

参赛学生姓名：         巩芸杉        

中学：         北京市一零一中        

省份：         北京        

国家/地区：         中国        

指导老师姓名：         祁琦、蔡蕾        

指导老师单位：         中国人民大学        

        北京市一零一中        

论文题目：         基于马尔可夫决策过程的老年人飞镖投掷策略优化研究

# 基于马尔可夫决策过程的 老年人飞镖投掷策略优化研究

巩芸杉

邮箱: [yunshan.gong@outlook.com](mailto:yunshan.gong@outlook.com)

北京市一零一中

## 摘要

飞镖运动对提升老年人寿命质量有潜在益处。然而，现实中老年人参与此运动时却常因缺乏有效的投掷策略指导、比赛难度过高以及身体条件限制导致的训练不足等问题，而难以获得良好体验，进而可能放弃这一有益身心的活动。为解决上述问题，本文创新性地将飞镖比赛的投掷过程形式化为马尔科夫决策过程（MDP），利用该理论框架设计了一套科学的投镖策略，旨在降低老年人的学习门槛。进一步地，本文针对老年人提出了两种简化的飞镖比赛规则以增强比赛的包容性。此外，本文还制定了一套高效且适应性强的训练方案，旨在帮助老年人在有限的时间内达到最佳的训练效果。

关键词：马尔科夫决策过程，健康老龄化，飞镖运动，最近邻方法

# Optimization Research on Dart Throwing Strategies for the Elderly Based on Markov Decision Process

## Abstract

Dart throwing can potentially enhance the quality of life for the elderly. However, lack of effective throwing strategy guidance, excessively difficult competitions, and insufficient training due to physical limitations can hinder their experience and participation in this beneficial activity. To address the issues, this paper innovatively formalizes the dart throwing process as a Markov Decision Process (MDP). By leveraging this theoretical framework, we design a scientific dart throwing strategy aimed at lowering the learning barrier. Furthermore, this research proposes two simplified dart competition rules tailored to the elderly, with the objective of enhancing the inclusivity of the sport. Additionally, we have developed an efficient and adaptable training program designed to assist the elderly in achieving optimal training outcomes within limited timeframes.

Keywords : Markov decision process, healthy aging, dart sports, nearest neighbor method

## 目录

1. 引言 .....	4
2. 相关研究 .....	4
3. 飞镖投掷策略建模 .....	5
3.1 飞镖运动规则 .....	5
3.2 模型定义和符号 .....	7
3.3 转移概率求解 .....	8
3.4 玩家水平估计 .....	9
4. 策略寻优 .....	10
4.1 投掷策略寻优 .....	10
4.2 比赛规则寻优 .....	12
4.3 训练策略寻优 .....	13
5. 总结 .....	15
参考文献 .....	16
致谢 .....	17
附录 .....	19

# 1. 引言

2022 年国家卫生健康委等 15 个部门联合印发《“十四五”健康老龄化规划》[1]，指出我国老年人健康状况不容乐观，增龄伴随的认知、运动、感官功能下降以及营养、心理等健康问题日益突出，鼓励老年人科学锻炼，提升老年人健身体验是提升寿命质量的有效方法。而另一方面，学术界的研究 (Crombie 等, 2004) 表明[2]，老年人在尝试开展健身运动的时候，因为缺乏兴趣引导、身体条件限制、担心受伤风险等因素，导致运动体验较差，难以坚持度过新手期，因而放弃使自己获益的锻炼机会。

适合老年人的运动项目应该兼具趣味性和难度合理性，而飞镖运动契合了这两点。飞镖运动历史悠久，最早源于 15 世纪的英格兰，并于上世纪 80 年代进入中国。近些年来，许多研究表明飞镖运动对老年健康非常有益，其中 TAKEDA 等人表明[3]，经常性的飞镖训练可以明显提升老年人的记忆力，这对于老年人的晚年生活有重要的意义。我国的学者（晓新，2013）也开展了相关的研究工作[4][5]，并发现飞镖运动对老年人的协调能力和平衡性都非常有益，飞镖运动是一项非常适合老年人开展的健身运动。

我国自古就有“投壶”和“射礼”等传统健身运动，也有博大精深的博弈运筹智慧。本研究就是基于上述背景，以所在中学的飞镖社团为研究基地，组织社团成员在家中和社区开展面向老年人的飞镖培训活动，并在这些活动中完成访谈、调研和数据采集。在此基础上，建立符合老年人特征的数学模型，并通过求解模型，归纳出适合老年人参加健身运动的三个策略，帮助老年人顺利度过飞镖新手期，坚持开展健身运动，收获运动带来的快乐和健康。

## 2. 相关研究

近些年来，随着飞镖运动在全世界的影响力越来越大，学术界对于飞镖投掷策略的研究也越来越深入。Ryan J. Tibshirani 等人基于统计学的方法研究飞镖投掷策略，采用二维正态分布和偏正态分布来建立飞镖投掷模型，利用正态分布的标准差来描述飞镖者的水平，采用期望最大化 (Expectation-Maximum, 简称 EM) 算法来估计飞镖投掷者在  $X$ ,  $Y$  两个方向的标准差 [6]。他们通过 100 次的投掷实验结果表明这种方法可以准确估计出飞镖投掷者的真实水平，并可以利用这个结果帮助飞镖玩家在一次投掷中获得高分。

