}, b_{ij}$ 分别表示甲乙二人在甲的劳动时间为 $m$ ，乙的劳动时间为 $n$ 时的感知收益。由于“感知收益”是指甲乙二人对最终获得的分数的心理评价，因此 $a_{ij}, b_{ij}$ 以分数为单位。 $i$ 表示甲所选择的策略编号。在前文的描述中， $m, n$ 都被设为大于等于0小于等于 $x$ 的整数，因此在甲选择劳动时间时，他一共有 $x+1$ 个策略可以选择，即可以选择劳动时间 $m=0, 1, 2, \dots, x$ ，将这 $x+1$ 个策略中的劳动时间从小到大排序并编号， $m=0$ 是策略1，策略编号 $i$ 为1， $m=1$ 是策略2，策略编号 $i$ 为2， $m=2$ 是策略3，策略编号 $i$ 为3……， $m=x$ 是策略 $x+1$ ，策略编号 $i$ 为 $m+1$ 。因此， $i=m+1$ 。相似地， $j$ 表示乙所选择的策略编号， $j=n+1$ 。

$A$ 与 $B$ 分别为甲和乙所感知的收益构成的矩阵，即所有 $a_{ij}, b_{ij}$ 构成的矩阵。由于甲乙各有 $x+1$ 种选择劳动时间的策略，因此 $A$ 与 $B$ 都是 $(x+1) \times (x+1)$ 的矩阵。

$\alpha$ 与 $\beta$ 分别表示达到纳什均衡时甲和乙的劳动时间，其单位为小时。由于甲与乙最终策略的纳什均衡解不一定唯一， $\alpha$ 与 $\beta$ 也不一定为确定的值。当存在多个纳什均衡解时， $\alpha$ 与 $\beta$ 的值分别为达到纳什均衡时甲和乙劳动时间的平均值。需要注意的是，这里之所以求取平均值是因为如果存在两种策略都能满足纳什均衡，那么局中人选择这两种策略的概率相等，因此不需要加权。

$k$ 是指达到纳什均衡时甲搭便车的搭便车指数，本研究中将 $k$ 设置为：

$$\alpha \cdot e_1 / \gamma - 1/2,$$

即甲的产出占实际总产出之比与 $1/2$ 的差值。之所以这样设计是基于前文对于搭便车的定义：由于搭便车行为是指团队成员对集体的贡献度较小，也就是指这个成员的产出占集体总产出比例较少，在二人小组中，规定某位成员的产出占集体总产出的比例为 $1/2$ 是判断这个成员是否搭便车的界限。此时，当甲的产出占集体实际总产出的比例 $\alpha \cdot e_1 / \gamma > 1/2$ 时，甲是被搭便车者，且 $|\alpha \cdot e_1 / \gamma - 1/2|$ 越大，甲的产出占集体实际总产出的比例越大，甲被搭便车的严重程度越大；反之，当甲的产出占集体实际总产出的比例 $\alpha \cdot e_1 / \gamma < 1/2$ 时，甲是搭便车者，且 $|\alpha \cdot e_1 / \gamma - 1/2|$ 越大，甲的产出占集体实际总产出的比例越小，甲搭便车的严重程度越大；除此以外，当甲的产出占集体实际总产出的比例 $\alpha \cdot e_1 / \gamma = 1/2$ 时，无搭便车现象发生，因为两人都对最终成果做出了相等的贡献。 $-1/2 \leq k \leq 1/2$ 。

$C(m)$ 是指甲所感知的的时间代价函数， $C(n)$ 是指乙所感知的的时间代价函数。其单位与“产

出”一致，是“百字”。

$v_{ij}$  是甲的劳动时间为  $m$ ，乙的劳动时间为  $n$  时集体成员感知的集体总产出。由于是产出，其单位都为“百字”。 $v_{ij}$  中的  $i$ 、 $j$  与前文  $a_{ij}$ 、 $b_{ij}$  中的  $i$ 、 $j$  表示含义一致，是指甲或乙的策略编号。 $V$  为集体成员感知的集体总产出所构成的矩阵。需要注意的是，由于在本研究中，集体成员共同享有最终的集体总产出，即一份研究报告，因此不存在利益分配的问题。

$\gamma$  表示纳什均衡下集体成员感知的集体总产出，以“百字”为单位，当存在多个纳什均衡解时， $\gamma$  的值为达到纳什均衡解时集体成员感知的集体总产出的平均值或期望值。由于  $m$ ， $n$ ， $e_1$ ， $e_2$  都大于等于 0， $\gamma \geq 0$ 。另外， $\gamma$  虽被定义为达到纳什均衡时集体成员感知的集体总产出，其在数值上与集体实际总产出相等，这一点在后文的假设中也有所说明。

## 3.2 基本假设

### a. 理性人假设

理性人假设是指进行经济决策的主体都是利己的，他们追求自身感知收益最大化，既不会盲从，也不会意气用事。感知收益是指决策主体进行某项决策后对所获得的利益产生的心理评价。本文以分数作为感知收益。感知收益与参与者所获得的实际收益不同，是一种主观感受和心理评价。

### b. 集体成员感知的集体总产出的假设

集体成员感知的集体总产出也等于集体实际总产出，并假设单位“分数”与单位“百字”的转换方式是：1 分=1 百字。

### c. 异质性假设

异质性假设是指在合作过程中，参与者各自效率不同，单位时间产出也不同。

### d. 有限任务假设

有限任务是指由于每个参与者的总投入时间有上限，完成的最大任务量也有上限，因此每个人的任务量固定。

### e. 时间代价是非线性的

合作者对自身投入的时间代价的感知与投入时间大小是非线性的映射关系。当投入的时间较低时，合作者所感知的的时间代价随投入时间增加而增加的速度较慢，相同数量的投入增多更容易接受；反之，当投入时间较高时，合作者所感知的的时间代价随投入时间的增加而增加的速度较快，因此相同数量的投入增加会使合作者感知到更大的时间代价，相比之下，合作者更不易接受。因此，合作者所感知的的时间代价函数不是线性的，而是凹函数。除此以外，感知时间代价函数因人而异，劳动时间一定时函数的斜率越小，感知的的时间代价在此时增加的速度越慢，越能接受劳动时间的增加。这在现实中也有迹可循。如上文所说，感知时间代价是指成员如果不耗费劳动时间去合作可创造的价值或可制造的产出，是一种机会成本。在现实合作过程中，增加少量时间用于参与合作时，牺牲的只是一些休闲时间，一旦增加的劳

动时间过长，影响的是正常工作生活，所以增加的劳动时间越多，付出的牺牲随时间增多的速度就越来越大。在本研究中，感知时间代价函数  $C(m)$  和  $C(n)$  需要满足以下条件：1、其定义域为  $m \in \{Z|0 \leq m \leq x\}$ 、 $n \in \{Z|0 \leq n \leq x\}$ 。2、根据上文的假设， $C(m)$  和  $C(n)$  为凹函数且在定义域范围内为增函数。3、 $C(0)=0$ ，这是因为当成员无付出时，自然不会产生时间代价。因此，虽然感知时间代价函数因人而异，本研究将其拟定为  $C(m)=f^m-1$ ， $C(n)=g^n-1$ ， $f>1$ ， $g>1$ 。根据指数函数的基本性质， $m$ 、 $n$  一定时， $f$ 、 $g$  越小，感知时间代价函数斜率越小。