飞镖运动是两个或多个玩家的竞技，所以有学者从博弈论的角度来研究飞镖比赛策略。Haugh 和王纯对 2019 赛季 16 位顶级职业飞镖运动员的数据集进行了深入地数据分析[7]。该研究使用此数据集来建立拟合球员技能的模型，然后将其用于模拟飞镖选手之间真实比赛的动态零和博弈 (ZSG) 过程。实验表明，利用这种基于 ZSG 模型的博弈策略，策略性地进行比赛，在了解自己水平的同时又考虑对手的得分，可以将飞镖选手的获胜概率提高约 2%~3%。

从运动工程学角度研究飞镖投掷策略也取得了良好的效果。James 等人研究了飞镖飞行轨迹对于比赛成绩的影响[8]。他们使用高速视频技术记录了 19 名业余玩家的 225 次投掷飞镖的轨迹，发现飞镖在飞行过程中的俯仰角以类似于阻尼简谐运动的方式振荡。研究还发现，这种振荡频率与发射速度密切相关，而其特征波长和阻尼比与发射速度无关，测量出的振荡波长 (2.16 m) 与规定的投掷距离 (2.37 m) 相似。他们建议将飞镖投掷距离“调整”到波长的距离，使其在击中飞镖之前经历一次完整的振荡。这项研究使用经典的动态稳定性分析对飞镖飞行进行建模，实验观察结果与理论预测之间存在良好的一致性。

以往的研究主要针对飞镖爱好者人群或高水平飞镖玩家，然而老年人在参加飞镖这项运动时，并不是以获得比赛胜利，赚取奖金为目的，而是为了健身益智，提升晚年生活质量，有其自身特点：如准确度较低，体力精力有限、训练时间较少等。所以需要为老年人建立符合他们特点模型，提出适合老年飞镖玩家的策略，帮助他们度过新手期，坚持开展这项运动。。

### 3. 飞镖投掷策略建模

#### 3.1 飞镖运动规则

一个飞镖盘包含 6 个同心圆，均匀分成 20 个的扇形区域。不同的区域有不同的分值，如下图。

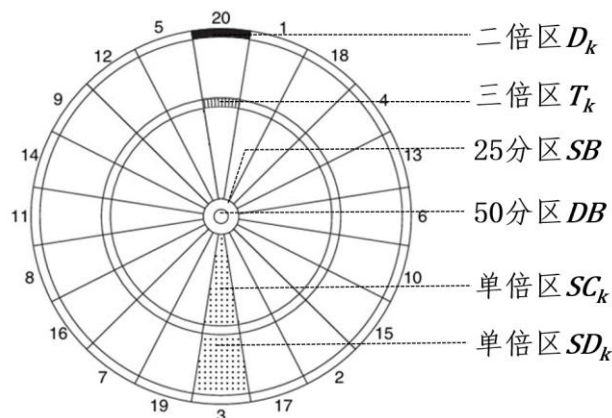


图 1 飞镖盘及其各个分值区域划分

飞镖盘内有 82 个得分区域，不同区域有相应的分值，盘外区域分值为零。各区域的符号和分值如表 1 所示，其中  $k$  为飞镖盘最外侧分值， $k \in [1, 20]$ 。

名称	位置	符号	分值
双靶心区	镖盘中心的最小圆形	$DB$	50
单靶心区	环绕 $DB$ 区域的圆环	$SB$	25
内单倍区	环绕 $SB$ 区域的 20 个环扇形区域	$SC_k$	$k \times 1$
三倍区	环绕 $SC$ 区域的 20 个很窄的环扇形区域	$T_k$	$k \times 3$
外单倍区	环绕 $T$ 区域的 20 个较宽的环扇形区域	$SD_k$	$k \times 1$
双倍区	环绕 $SD$ 区域的 20 个较窄的环扇形区域	$D_k$	$k \times 2$

表 1 飞镖盘及其各个分值区域的符号和分值

此外，我们用：

$Target = \{ DB, SB, SC_k, SD_k, T_k, D_k \}$ ,  $k \in [1, 20]$ ，表示目标位置集合。

$Score(X)$  表示位置  $X$  的得分， $X \in Target$ 。

例如， $Score(T_3) = 3 \times 3 = 9$ ,  $Score(DB) = 50$ 。

“501”赛制是一种最常见的形式，各个地区有不同的规则描述。本研究面向老年玩家，采用最简单的四条比赛规则，如表 2 所示。

编号	简称	规则内容
1	计分规则	每位玩家起始为 501 分，玩家分值根据每次投掷得分而减少，第一个达到分数正好为零的玩家获胜。
2	“双出”规则	最后一镖必须落在双倍区，即命中 $D_k$ 中才能结束。
3	“爆分”规则	如果脱靶、或是更新的分数为 1、0（但不符合“双出”规则）或负分，分数仍为投掷之前的分数。
4	先手规则	两个玩家轮流先手。

表 2 “501”赛制比赛规则

### 3.2 模型定义和符号

飞镖玩家完成一次“501”比赛的过程，可以看作一个序列决策的过程，过程的初始状态为 501 分。在每次投掷之前都要根据当前的分值选择合适的目标位置，而投掷的命中结果又因为玩家的水平呈现出一定的随机性。在飞镖落点确定后，玩家减去相应的分数并选择下一次的目標进行投掷，直到剩余分数按照表 2 的比赛规则正好为零。

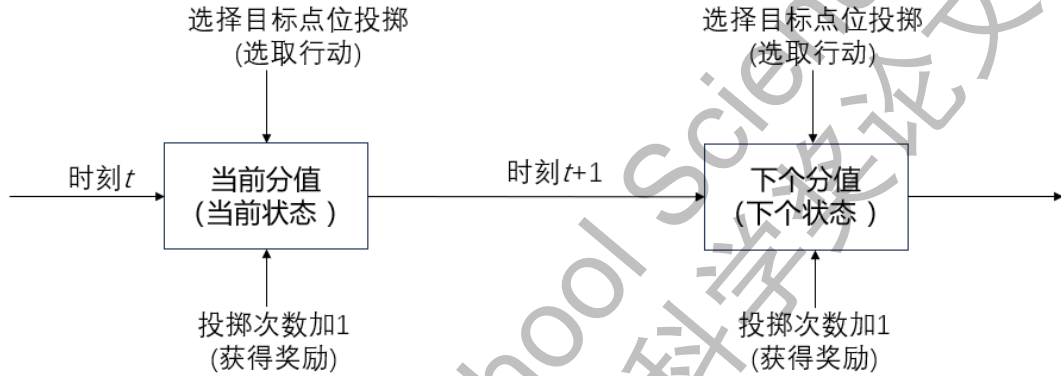


图 2 飞镖投掷的序列决策过程

我们用马尔可夫决策过程 (MDP) 对一个玩家的“501”飞镖投掷比赛过程建立模型。这个 MDP 可以用一个五元组

$$Dart - MDP = \{T, S, A, p(s_{t+1} | s_t, a), r(s_t, a)\}$$

来表示，其中：

**决策时刻点集合  $T = \{0, 1, \dots\}$ ：**飞镖玩家选择目标点位投掷的时间点  $t$  是决策时刻，因为在现实中存在某些玩家水平较低，无法完成比赛的情况，所以此处  $T$  是无限集合。

**状态集合  $S = \{501, 500, 499, \dots, 2, 0\}$ ：**表示玩家当前的剩余分值。值得注意的是，没有“1”的状态，因为 501 比赛规则要求双倍得分结标（即投到  $D_k$  区域），若剩余 1 分直接回到上一步分值状态。

**行动集合  $A = \{DB, SB, SC_k, SD_k, T_k, D_k\}$ ：**其中  $k \in [1, 20]$ ，行动集合就是飞镖盘上 82 个目标位置的集合，即定义 1 中 *Target* 集合。

**转移概率  $p(s_{t+1} | s_t, a)$ ：**就是玩家处在在状态  $s_t \in S$ ，采取行动  $a \in A$  后（即瞄准某个位置投掷），下一个决策时刻系统所处的状态  $s_{t+1} \in S$  的概率，且有  $\sum_{s_{t+1} \in S} p(s_{t+1} | s_t, a) = 1$ 。如：某玩家在  $s_t = 300$  时，采取了行动  $a = T20$ ，即瞄准  $T20$  投掷。因为玩家可能命中  $T20$ ，也可能命中  $T20$  周围的  $T1$ 、 $T5$ 、 $SC5$  等，所以下一个状态  $s_{t+1}$  可能是 240、297、285、295 等。



**奖励函数 $r(s_t, a)$** : 根据“501”比赛规则, 当玩家在状态是 $s_t$ 的时候, 进行了一次投掷 $a$ , 也就是增加了一次投掷次数。定义 $r(s_t, a) = 1$ , 在后续寻优过程中起计数器的作用。

对一个飞镖玩家建立 $Dart - MDP$ 模型时, 决策时刻点集合 $T$ , 状态集合 $S$ , 行动集合 $A$ , 奖励函数 $r(s_t, a)$ 都是确定的, 只有转移概率 $p(s_{t+1} | s_t, a)$ 是未知的, 这个转移概率由玩家的投掷水平决定, 下面论述如何计算转移概率。

### 3.3 转移概率求解

转移概率 $p(s_{t+1} | s_t, a)$ 表示玩家处在在状态 $s_t \in S$ , 采取行动 $a \in A$ 后 (即瞄准某个位置 $a$ 投掷), 下一个决策时刻系统所处的状态 $s_{t+1} \in S$ 的概率, 可以写为如下形式, 即玩家瞄准 $a \in A$ 投掷后, 得分为 $(s_t - s_{t+1})$ 这个事件发生的概率。

$$p(s_{t+1} | s_t, a) = P(\text{target} = a, \text{score} = (s_t - s_{t+1})) \quad (1)$$

根据计分规则, 存在多个命中位置得到同样分数的情况。

$$P(\text{target} = a, \text{score} = (s_t - s_{t+1})) = \sum_{h \in \{z | \text{Score}(z) = (s_t - s_{t+1})\}} P(\text{target} = a, \text{hit} = h) \quad (2)$$

$P(\text{target} = a, \text{hit} = h)$ 表示玩家瞄准位置 $\text{target} = a$ 投掷, 而落在区域 $\text{hit} = h$ 的概率, 因为存在飞镖脱靶的情况, 所以 $h \in \{A, \text{MISSED}\}$ ,  $\text{Score}(z)$ 表示飞镖盘上位置 $z$ 对应的分数。采用 Ryan J. T. 等学者提出的方法[6], 用 $X, Y$ 方向上两个独立的二维正态分布的标准差 $(\sigma_X, \sigma_Y)$ 来描述一个玩家的水平, 当玩家瞄准某一个目标位置 $\text{target} = a$ 投掷, 而命中某个区域 $\text{hit} = h$ 的概率可以用二维正态分布的积分公式计算如下, 其中 $(\mu_{a_X}, \mu_{a_Y})$ 是目标区域 $\text{target} = a$ 的质心的横纵坐标。

$$P(\text{target} = a, \text{hit} = h) = \iint_h \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{a_X})^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y - \mu_{a_Y})^2}{2\sigma_Y^2}\right) dx dy \quad (3)$$