#### f. 集体收益是线性的

在团队中，假设集体收益与集体成员投入量的关系是线性的，且集体收益与集体成员投入量成正比例关系，以简化集体成员投入到集体收益的转换过程。

#### g. 独立性限制

独立性限制是指只考虑单次合作中的博弈，不考虑从合作历史中积累的对某人的判断和本次合作在未来对某人声誉的影响，也不考虑多任务并行时每个人为了平衡多个任务的劳动时间和感知收益使个人感知的收益最大化的情况，只考虑本次合作中参与者所获得的感知收益。简化了现实情境，易于模型的分析 and 解读。

### 3.3 模型的建立

前文已提及本研究所涉及的场景，本章会对其进行更加具体的描述并基于此场景进行建模。

甲、乙组合参与一次学习任务，这项学习任务被设置为一项计时任务，即要在有限时间内产出成果，最终成果以一篇研究报告的形式呈现。两人的可劳动时间固定，因为这是基于现实情况而做出的设计。“可劳动时间”是从开始合作到最终任务截止的时间，在现实中，“可劳动时间”也非常常见，比如每天工作 8 小时，一次考试的时间是 1 个半小时等。在本情景中的研究成果为二人共享，不存在产出和收益的分配。本研究通过改变甲乙效率  $e_1$ ， $e_2$  和甲乙感知时间代价函数  $C(m)$ ， $C(n)$ ，求解甲乙二人在不同情况下选择劳动时间的最佳策略组合使得甲乙中的任意一人都无法通过单方面改变策略获得更大的收益，即找到甲乙二人劳动时间的纳什均衡对。通过“甲的搭便车指数”探究不同情况下搭便车效应的发生趋势。并通过设置管理者视角和团队成员视角，探究了解决劳动分工中出现的问题（包括集体成员感知的集体总产出低下和搭便车问题）的有效方案。其中，管理者视角是指虽然管理者没有参与劳动，但是实质上也是集体的一员，希望集体成员感知的集体总产出最大；集体成员视角是指集体成员希望自己的感知收益最大。规定：

$$v_{ij}=e_1m+e_2n \quad (1)$$

$v_{ij}$  是甲劳动时间为  $m$ ，乙劳动时间为  $n$  时集体成员感知的集体总产出， $e_1$ ， $e_2$  分别表示甲、乙的效率， $m$ ， $n$  分别为甲、乙的劳动时间。由于上文已经假设成员感知的集体总产出等于集体实际总产出，因此通过求解集体实际总产出的方式，即成员产出之和，计算成员感

知的集体总产出。

$$a_{ij}=v_{ij}-C(m) \tag{2}$$

$$b_{ij}=v_{ij}-C(n) \tag{3}$$

$a_{ij}, b_{ij}$  分别表示甲乙二人在甲的劳动时间为  $m$ , 乙的劳动时间为  $n$  时感知的收益。 $C(m), C(n)$  分别为甲乙的感知时间代价函数, 根据上文的描述,  $C(m)=f^m-1, C(n)=g^n-1, f>1, g>1$ 。由于收益=产出-代价, 因此成员的感知收益=集体成员感知的集体总产出-感知时间代价。

### 3.4 模型求解

本研究分 4 个试验进行, 分别得出不同的结论。由于每个试验的求解步骤不同, 下文会先总体分析一下本研究中甲乙劳动时间的纳什均衡解的求法, 之后再分开讲述。

#### 3.4.1 甲乙劳动时间的纳什均衡解的求法

纳什均衡, 又称非合作博弈均衡, 其含义是: 有这样一种策略组合, 在该策略组合上, 任何参与人单独改变策略都不会得到好处<sup>[16]</sup>。

Step 1: 确定可劳动时间  $x$ , 确定甲乙的效率  $e_1, e_2$  和感知时间代价函数  $C(m), C(n)$ 。

例如, 确定  $x=4, e_1=1, e_2=1, C(m)=2^m-1, C(n)=2^n-1$  (这里以及后文的所有数值都以上文符号说明中的单位为单位)。

Step 2: 由于本研究要求找出搭便车行为发生的趋势, 基于前文的符号说明,  $m, n$  为 0 至 4 的整数, 其单位为上文提及的“小时”。基于上文提及的 (1) (2) (3) 三个公式, 求出成员劳动时间为不同数量时集体成员所感知的集体总产出  $v_{ij}$ , 甲感知的收益  $a_{ij}$ , 乙感知的收益  $b_{ij}$  的变化, 绘制矩阵  $(V, A, B)$ 。特别地, 矩阵中各个数值的行数和列数取决于这些数字的  $i, j$  的值。

基于 Step 1 确定的数值和甲乙劳动时间变化绘制的矩阵  $(V, A, B)$  如表 3 所示:

表 3. 甲乙劳动时间变化绘制的矩阵  $(V, A, B)$

V, A, B		乙的劳动时间 (小时)				
		0	1	2	3	4
甲的劳动时间 (小时)	0	0, 0, 0	1, 1, 0	2, 2, -1	3, 3, -4	4, 4, -11
	1	1, 0, 1	2, 1, 1	3, 2, 0	4, 3, -3	5, 4, -10
	2	2, -1, 2	3, 0, 2	4, 1, 1	5, 2, -2	6, 3, -9
	3	3, -4, 3	4, -3, 3	5, -2, 2	6, -1, -1	7, 0, -8
	4	4, -11, 4	5, -10, 4	6, -9, 3	7, -8, 0	8, -7, -7

Step 3: 基于矩阵, 利用纳什均衡求解管理者视角下使集体成员感知集体总产出最大化的劳动时间分配策略和甲乙二人选择劳动时间的最佳策略。

在求解过程中, 将矩阵  $(V, A, B)$  拆分为矩阵  $V$ , 矩阵  $A$ , 矩阵  $B$ 。为了找出管理者

视角下集体成员感知的集体总产出，需要在矩阵  $V$  中找到  $v_{ij}$  的最大值及实现  $v_{ij}$  的最大值时的甲乙劳动时间。可见，无论甲乙效率或感知时间代价函数如何变化，只有当甲乙劳动时间都最大，即都为 4 小时的时候  $v_{ij}$  才能达到最大。