综合(1)、(2)、(3)式可以得到 $p(s_{t+1} | s_t, a)$ 的计算公式

$$p(s_{t+1} | s_t, a) = \sum_{h \in \{z | \text{score}(z) = (s_t - s_{t+1})\}} \iint_h \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(-\frac{(x - \mu_{a_X})^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y - \mu_{a_Y})^2}{2\sigma_Y^2}\right) dx dy \quad (4)$$

在计算过程中, 将二重积分转换为极坐标的方式可以极大简化计算, 利用换元法将式(4)可以写为 $p(s_{t+1} | s_t, a) =$

$$\sum_{h \in \{z | \text{Score}(z) = (s_t - s_{t+1})\}} \iint_h \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(\rho\cos\theta - \mu a_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(\rho\sin\theta - \mu a_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (5)$$

上述推导结果表明，二维正态分布的标准差（ $\sigma_x, \sigma_y$ ）是转移概率决定因素，下面讨论如何估计玩家的水平。

### 3.4 玩家水平估计

斯坦福大学的 Ryan J. T. 等学者采用期望最大化（Expectation-Maximum, 简称 EM）算法来估计不同飞镖玩家在  $X, Y$  两个方向的标准差[6]，这两个方向的标准差越小，表明这个玩家的水平越高。因为老人体力有限，很难提供足够的试投数据来使用 EM 算法，所以在社区的实践中，本研究采用了最近邻方法来估算飞镖玩家的水平（简称最近邻估计法）。

最近邻估计法的基本思想是：构造出  $N$  个准度（即在  $X, Y$  方向的标准差  $\sigma_x, \sigma_y$ ）不同的投标机器人，每个机器人飞镖的落点服从标准差不同二维正态分布，利用上节公式（3），可以计算出每个机器人在瞄准不同位置时，命中在各个位置的概率  $P(\text{target} = a, \text{hit} = h)$ ， $a \in A$ ， $h \in \{A, \text{Missed}\}$ 。在完成机器投掷人数据的计算后，将老年飞镖玩家的试投数据和每个机器人的仿真数据进行相似度计算，找到和这个玩家落点分布最接近的那个机器人，将这个最相似机器人的两个标准差作为这个玩家的  $X, Y$  方向的标准差。在计算相似度时，可以用多种距离的定义方式计算，如欧几里得距离，曼哈顿距离等。我们采用的度量方式是欧几里得距离。

在实验中，构造出  $N$  个机器人投掷飞镖，影响机器人水平的两个关键参数是  $X, Y$  方向标准差，两个方向的标准差都从 0.1 厘米开始，步长为 0.1 厘米开始增长，一直到 3.0 厘米，在 3.0 厘米以后，以 0.2 厘米为步长开始增长，一直到 10 厘米。采用这样的步长是因为高水平玩家（标准差小于 3 厘米）需要找到更准确的机器人，而标准差大于 3 厘米的玩家用 0.2 厘米的步长已经可以比较准确估计出他的水平。这样，共构造出  $N = 4225$  个不同水平的机器人。

通过在社区举办面向老年人的飞镖投掷活动，采集了老年玩家的投掷数据，估计出四位老人的飞镖水平。为了验证方法的准确性，也对 2019 年飞镖世界冠军 Michael Van Gerwen 进行了估计，结果如下图。

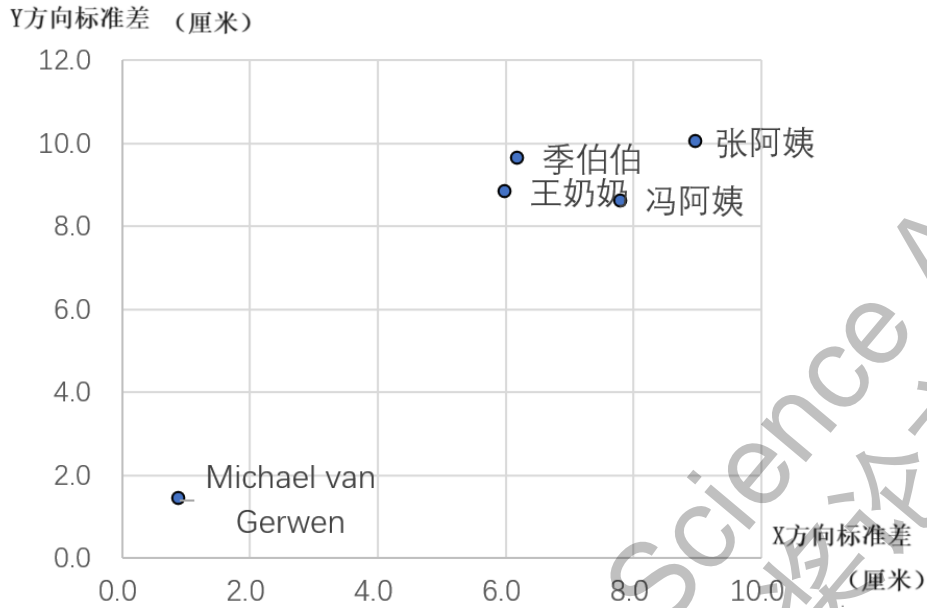


图 3 四位老人和世界冠军的投掷水平估计结果

从上面五位飞镖玩家的水平估计结果可以看出：世界冠军 Michael van Gerwen 水平非常高超，飞镖在标盘上的落点位置和目标的横向标准差是 0.9 厘米，纵向标准差是 1.4 厘米；四位老年飞镖玩家的水平和世界冠军有很大的差距，四位老人之间也有一定差异，王奶奶在四位老年玩家中有一定的优势。

## 4. 策略寻优

### 4.1 投掷策略寻优

在“501”比赛中，每个玩家都希望用尽可能少的投掷次数完成比赛，即求解  $\min(\sum r(s_t, a))$ 。记  $E[s_t, a]$  为某位玩家在状态  $s_t$  时，采取行动  $a \in A$  完成比赛的最少投掷次数的数学期望。记  $E_{\min}[s_t] = \min(E[s_t, a])$  为玩家的状态  $s_t$  时，所有最少投掷次数的数学期望中的最小值，如果一个行动  $a$  满足  $E[s_t, a] = E_{\min}[s_t]$ ，则称  $a$  为状态  $s_t$  对应的最优决策。在状态空间  $S$  下所有最优决策构成的集合，称之为这个玩家的最优策略。

利用  $Dart - MDP = \{T, S, A, p(s_{t+1} | s_t, a), r(s_t, a)\}$  模型中的状态转移概率，采用动态规划的思想求解最优策略。首先画出玩家在状态  $s_t = i$  时，瞄准  $a$  位置的状态转移图，见图 4。

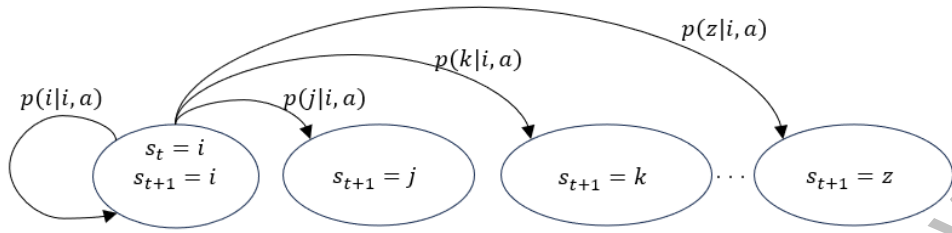


图 4 玩家在状态  $s_t = i$  时瞄准  $a$  目标投掷的状态转移图

根据数学期望的定义,  $E[s_t = i, a] =$

$$p(s_{t+1} = i | s_t = i, a)(1 + E[s_t = i, a]) + \sum_{j \neq i, j \in A} p(s_{t+1} = j | s_t = i, a) \times E_{\min}[s_{t+1} = j] \quad (6)$$

将 (6) 式变形, 可以得到玩家在状态  $s_t$  时, 采取行动  $a$  完成比赛的最少投掷次数的数学期望的计算公式:

$$E[s_t = i, a] = \frac{p(s_{t+1} = i | s_t = i, a) + \sum_{j \neq i, j \in A} (p(s_{t+1} = j | s_t = i, a) \times E_{\min}[s_{t+1} = j])}{1 - p(s_{t+1} = i | s_t = i, a)} \quad (7)$$

按照动态规划的思想, 先计算  $E_{\min}[2]$ , 然后从后往前计算出所有状态的最佳决策, 即这名玩家的最佳策略。

以某玩家 ( $\sigma_x = 1.8, \sigma_y = 2.2$ ) 举例说明。当该玩家在状态  $s_t = 2$  时, 采取不同的行动  $a$ , 向下一个状态  $s_{t+1} = 0$  的转移图如下。

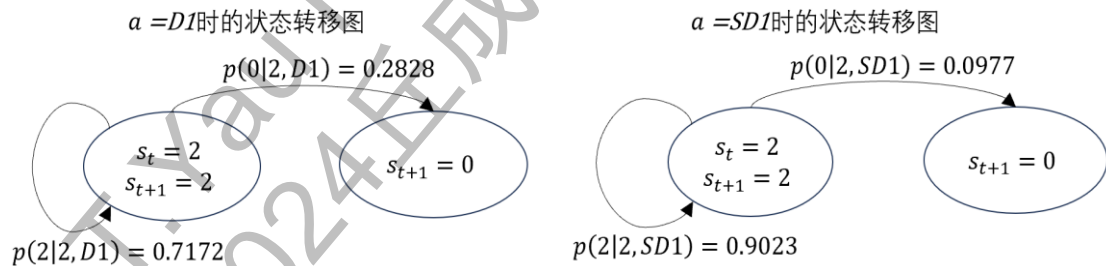


图 5 玩家在  $s_t = 2$  状态时选择两个不同目标位置投掷的状态转移图

在上面状态转移图中, 可以解得:  $s_t = 2$  时, 瞄准  $D1$  投掷, 到  $s_{t+1} = 0$  的投掷次数的期望为 3.536 次, 即  $E(2, D1) = 3.536$ ; 瞄准  $SD1$  投掷时, 到  $s_{t+1} = 0$  的投掷次数的期望为 10.235 次, 即  $E(2, SD1) = 10.235$ 。对所有 82 个目标位置计算后可得,  $a = D1$  为状态  $s_t = 0$  的最优决策。即对玩家 ( $\sigma_x = 1.8, \sigma_y = 2.2$ ), 他在  $s_t = 2$  时的最优决策是  $D1$ , 且  $E_{\min}(2) = E(2, D1) = 3.536$ 。