为了求出甲选择劳动时间的最佳策略，在矩阵  $A$  中，求解：

$$\max_{0 \leq i \leq 5} (\min_{0 \leq j \leq 5} a_{ij}) = a_{i^*j^*},$$

则策略  $i^*$  为甲的最优策略。这是在甲劳动时间相同时可能获得的感知收益中选取最小值，再将甲选择每种策略感知收益的最小值进行比较，达到其中的最大值时选择的策略就是甲的最优策略。由于当甲的劳动时间不动，乙的劳动时间每增多一小时，甲的感知收益就增多  $e_2$  百个有效字数，因此甲劳动时间相同时可能获得的感知收益最小值一定都是甲花费此时间下乙劳动时间为 0 时甲获得的感知收益值。由于甲劳动时间不动时，甲的感知收益随乙劳动时间的增多以相同的斜率线性增长，甲选择某策略时的感知收益最小值大于选择其他策略感知收益最小值必然证明甲选择此策略时，无论乙如何选择，甲获得的感知收益都高于相同情况下（指乙选择的投入时间一样）选择其他劳动时间获得的感知收益。于是，这个策略是甲的最优策略。

例如，在表 3 中：

由于当甲选择投入 0 和 1 个小时的劳动时间时，无论乙如何选择，其感知收益都高于相同情况下（指乙选择的投入时间一样）投入其他劳动时间的感知利益。显然，甲应当选择投入 0 或 1 个小时的劳动时间的策略。

相似地，为了求出乙选择劳动时间的最佳策略，在矩阵  $B$  中，求解：

$$\max_{0 \leq j \leq 5} (\min_{0 \leq i \leq 5} b_{ij}) = b_{i^*j^*},$$

则策略  $j^*$  为乙的最优策略。这是在乙劳动时间相同时可能获得的感知收益中选取最小值，再将乙选择每种策略感知收益的最小值进行比较，达到其中的最大值时选择的策略就是乙的最优策略。由于当乙的劳动时间不动，甲的劳动时间每增多一小时，乙的感知收益就增多  $e_1$  百个有效字数，因此乙劳动时间相同时可能获得的感知收益最小值一定都是乙花费此时间下甲劳动时间为 0 时乙获得的感知收益值。由于乙劳动时间不动时，乙的感知收益随甲劳动时间的增多以相同的斜率线性增长，乙选择某策略时的感知收益最小值大于选择其他策略感知收益最小值必然证明乙选择此策略时，无论甲如何选择，乙获得的感知收益都高于相同情况下（指甲选择的投入时间一样）选择其他劳动时间获得的感知收益。于是，这个策略是乙的最优策略。

例如，在表 3 中：

由于当乙选择投入 0 和 1 个小时的劳动时间时，无论甲如何选择，其感知收益都高于相同情况下（指甲选择的投入时间一样）投入其他劳动时间的感知利益。显然，乙应当选择投入 0 或 1 个小时的劳动时间的选择。

最终算得  $(i^*, j^{**})$  为甲乙的最优策略组合，即甲乙的纳什均衡对。此时甲乙都无法通过单方面改变博弈策略使自己拥有更多的感知收益。

例如，在表 3 中：

$(0, 0) (0, 1) (1, 0) (1, 1)$  为甲乙二人的最优策略组合。此时当甲选择投入 1 个单位时间的劳动时，无论乙如何选择，其感知收益等于相同情况下投入 0 个单位时间的劳动所获得的感知收益；当乙选择投入 1 个单位时间的劳动时，无论甲如何选择，其感知收益等于相同情况下投入 0 个单位时间的劳动所获得的感知收益。因此，对甲乙而言，选择投入 1 个单位时间的劳动与选择投入 0 个时间的劳动是等概率的，且  $(0, 1) (1, 1) (1, 0) (0, 0)$  均为  $e_1=1, e_2=1, x=4, C(m)=2^m-1, C(n)=2^n-1$  条件下的最优策略组合。

然而，从管理者视角下，集体成员感知集体总产出最大为 4，上述 4 个策略组合都无法达到集体成员感知的集体总产出最大化的要求。

#### Step 4:

根据达到纳什均衡时甲乙的策略组合，计算纳什均衡下甲乙的劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，集体成员感知的集体总产出  $\gamma$  和甲的搭便车指数  $k$ 。

例如，在表 3 中：

甲选择劳动时间为 0 小时或 1 小时时能达到纳什均衡，根据符号说明部分的描述， $\alpha$  是这两个值的平均值， $\alpha = (0+1) / 2=0.5$ 。

乙选择劳动时间为 0 小时或 1 小时时能达到纳什均衡，根据符号说明部分的描述， $\beta$  是这两个值的平均值， $\beta = (0+1) / 2=0.5$ 。

甲乙二人最优策略组合为  $(0, 0) (0, 1) (1, 0) (1, 1)$  时，成员感知的集体总产出分别为 0, 1, 1, 2， $\gamma = (0+1+1+2) / 4=1$ 。

根据上文的公式， $k=1 \times 0.5 / 1 - 1/2=0$ 。

以上就是本实验求纳什均衡解的基本求法。下文将分试验对求解过程进行描述。

### 3.4.2 试验一：探究二人效率增加对劳动分工中成员劳动时间的纳什均衡的影响

Step 1: 根据上文关于纳什均衡解的求法，先确定  $x=4, e_1=1, e_2=1, C(m)=2^m-1, C(n)=2^n-1$ ，求出该情况达到纳什均衡时甲乙的劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，集体成员感知的集体总产出  $\gamma$ ，根据  $k = \alpha \cdot e_1 / \gamma - 1/2$ ，计算  $k$  并记录。

Step 2: 保持  $x=4, C(m)=2^m-1, C(n)=2^n-1$  不变， $e_1=e_2$ ，增加  $e_1$  与  $e_2$  的值做多次试验，计算达到纳什均衡时甲乙劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，以及集体成员感知的集体总产出  $\gamma$  和甲的搭便车指数  $k$  并记录。绘制成表 4。

表 4. 探究二人效率增加对劳动分工中成员劳动时间的纳什均衡的影响

编号	X (小时)	C(m) (百字)	C(n) (百字)	e <sub>1</sub> (百字/小时)	e <sub>2</sub> (百字/小时)	α (小时)	β (小时)	γ (百字)	k
1	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	1	1	0.5	0.5	1	0
2	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	2	2	1.5	1.5	6	0
3	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	3	3	2	2	12	0
4	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	4	4	2.5	2.5	20	0
5	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	5	5	3	3	30	0
6	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	6	6	3	3	36	0
7	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	7	7	3	3	42	0
8	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	8	8	3.5	3.5	56	0
9	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	9	9	4	4	72	0
10	4	2 <sup>m-1</sup>	2 <sup>n-1</sup>	10	10	4	4	80	0

通过表 4，可以得出以下 2 个结论：

第一，由于无论  $e_1, e_2$  如何变，当可劳动时间不变，甲乙的感知时间代价函数相等且不变，且甲乙的效率相等时，甲的搭便车指数一直为 0，因此没有搭便车现象发生。这是因为当甲乙效率一致，甲乙感知时间代价一致且甲乙可选择的策略一致时，矩阵 B 实际上是 A 的转置，即  $B=A^T$ ，因此甲乙最优策略组合  $(i^*, j^{**})$  中， $i^*=j^{**}$ 。最终，根据最优策略组合算得的  $\alpha$  和  $\beta$  相等，k 为 0。因此，当两人效率、感知时间代价函数都相同且在博弈中有相同的策略可供选择时，不存在搭便车现象。只有当可供选择的策略变化或两人效率、感知时间代价函数中的一个出现差异时才会出现搭便车效应。这与前文提到的智猪博弈证明的搭便车效应的本质原因吻合。

第二，在研究范围内，当  $e_1=e_2 \leq 8$  时，虽然无搭便车现象发生，但是达到纳什均衡时甲乙的劳动时间都无法使集体成员感知的集体总产出最大化，因为上文已经证明只有当甲乙劳动时间都最大，即都为 4 小时的时候集体成员感知的集体总产出才能达到最大，而此时  $\alpha = \beta < 4$ ，所以在满足集体成员追求个人感知收益最大化的同时，没有满足管理者，即此情景下的老师追求成员感知的集体总产出最大化的要求。然而，当甲乙效率越来越大时，终于能够满足集体成员和老师双方的要求，因为如表格所示， $e_1=e_2=9$  或  $e_1=e_2=10$  时， $\alpha = \beta = 4$ 。这是因为在上述条件下，由于甲劳动时间相同时可能获得的感知收益最小值一定都是甲花费此时间下乙劳动时间为 0 时甲获得的感知收益值，如果要想让劳动时间为 4 成为甲的最优策略必须满足  $a_{51}$  在  $j=0$  时的所有甲的感知收益值中最大，也就是指  $e_1$  满足：

$$4e_1+1-f^4 > 3e_1+1-f^3 \tag{4}$$

$$4e_1+1-f^4 > 2e_1+1-f^2 \tag{5}$$

$$4e_1+1-f^4 > e_1+1-f \tag{6}$$

$$4e_1+1-f^4>0 \quad (7)$$

在上述不等式中,  $f$  为常数。经过整理, 由  $4e_1+1-f^4>3e_1+1-f^3$  得:

$$e_1>f^3(f-1) \quad (8)$$

由于  $f>1$ ,  $f^3(f-1)>f^2(f-1)$ , 因此如果  $e_1>f^3(f-1)$  成立, 则  $e_1>f^2(f-1)$ 。又因为  $3e_1+1-f^3-(2e_1+1-f^2)=e_1-f^2(f-1)>0$ , 所以  $3e_1+1-f^3>2e_1+1-f^2$ 。最终, 不等式 (4) (5) 的解集必然是不等式 (4) 的解集。同理, 由于  $f>1$ ,  $f^2(f-1)>f(f-1)$ , 因此如果  $e_1>f^2(f-1)$  成立, 则  $e_1>f(f-1)$  也成立, 且  $2e_1+1-f^2-(e_1+1-f)=e_1-f(f-1)>0$ , 所以  $2e_1+1-f^2>e_1+1-f$ ; 由于  $f>1$ ,  $f(f-1)>f-1$ , 因此如果  $e_1>f(f-1)$  成立, 则  $e_1>f-1$  也成立, 且  $e_1+1-f-0=e_1-(f-1)>0$ , 所以  $e_1+1-f>0$ 。综上所述, 一旦 (8) 式成立, 则  $3e_1+1-f^3>2e_1+1-f^2>e_1+1-f>0$ , 最终不等式组 (4) (5) (6) (7) 的解集必然是不等式 (4) 的解集, 也就是不等式 (8) 的解集。所以为了使劳动时间为 4 成为甲的最优策略必须满足  $e_1>f^3(f-1)$ 。

根据前文的拟定, 将  $f=2$  带入, 得出  $e_1>8$  是不等式 (8) 的解集。因此只有  $e_1>8$  时, 甲的感知收益达到最优值时劳动时间为 4。同理, 由于  $e_1=e_2$ , 根据上述求解不等式组的方法也可以求得只有  $e_2>8$  时, 乙的感知收益达到最优值时劳动时间为 4, 因此只有  $e_1=e_2>8$  时可以同时满足甲乙感知的收益最大和管理者追求集体成员感知的集体总产出最大的要求。总之, 无论  $f, g$  取何值, 为了同时满足集体成员和管理者不同的要求, 根据上文中的 (8) 式, 都需要集体成员的效率足够大。生活中的管理者、组织者在挑选团队成员时会倾向于选择效率高且经验丰富的人, 就是为了通过使他们劳动时间的纳什均衡与最大劳动时间重合, 达到集体总产出的最大化。同时, 由于劳动分工时将一项任务专门化也能够提高成员工作效率, 从而提升集体实际总产出和成员感知的集体总产出。

### 3.4.3 试验二: 探究二人感知时间代价函数改变对劳动分工中成员劳动时间的纳什均衡的影响

Step 1: 根据上文关于纳什均衡解的求法, 先确定  $x=4, e_1=1, e_2=1, C(m)=1.25^m-1, C(n)=1.25^n-1$ , 求出该情况达到纳什均衡时甲乙的劳动时间  $\alpha, \beta$ , 集体成员感知的集体总产出  $\gamma$  和甲的搭便车指数  $k$  并记录。

Step 2: 保持  $x=4, e_1=e_2=1$  不变。由于  $C(m)=f^m-1, C(n)=g^n-1$ , 保持  $f=g$ , 改变  $f$  与  $g$  的值做多次试验, 计算达到纳什均衡时甲乙劳动时间  $\alpha, \beta$ , 集体成员感知的集体总产出  $\gamma$  和甲的搭便车指数  $k$  并记录。绘制成表 5。

表 5. 探究二人感知时间代价函数改变对劳动分工中成员劳动时间的纳什均衡的影响

编号	X (小时)	C(m) (百字)	C(n) (百字)	e <sub>1</sub> (百字/小时)	e <sub>2</sub> (百字/小时)	α (小时)	β (小时)	γ (百字)	k
1	4	1.25 <sup>m</sup> -1	1.25 <sup>n</sup> -1	1	1	4	4	8	0
2	4	1.5 <sup>m</sup> -1	1.5 <sup>n</sup> -1	1	1	2	2	4	0
3	4	1.75 <sup>m</sup> -1	1.75 <sup>n</sup> -1	1	1	1	1	2	0
4	4	2 <sup>m</sup> -1	2 <sup>n</sup> -1	1	1	0.5	0.5	1	0
5	4	2.25 <sup>m</sup> -1	2.25 <sup>n</sup> -1	1	1	0	0	0	0
6	4	2.5 <sup>m</sup> -1	2.5 <sup>n</sup> -1	1	1	0	0	0	0

通过表 5，可以得出以下 2 个结论：

第一，由于无论 C(m), C(n) 如何变，当可劳动时间不变，甲乙的效率相等且不变，且甲乙的感知时间代价函数相等时，甲的搭便车指数一直为 0，因此没有搭便车现象发生。这一点在前文已经运用矩阵的转置进行了说明，在此不做过多赘述。