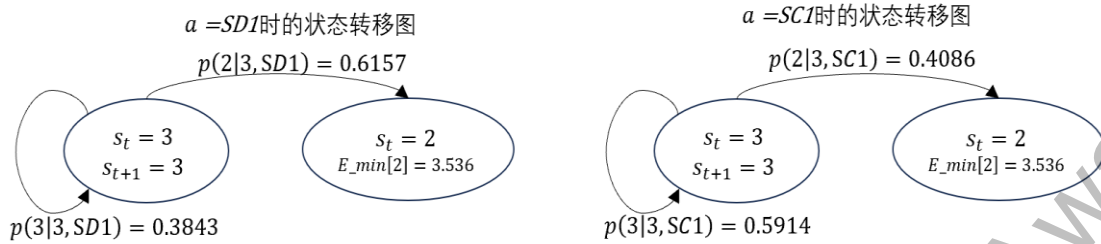


图 6 玩家在  $s_t = 3$  状态时选择瞄准位置的不同状态转移图

通过上图，可以求解该玩家在  $s_t = 3$  时最优决策是  $SD1$ ,  $E_{min}[3] = 5.16$ 。

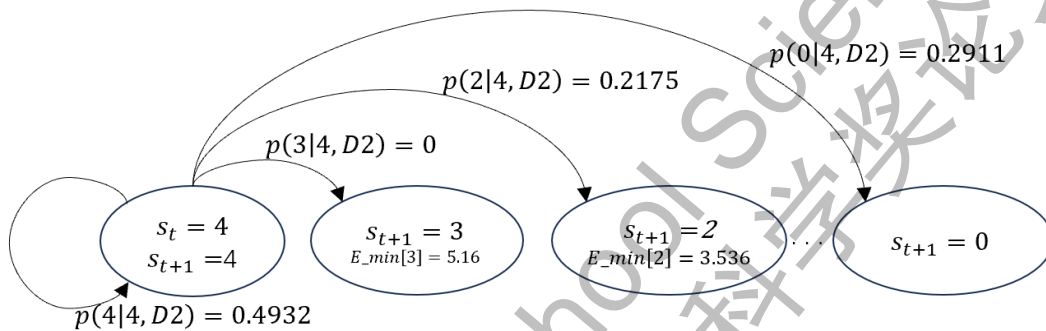


图 7 玩家在  $s_t = 4$  状态时选择 D2 投掷的状态转移图

通过上图，可以求解玩家在  $s_t = 4$  时最优决策是  $D2$ ,  $E_{min}[4] = 3.478$ 。重复上述过程可以逆向计算出该玩家完成一次 501 比赛，在采用最优策略的条件下投掷次数的期望。将世界冠军 Michael 的数据带入完成试算，可以得到 Michael 采用最优策略完成比赛投掷次数的期望 14.5 次，这和他实际完赛的投掷次数非常接近。用上述方法对社区中水平较高的王奶奶的投掷次数进行试算，王奶奶按照最优策略投掷，完成比赛的投掷次数的期望是 71 次，这意味着即便王奶奶在全程体力充足且发挥稳定的情况下，也需要投掷 71 次左右才能完成 501 的比赛。

## 4.2 比赛规则寻优

通过上一节的计算结果可以看出，社区里水平较高的王奶奶也很难完成一次“501”比赛，显然 3.1 小节中介绍的四个比赛规则对老人太不友好，所以本小节尝试对这些规则进行一些调整，帮助老人顺利完成“501”比赛。具体调整如下。

**新规则 1:** 最后一镖的分值和倍数不做限制，无需“双出”。

**新规则 2:** 分数只要减为 0 或是负值即可获胜，无需正好减为 0。

对于新规则 1，需要在 *Dart - MDP* 的状态空间  $S$  加入因为规则改变而带来的新的状态，即  $S = \{501, 500, 499, \dots, 2, 1, 0\}$ ，在构建状态转移图时取消“双出”的限制。用 4.1 的方法可以算出王奶奶需要 44.17 次，世界冠军 Michael 需要 13.8 次可以完成比赛。

对于规则 2，玩家只需要在每一次贪心地选择得分期望最高的位置进行投掷，每个状态的最优决策为

$$a^* = \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_{j \in A} p(s_{t+1} | s_t, a) (s_t - s_{t+1}) \quad (8)$$

结合 3.4 节，对四位老人和世界冠军的飞镖水平的估计，可以算出四位老人一次投掷获得最分数期望最高的最佳目标位置，四位老人选择相应的最佳目标投掷即可快速完成比赛，如下表。

名字	机器人编号	X 方向标准差	Y 方向标准差	最佳目标	得分期望
Michael V. Gerwen	U534	0.9	1.4	T20	38
季伯伯	U2998	6.2	9.6	SC8	13.71
冯阿姨	U3503	7.8	8.6	DB	13.64
张阿姨	U3900	9.0	10.0	DB	12.68
王奶奶	U2919	6.0	8.8	SC8	14.21

表 3 世界冠军 Michael V. Gerwen 和四个老年飞镖玩家的水平估计和最佳目标

在采用新规则 2 后，王奶奶完成一次“501”比赛的投掷次数在 35 次左右，水平最低的张阿姨也能在投掷 40 左右时完成比赛。世界冠军 Michael 需要 13 次左右可以完成比赛，可以看出，这个规则的修改对高水平玩家影响不大，但能够大大降低老家玩家开展这项运动的门槛。

上面的实验数据表明，老年人在参加飞镖运动时，可以按照自己的水平选择相应的比赛规则：在刚开始参加飞镖运动时，使用**新规则 2**是比较符合实际的；随着练习次数增多，水平逐渐提升，再使用**新规则 1**来开展飞镖活动，这种方式可以友好的帮助老年人度过新手期；等到老年玩家的水平  $X, Y$  的标准差能达到 3.0 左右的时候，就可以去掉这些新规则，和专业玩家们同台竞技了。

### 4.3 训练策略寻优

通过对世界冠军 Michael 在比赛中的表现进行观察，发现 Michael 对  $T20$  的投掷比  $T19$ 、 $T18$  等高分位置都要准确，这是因为高水平玩家在训练中会更多的练习分数最高的  $T20$  这个位置。在正式比赛前，高水平的玩家也会选几个

点来做热身，而不是所有位置都练习。下面我们借鉴这些高水平玩家的方法，探索老年人的训练策略。

**训练模型假设：**在一定时期内，某玩家针对飞镖盘上某个目标位置  $a \in A$  进行一定次数 ( $m$ 次) 的练习后，可以将这个玩家在向这个位置投掷时  $X, Y$  方向的标准差  $(\sigma_X, \sigma_Y)$  缩小一定的百分比，而其它位置不变。

**问题描述：**选择哪些目标位置强化练习，可以帮助这名玩家提升“501”比赛的成绩？

根据前文的估算结果，王奶奶的整体水平表现为  $X, Y$  方向的标准差为 6.0 和 8.8，假设通过一段时间的强化训练，王奶奶在某个瞄准位置  $a \in A$  的标准差缩小了 20%，变为  $(\sigma_X = 4.8, \sigma_Y = 7.0)$ ，其他位置的准确度变化不大。按照面向新规则 1 对飞镖盘上所有位置试算，结果如下表。

练习的目标位置	最小投掷次数期望	减少的投掷次数
SC8	41.7219	2.4481
SC11	41.7956	2.3744
SC16	42.1735	1.9965
SC7	42.4002	1.7698
SC14	43.001	1.169
T11	43.118	1.052
SC19	43.1789	0.9911
T19	43.8012	0.3688
T18	43.9966	0.1734
T20	44.0205	0.1495
DB	44.1372	0.0328

表 4 王奶奶最优提升成绩最快的最优练习位置

通过上表可以看出，王奶奶不是对所有位置练习，都可以提高“501”比赛的成绩。对飞镖盘上分值高的  $T20$ 、 $T9$ 、 $T8$ 、 $DB$  等位置的强化练习，效果并不明显。选择飞镖盘上  $SC8$ 、 $SC11$  这个位置来练习，并在比赛中充分利用这个位置，即使投不准，落在周围的区域也能获得较高的分值，从而有效地提高成绩。



## 5. 总结

本研究的选题来源于所在中学的飞镖社团，社团在组织社区中的老年人参加飞镖健身活动时，遇到了一些降低老人运动体验的实际困难。为了量化的度量和分析这些问题，本研究建立了基于马尔可夫决策过程的飞镖投掷策略模型，并利用在活动中采集到的老年人投掷数据，用最近邻方法估计出这些老人投掷飞镖的准确度，并利用二维正态分布的极坐标形式计算出了模型中的马尔可夫过程的转移概率。在这个模型的基础上，我们提出了老年人开展飞镖运动的三种优化策略：策略一是帮助老人在运动中选择最合理的投掷目标；策略二是帮助老人选择适合自己比赛规则；第三是帮助老人制定合理的训练方案。通过这三个策略，助力老人顺利度过飞镖运动的新手期，坚持长期开展这项运动。

在社区的推广活动中，社团成员还发现飞镖运动对社会中的更加需要照顾的群体，如依靠轮椅行动的人，和长期卧床的人也非常友好，本研究提供的策略对他们也非常适用。



## 参考文献

- [1] 中华人民共和国国家卫生健康委员会老龄健康司, “‘十四五’健康老龄化规划,” Mar. 01, 2022. <http://www.nhc.gov.cn/ljks/pqt/202203/c51403dce9f24f5882abe13962732919.shtml>
- [2] I. K. Crombie, “Why older people do not participate in leisure time physical activity: a survey of activity levels, beliefs and deterrents,” *Age and Ageing*, vol. 33, no. 3, pp. 287–292, May 2004, doi: <https://doi.org/10.1093/ageing/afh089>.
- [3] M. TAKEDA, N. YASUDA, S. ITO, and M. ABE, “Effects of Habitual Darts Training on Cognitive Function in Elderly People,” *THE HARRIS SCIENCE REVIEW OF DOSHISHA UNIVERSITY*, vol. 58, no. 2, Jul. 2017.
- [4] 晓新, “掷飞镖 练平衡,” *老同志之友*, vol. 17, no. 58, 2013.
- [5] “投飞镖锻炼协调力,” *家庭医药*, vol. 5, no. 29, 2019.
- [6] R. J. Tibshirani, A. Price, and J. Taylor, “A statistician plays darts,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, vol. 174, no. 1, pp. 213–226, Jul. 2010, doi: <https://doi.org/10.1111/j.1467-985x.2010.00651.x>.
- [7] M. B. Haugh and C. Wang, “Play Like the Pros? Solving the Game of Darts as a Dynamic Zero-Sum Game,” *INFORMS Journal on Computing*, Apr. 2022, doi: <https://doi.org/10.1287/ijoc.2022.1197>.
- [8] D. James and J. Potts, “Experimental validation of dynamic stability analysis applied to dart flight,” *Sports Engineering*, vol. 21, no. 4, pp. 347–358, Jun. 2018, doi: <https://doi.org/10.1007/s12283-018-0279-9>.