第二，在研究范围内，当 f、g 取 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5 时，虽然无搭便车现象发生，但是达到纳什均衡时甲乙的劳动时间都无法使集体成员感知的集体总产出最大化，因为上文已经证明只有当甲乙劳动时间都最大，即都为 4 小时的时候集体成员感知的集体总产出才能达到最大，而此时  $\alpha = \beta < 4$ ，所以在满足集体成员追求个人感知收益最大化的同时，没有满足管理者追求成员感知的集体总产出最大化的要求。然而，当甲乙感知时间代价函数在定义域范围内的斜率越来越小时，就可以使达到纳什均衡时的劳动时间逐渐接近达到集体成员感知的集体总产出最大化的劳动时间，因为如表格所示， $f=g=1.25$ ， $\alpha = \beta = 4$ 。这可以用前文提及的不等式(8)以及其在 e<sub>2</sub> 和 g 的延伸来说明。将 e<sub>1</sub>=e<sub>2</sub>=1 带入，解得当  $f=g < 1.380277569$  时，才能同时满足团队成员追求自身感知收益最大化的同时满足管理者集体成员感知的集体总收益最大化的要求。由于上述模拟的数据中，只有  $1.25 < 1.380277569$ ，所以只有这一个实验达到了集体成员和管理者共同的要求。总之，无论 e<sub>1</sub>、e<sub>2</sub> 如何变化，f 和 g 必须在大于 1 的同时小于某个大于 1 的实数才能使甲乙劳动时间的纳什均衡解满足成员感知的集体总收益最大化。根据前文的说明，当感知时间代价函数的形式为指数函数时，求解不等式组  $0 > f^3(f-1) - e_1$ ,  $f > 1$  和不等式组  $0 > g^3(g-1) - e_2$ ,  $g > 1$  就可以找出 f, g 能满足成员和管理者共同要求的取值范围。试验四会通过 Matlab 绘图的方式展示感知时间代价函数为指数函数时，e<sub>1</sub>、e<sub>2</sub> 的值和 f、g 的变化与成员的策略选择的关系。

本试验还可以解释激励机制对于团队劳动分工的积极作用。由于给予员工适当的激励，例如增加任务总收益或提高任务难度，能够降低成员的溢出效果，从而改变其感知时间代价，使感知时间代价函数的斜率降低，有利于管理者在成员效率不变的前提下实现集体成员感知的集体总产出最大化。

### 3.4.4 试验三：探究存在效率差时的搭便车效应

Step 1: 根据上文关于纳什均衡解的求法，先确定  $x=4$ ,  $e_1=5$ ,  $e_2=1$ ,  $C(m)=2^m-1$ ,  $C(n)=2^n-1$ ，求出该情况达到纳什均衡时甲乙的劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，集体成员感知的集体总产出  $\gamma$ ，乙效率差  $d$  以及甲的搭便车指数  $k$  并记录。

Step 2: 保持  $x=4$ ,  $e_1=5$ ,  $C(m)=2^m-1$ ,  $C(n)=2^n-1$  不变，改变  $e_2$  的值做多次试验，计算达到纳什均衡时甲乙劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，集体成员感知的集体总产出  $\gamma$ ，甲乙效率差  $d$  和甲的搭便车指数并记录。绘制成表 6。

表 6. 探究存在效率差时的搭便车效应

编号	X (小时)	C(m) (百字)	C(n) (百字)	$e_1$ (百字/小时)	$e_2$ (百字/小时)	$d$ (百字/小时)	$\alpha$ (小时)	$\beta$ (小时)	$\gamma$ (百字)	$k$
1	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	1	4	3	0.5	15.5	29/62
2	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	2	3	3	1.5	18	1/3
3	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	3	2	3	2	21	3/14
4	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	4	1	3	2.5	25	11/98
5	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	5	0	3	3	30	0
6	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	6	-1	3	3	34	-1/17
7	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	7	-2	3	3	36	-1/12
8	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	8	-3	3	3.5	43	-13/86
9	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	9	-4	3	4	49	-19/98
10	4	$2^m-1$	$2^n-1$	5	10	-5	3	4	55	-5/22

基于表 6，可以得出以下结论：

第一，无论  $e_2$  的值如何改变，当  $e_1=5$ ,  $C(m)=2^m-1$  不变时， $\alpha$  永远等于 3。可见纳什均衡下最佳劳动时间不随对方的效率而改变。这是可以通过纳什均衡求解的性质解释的。上文说明，求解甲劳动时间的纳什均衡解时，需要求解：

$$\max_{0 \leq i \leq 5} (\min_{0 \leq j \leq 5} a_{ij}) = a_{i^*j^*},$$

则策略  $i^*$  为甲的最优策略，并指出甲劳动时间相同时可能获得的感知收益最小值一定都是甲花费此时间下乙劳动时间为 0 时甲获得的感知收益值。乙劳动时间为 0 说明甲劳动时间相同时可能获得的感知收益最小值不随乙的效率而改变。所以，最终将甲选择每个策略时可能获得的感知收益最小值对比得出的最优策略也不随乙效率的变化而改变。也就是说，如果效率和感知时间代价函数不变，成员劳动时间的纳什均衡解不变。

第二，由于当  $d < 0$  时， $k < 0$ ，当  $d > 0$  时， $k > 0$  可知，搭便车的基本规律是：当二人感知时间代价函数一定时，存在效率差时会出现搭便车效应，且效率低的人搭效率高的人的便车。

由于效率差  $4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4 > -5$  对应的甲的搭便车指数  $29/62 > 1/3 > 3/14 > 11/98 > 0 > -1/17 > -1/12 > -13/86 > -19/98 > -5/22$  可知，效率差的绝对值越大，甲被搭便车或搭便车的程度越严重。这是由于在感知时间代价函数不变且相同的情况下，成员效率越高，达到纳什均衡时的劳动时间也就越大，对总体的贡献度就更大；反之，成员效率越低，达到纳什均衡时的劳动时间也就越小，对总体的贡献度越小，更容易搭效率高者的便车。再加上本身效率的不均衡，也导致搭便车严重程度随效率差增加而增加。下面是运用数学公式证明的感知时间代价函数确定时效率高对于劳动时间最优选择的影响：

已知甲劳动时间为 4, 3, 2, 1, 0 时可能获得的感知收益最小值为  $4e_1+1-f^4$ ,  $3e_1+1-f^3$ ,  $2e_1+1-f^2$ ,  $e_1+1-f$ , 0。其中感知时间代价函数固定， $f$  为常数且  $f > 1$ 。设函数：

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 \\ a_{21} &= e_1 + 1 - f \\ a_{31} &= 2e_1 + 1 - f^2 \\ a_{41} &= 3e_1 + 1 - f^3 \\ a_{51} &= 4e_1 + 1 - f^4 \end{aligned}$$

求得：

当  $e_1 < f-1$  时， $a_{11} > a_{21} > a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1 = f-1$  时， $a_{11} = a_{21} > a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $f-1 < e_1 < f(f-1)$  时， $a_{11} < a_{21} > a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1 = f(f-1)$  时， $a_{11} < a_{21} = a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $f(f-1) < e_1 < f^2(f-1)$  时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1 = f^2(f-1)$  时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} = a_{41} > a_{51}$ ；当  $f^2(f-1) < e_1 < f^3(f-1)$  时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1 = f^3(f-1)$  时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{41} = a_{51}$ ；当  $f^3(f-1) < e_1$  时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{41} < a_{51}$ 。由此可见，上文提到的效率越高达到纳什均衡时的劳动时间越高的结论是正确的。大量的劳动时间，以及较高的效率，导致效率高者在劳动中容易被搭便车，而效率低者容易搭便车。

分析完效率差造成的搭便车发生规律，如何解决这样的搭便车问题也值得探讨。上文提及，劳动分工和激励机制能在二者效率和感知时间代价相同时促使成员达到纳什均衡时的劳动时间增多，这两种机制也可能对搭便车效应造成一定影响。

首先，劳动分工并不能解决效率差带来的搭便车行为。这是因为劳动分工提高成员效率的原因是因为其将一项任务分为多项子任务，使每个人的工作更加专门化，促使他们因分工而提高熟练度。然而，在搭便车者提高自身熟练度的同时，被搭便车者的熟练度也在提高，且由于其劳动时间比搭便车者更多，被搭便车者的熟练度可能有更大的提高，可能无法减少二者之间的效率差，也无法改变二者的感知时间代价函数。由于每个成员的最优策略是由各自的效率和感知时间代价函数决定的，劳动分工无法解决最终成员最优策略的差异，也无法解决搭便车效应。然而，给予搭便车者额外的培训可以使其熟练度有更高更快的增长，使其培训后的效率与原本的被搭便车者相同，在感知时间代价相同的基础上，搭便车效应得以解决，之后又通过一系列劳动分工，提高双方效率，以达到集体成员感知的集体总产出最高，达到管理者需求。要注意的一点是，提供培训需要管理者花费一些时间，金钱或机会成本，

需要管理者根据具体情况做出抉择。

激励机制可以解决效率差带来的搭便车行为。如上文所说，适当的激励通过改变感知时间代价函数调整成员在效率不变的情况下对于劳动时间的最优选择策略，使原本的搭便车者的产出与集体总产出的比值达到一定程度的增大，最终能使这个比值增大到  $1/2$ ， $k=0$ 。然而，通过激励机制解决效率差带来的搭便车行为存在一些限制，即激励机制只能解决搭便车问题，不能使集体成员感知的集体总收益达到管理者要求。由于成员效率由成员本身的能力、经历决定，激励机制无法提高成员效率，在成员存在效率差时，为了使成员为集体产出的贡献率一致，效率低的人必须劳动更长时间，这就解决搭便车问题后双方劳动时间不一。而达到管理者追求成员感知的集体总收益最大化的要求需要成员双方劳动时间在此情况下都为 4 小时。因此，激励机制虽然可以解决搭便车行为，但是无法使搭便车行为被解决后双方劳动时间最大化从而达到管理者要求。

### 3.4.5 试验四：探究二人感知时间代价函数不同时的搭便车效应

Step 1: 根据上文关于纳什均衡解的求法，先确定  $x=4$ ， $e_1=1$ ， $e_2=1$ ， $C(m)=1.25^m-1$ ， $C(n)=2^n-1$ ，求出该情况达到纳什均衡时甲乙的劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，集体成员感知的集体总产出  $\gamma$  和甲的搭便车指数  $k$  并记录。

Step 2: 保持  $x=4$ ， $e_1=e_2=1$  不变。由于  $C(m)=f^m-1$ ， $C(n)=g^n-1$ ，保持  $g=2$ ，改变  $f$  的值做多次试验，计算达到纳什均衡时甲乙劳动时间  $\alpha$ 、 $\beta$ ，集体成员感知的集体总产出  $\gamma$  和甲的搭便车指数  $k$  并记录。绘制成表 7。

表 7. 探究二人感知时间代价函数不同时的搭便车效应

编号	X (小时)	C(m) (百字)	C(n) (百字)	$e_1$ (百字/小时)	$e_2$ (百字/小时)	$\alpha$ (小时)	$\beta$ (小时)	$\gamma$ (百字)	k
1	4	$1.25^m-1$	$2^n-1$	1	1	4	0.5	4.5	7/18
2	4	$1.5^m-1$	$2^n-1$	1	1	2	0.5	2.5	3/10
3	4	$1.75^m-1$	$2^n-1$	1	1	1	0.5	1.5	1/6
4	4	$2^m-1$	$2^n-1$	1	1	0.5	0.5	1	0
5	4	$2.25^m-1$	$2^n-1$	1	1	0	0.5	0.5	-1/2
6	4	$2.5^m-1$	$2^n-1$	1	1	0	0.5	0.5	-1/2

双方效率相同时，感知时间代价函数对搭便车现象的影响与双方感知时间代价相同时，效率对搭便车现象的影响相似，但是其中也有区别。根据表 7 和对公式的推断，得出以下结论：

第一，与上文相似，无论  $e_1$  的值如何改变，当  $e_2=1$ ， $C(n)=2^n-1$  不变时， $\beta$  永远等于 0.5。可见纳什均衡下最佳劳动时间不随对方的效率而改变。上文已经证明了如果效率和感知时间代价函数不变，成员劳动时间的纳什均衡解不变，本文不再赘述。

第二，与试验三不同，成员感知时间代价函数的斜率差异的大小在一些情况下对搭便车程度无影响。这是因为当  $f, g$  ( $f \neq g$ ) 共同处于某个区间内时，两个成员选择的最优策略相同，又因为两个成员的效率相同，因此二人的产出相同， $k=0$ ，不存在搭便车效应。为证明当  $f, g$  共同处于某区间内最优策略不变，并进一步说明试验二中提及的使得 4 小时劳动时间的策略为最优策略的  $f, g$  的取值范围，可以用到前文提及的函数：

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 \\ a_{21} &= e_1 + 1 - f \\ a_{31} &= 2e_1 + 1 - f^2 \\ a_{41} &= 3e_1 + 1 - f^3 \\ a_{51} &= 4e_1 + 1 - f^4 \end{aligned}$$

此时，由于甲乙效率  $e_1, e_2$  相等，甲乙不同劳动时间的最小收益值函数是一样的，这里只用甲的不同劳动时间可获得的最小收益值函数进行分析。将上述函数进行处理，得到：

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{21} - a_{11} = e_1 + 1 - f \\ z_2 &= a_{31} - a_{21} = e_1 + f - f^2 \\ z_3 &= a_{41} - a_{31} = e_1 + f^2 - f^3 \\ z_4 &= a_{51} - a_{41} = e_1 + f^3 - f^4 \end{aligned}$$

然后，用 Matlab 绘制  $z_1, z_2, z_3, z_4$  的图像，得出的 4 个曲面如图所示：

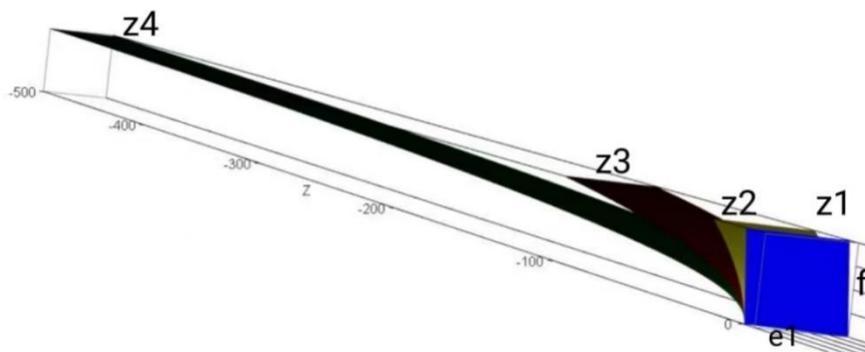


图 1.  $z_1, z_2, z_3, z_4$  的图像

在图 1 所示， $z$  表示  $z_1, z_2, z_3, z_4$  的数值。将该图像调整至  $z=0$  时的视角，则得出的图像如下：

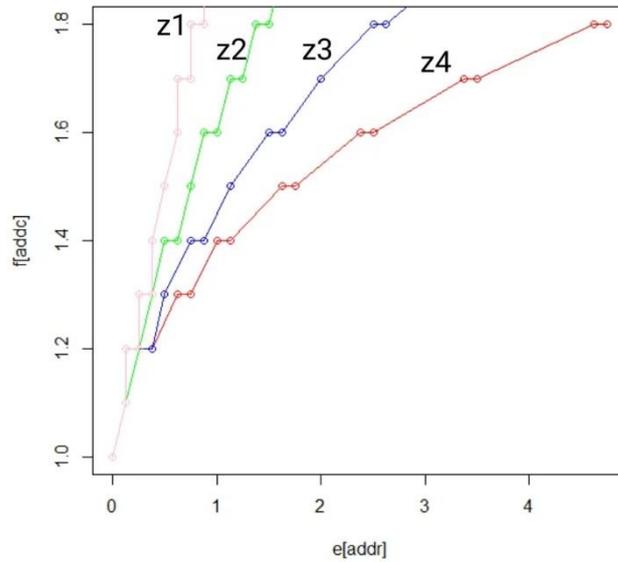


图 2.  $z_1, z_2, z_3, z_4$  的图像在  $z=0$  时的视角

$z_1, z_2, z_3, z_4$  为 0 分别意味着  $a_{11}=a_{21}, a_{21}=a_{31}, a_{31}=a_{41}, a_{41}=a_{51}$ 。由于  $f \geq 1$ ，因此  $e_1$  相同时， $f$  越小， $z$  越大， $a_{(i+1)j}$  高出  $a_{ij}$  的部分越多。从图 2 可以看出，当  $e_1, f$  的取值范围在  $z_4$  与直线  $f=1.0$  构成的区域之间时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{41} < a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在曲线  $z_4$  上时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{41} = a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在  $z_4$  与  $z_3$  构成的区域之间时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在曲线  $z_3$  上时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} = a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在  $z_3$  与  $z_2$  构成的区域之间时， $a_{11} < a_{21} < a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在曲线  $z_2$  上时， $a_{11} < a_{21} = a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在  $z_2$  与  $z_1$  构成的区域之间时， $a_{11} < a_{21} > a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在曲线  $z_1$  上时， $a_{11} = a_{21} > a_{31} > a_{41} > a_{51}$ ；当  $e_1, f$  的取值范围在  $z_1$  之上的范围内时， $a_{11} > a_{21} > a_{31} > a_{41} > a_{51}$ 。因此，当  $e_1, e_2$  确定时，存在  $f, g$  的某个取值范围，使甲乙劳动时间最优策略一致，又因为甲乙效率一致，产出一致，不会导致搭便车效应。上述试验中，2.25, 2.5 大于  $e_1+1$ ，使得平面  $e-f$  上的点  $(e_1, f)$  位于  $z_1$  上方的范围内，因此两种感知时间代价函数条件下  $\alpha$  相同。

然而，在大部分条件下，感知时间代价函数的斜率差异能导致搭便车行为的改变。且  $f < g$  时， $k > 0$ ， $f > g$  时， $k < 0$ ，可见感知时间代价斜率小的容易成为被搭便车者，斜率大的容易成为搭便车者，且斜率差异越大，搭便车现象越明显。这是基于上文对感知收益函数的求解， $f$  或  $g$  的值越小，感知时间代价斜率越小，成员纳什均衡下劳动时间更多，在双方效率相同的情况下，个人的产出占集体总产出的比例更大，因此容易“被搭便车”。

解决此类搭便车的方法与上文解决效率差导致的搭便车现象的方法类似，额外训练和激励机制都能够避免搭便车效应。其原理都是通过改变成员效率或感知时间代价函数使两位成员的产出占集体总产出的比例一致，解决搭便车效应。

## 第 4 章 研究结论

基于上文的建模、求解和分析，可以得出不少结论，具体可以分为三个方面。

#### 4.1 搭便车效应发生的一般规律

结论 1: 当成员同质性较高的时候, 也就是成员效率、感知时间代价函数都相同时, 不会出现搭便车效应。这在试验一和试验二中有所证明。

结论 2: 试验三证明, 成员效率差会造成搭便车效应, 效率低的一方容易成为搭便车者, 且在成员感知时间代价函数相同时, 效率差越大, 效率低的那一方的搭便车程度越大。

结论 3: 试验四证明, 在本实验设置的情景中, 成员感知时间代价函数可能会影响搭便车效应, 感知时间代价函数斜率高者容易成为搭便车者。且成员效率相同时, 感知时间代价函数斜率差异越大, 斜率高者的搭便车程度就越严重。

这三个结论的现实意义是, 生活中, 如果能够成员自主选择“队友”进行团队合作, 排除历史因素, 在了解过对方的能力、经验、性格、时间之后, 人们一般会选择与自己能力相当, 效率差不多且时间充足程度(可支配资源的充足程度)也差不多的人进行组队。这样的现象之所以发生是因为成为“被搭便车者”会使成员感知的收益变小, 为了实现合作双方的感知收益都不变小, 人们一般不会去找比自己效率低或时间充分程度低的人作为队友。然而也存在效率低或完成任务的时间不充分的人为了使个人的感知收益变得更大而去找效率高或时间更充分的人合作, 搭对方的便车。然而, 这种现象并不常见, 因为如果不是特殊原因, 例如成员的性格因素和历史因素, 由于假定成员都是理性人, 对方一般会拒绝可能使自己感知收益受损的合作, 而提出合作的人也了解这一点, 因此一般情况下甚至不会提出合作。这也能部分解释门当户对在中国的传统婚姻观之中非常受到认可的现象。

#### 4.2 搭便车效应的解决

在试验三和试验四中提及, 无论是效率不同导致的搭便车效应, 还是感知时间代价不同导致的搭便车效应, 都可以通过额外训练或激励机制解决。其原理在于通过改变成员的效率 and 感知时间代价函数, 改变成员劳动时间的纳什均衡最优策略, 使两名成员对集体总产出的贡献率相当, 解决其中某一人搭便车效应。

由于前文提及, 人们更愿意与和自己能力相当, 时间充足程度相同的人组队, 是因为不想成为所谓的“被搭便车者”。因此解决团队中的搭便车效应, 有利于促进团队成员之间的合作, 提高团队凝聚力。

#### 4.3 达到成员感知的集体总产出最大化

搭便车效应的解决促进了成员间的相互合作。然而, 为了使成员感知的集体总收益最大化, 必须要使感知时间代价函数斜率尽可能小, 成员效率尽可能大。试验一和试验二证明, 劳动分工和适当的激励分别可以通过提高成员效率和减少感知时间代价函数斜率使集体行动在成员间积极合作的基础上达到集体总产出的最大化, 实现管理者的需要。这指出劳动分工理论对于现代企业或是工业生产中的团队合作的有效性和重要性以及激励对于管理者管

理团队的有效性。

#### 4.4 研究不足

虽然得出了一系列结论，本研究仍然存在一些不足之处。本研究的场景设定相对简单，在现实生活中，人们合作的倾向还与外部评价、对未来多次博弈的预期有关，劳动时间的分配也会更复杂。外部评价是成员的自我感知价值，是外界的夸赞、批评等对成员心理产生的影响。对未来多次博弈的预期也有可能影响搭便车效应，因为成员有可能为了个人在未来的博弈中的声誉而选择投入更多的劳动时间。不仅如此，由于本研究将成员的劳动时间都设为整数，而现实生活中成员劳动时间不一定是整数，而是可以有无数种可供选择的劳动时间，劳动时间的分配会更加复杂，因此现实生活中成员劳动时间的纳什均衡解随成员效率和感知时间代价函数的变化可能与本实验中的结论略有不同。本实验提出，效率和感知时间代价函数处于某一区域内时，最优的劳动时间策略不变，然而在现实中效率和感知时间代价函数的改变会使劳动时间的最优策略产生改变，只是有的改变比较细微而已。

### 第5章 小结

本研究通过博弈模型对搭便车行为进行了分析并得出的一系列重要结论。在如今工业化生产越发成熟且国家倡导高质量发展的前提下，本研究为优化团队合作中的搭便车效应以提高团队合作的效率提出了方案。该模型的结论还可以广泛应用于各种形式的团队合作生产中，例如企业中的合作分工、供应链生产中的合作等等。

## 参考文献

- [1]规划司. 2021. “十四五”规划《纲要》名词解释之 3|高质量发展. 12 月 24 日. [www.ndrc.gov.cn/fggz/fzzlgh/gjzgh/202112/t20211224\\_1309252.html](http://www.ndrc.gov.cn/fggz/fzzlgh/gjzgh/202112/t20211224_1309252.html)
- [2]Yiyaz973.2023. 劳动分工. “ 百度 百 科 ” .2 月 20 日 . <https://baike.baidu.com/item/%E5%8A%B3%E5%8A%A8%E5%88%86%E5%B7%A5>
- [3]曼瑟尔·奥尔森. 2014. 《集体行动的逻辑》. 上海市: 格致出版社
- [4]赵鼎新. 2006. “集体行动、搭便车理论与形式社会学方法”《社会学研究》2006 年第 1 期: 1-21 页
- [5]张华、邹东涛.2012. “团队生产的纳什均衡及合作博弈空间”《技术经济与管理研究》2012 年第 9 期: 3-6 页
- [6]黄斌.2003. “物质激励有效性之博弈分析及其应用”《江苏教育学院学报(社会科学版)》第 19 卷第 2 期: 62-95 页
- [7]赵伟、韩文秀、罗永泰. 1999. “基于激励理论的团队机制设计”. 《天津大学学报(社会科学版)》第 1 卷第 4 期: 295-298 页
- [8]颀耀明.2009. “团队生产激励机制分析”《现代经济信息》2009 年 16 期: 123-126 页
- [9]田盈、蒲勇建.2005. “团队协作激励机制博弈分析”《管理工程学报》第 19 卷第 2 期: 133-135 页
- [10]孙锐、李海刚、石金涛. 2007. “团队合作激励博弈机制研究”《科技进步与对策》第 24 卷第 8 期: 190-193 页
- [11]周燕、张麒麟、程奎. 2010. “不同情境下搭便车行为的改变——基于实验数据的研究”. 《中国软科学》2010 年第 7 期: 158-164 页
- [12]张朝孝、蒲勇建.2003. “团队合作的博弈机制”《重庆大学学报》第 25 卷第 9 期: 27-31 页
- [13]王济川、郭丽芳.2013 “抑制效益型团队合作中‘搭便车’现象研究——基于演化博弈的复制者模型”《科技管理研究》2013 年第 21 期: 191-195 页
- [14]Avadh, Kishor, and Rajdeep, Niyoji. A Game-Theoretic Approach to Solve the Free-Rider Problem[C]International Conference on Contemporary Computing,Noida: 4
- [15]Mathew, Sarah. 2017. “Appendix for ‘How the second-order free rider problem is solved in a small-scale society’ ” 《American Economic Review》 Vol. 107,No. 5: P578-581
- [16]大蟹科技.2018. 三十分理解博弈论“纳什均衡”. “知乎”.8 月 7 日. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/41465296>

## 致谢页

我起初确定研究主题是因为看到了英语书上的单词“free-rider problem”，即搭便车问题。这使我联想到学习生活中小组分工不均，效率高者受到“剥削”的现象。我备受启发，于是打算研究“搭便车”这个课题。确定主题后，我开始阅读各类书籍，查阅各类资料，包括 k. sigmund 的《利己主义的数学分析》、奥尔森的《集体行动的逻辑》等。作为一名科研经历较少的高中生，如何通过模型的建立解释现实问题对我来说是一项挑战。为了克服这项挑战，我充分利用网站、书籍、视频等资源，查找各类文献，学习他人的建模方法以寻求启发，终于想出了合适的建模方法。

最后，感谢我的指导老师，王潇老师。在选题之初，为了进一步厘清思路，她建议我要多阅读文献和资料，我通过大量阅读在短时间内掌握了博弈论和劳动分工的基本概念。为了直观地展示成员感知收益的变化规律，王老师建议我自学 matlab 绘制图像，并在我有问题时耐心地解答。在论文撰写的过程中，王老师一直鼓励和支持我勇于尝试自己的想法，并和我进行了深入探讨，提供了许多宝贵建议。同时，也是王老师鼓励我参加本次比赛，并积极提醒我不同参赛节点需要注意的事宜，以及关于学校丘成桐报名的各项消息。衷心感谢王老师在这段研究旅程中的陪伴，使我得以从 0 到 1 掌握科研全流程，理解了如何对资料进行研判，高效锁定选题，掌握一系列论证技巧，从一个科研小白的状态，过渡到了能够自如地开展小范围研究的阶段。我将带着这份宝贵的经验，继续在我所热爱以及感兴趣的领域探索，期待将来我能真正成长为一名优秀的研究者。