## 致谢

### 研究背景和选题来源

我是一名来自北京一零一中的高二女生。本文的选题来源于我所在的中学的飞镖社团，我在社团中承担社长工作。飞镖社团是为了帮助同学们缓解学习压力，保护视力而创立的。随着社团活动的深入开展，我们发现这项运动对老年人非常友好，并积极向社区里的老人们推广这项运动。我们发现老年人常因缺乏有效的投掷策略指导、比赛难度过高以及身体条件限制等因素，难以获得良好的健身体验，进而可能放弃这一有益身心的活动，为此我们运用课堂中学到的知识进行了一些探索和尝试，其中数学就是最有力的工具之一。一零一中学的蔡老师鼓励我们利用创新思维，将发现的问题和在课堂中学到的知识联系起来解决问题。

### 祁琦老师对我的指导

**做有温度的研究：**2024年1月，我参加了由女子数学协会（Association for Women in Mathematics）组织的写作比赛，主题是数学中的女性力量。我很幸运的邀请到祁琦老师作为采访对象，并借此机会了解到祁琦老师利用博弈论方法帮助香港政府优化公屋分配机制，帮扶低收入弱势群体的相关研究。这次采访对我的意义重大，让我意识到数学知识可以实实在在的帮助到他人，让这个世界变得更美好。所以在日常生活中，我开始留意并尝试用数学去分析现实中的一些问题。在对祁琦老师的采访结束后，我和她一直保持的良好的沟通，每次向她请教完问题，不仅收获知识，还收获学习数学的动力。

**研究的探索阶段：**飞镖社团在向老年人推广飞镖这项活动时，首先将家里的老人作为研究对象，积累经验后向社区推广，研究方法也并不局限于数学领域，而是坚持实用主义原则。譬如，针对视力不好的老人，我们会采用“图案法”，将一些蚊子臭虫的图片贴到飞镖盘上，帮老人飞镖入门；针对力量不足的老人，社团成员还用3D打印技术，制作出轻质飞镖。随着活动经验的积累，我逐渐发现在老人中推广成熟的501比赛规则是很不现实的，适合一般飞镖玩家的训练方法也不适合老年人，我隐隐约约感觉到这些问题的背后是有数学规律的。所以开始从数学方面的进行一些思考，也查阅一些相关的学术文献，但是比较零散，没有形成体系。

**数学模型的建立：**在飞镖投掷数据有了一定量的积累后，我总结出帮助老年人提升运动体验的几条经验，并向祁琦老师介绍了这个活动。祁琦老师敏锐地指出，一场501比赛的过程就是一个序列决策的过程，可以采用马尔可夫相

关的工具进行量化的分析，用数学的方法来支持飞镖社团提出的改进方案。有了这个明确的方向指引，在 2024 年的这个暑假，我购买了一本《马尔可夫决策过程理论与应用》这本书。通过系统学习，我惊奇的发现，马尔可夫决策过程的五元组可以如此完美的描述飞镖比赛过程。借助这本书的帮助，模型很快搭建起来，之前总结的规律和看过的文章，也都在搭建模型过程中发挥了作用。

**数据分析和计算：**在模型搭建好之后，就可以将飞镖活动中积累的老年玩家的数据放入模型进行试算。在飞镖玩家水平估计的部分，有一位斯坦福的学者用 EM 算法来估计，取得了很好的效果。但是这个方法需要的数学知识已经远远超过了我的储备。祁琦老师鼓励我不要气馁，可以使用自己能够掌握的数学方法来处理这个问题，我在学校的数学建模课上接触过最近邻的方法，我尝试用这个方法来估计老年玩家的水平，也取得了很好的效果。

**实验部分：**祁琦老师鼓励我仔细观察老年人在飞镖活动中的特点，有争对性地提出改进方案。我观察到，有些老奶奶因为身高和力量的原因，在瞄准飞镖盘的下半部分更准一些，这和斯坦福学者研究的假设非常不同，他假设一个玩家在瞄准飞镖盘上的各个位置准确度都是一样的。祁琦老师鼓励我沿着这个思路来提出改进方案，我提出面向老年玩家的训练模型，即受限于精力和体力，老年玩家应该挑几个适合自己的位置反复练习，而不是全面练习，也不是挑高分区域练习，老年玩家在局部取得优势后，可以在比赛中最大化利用这种局部优势，这个策略在实践中也取得了很好的效果。

**论文写作：**我的论文初稿有很多不规范的地方，祁琦老师非常有耐心指导我，通过阅读相关论文来学习规范的科研论文书写。

### 研究中来自他人的协助

一零一中飞镖社团的同学们为本研究提供了很多支持和帮助。我们一起组织面向老年人的飞镖活动，一起积累数据，一起制作海报，一起脑洞大开。我们甚至为盲人设计了飞镖游戏，在此感谢我们飞镖社团的全体成员们。

最后，感谢我所在的一零一中学，不仅提供良好的学习环境和宽松的社团空间，还让我在入学时参加了数学高阶课程的选拔测试，使我能够在高一就系统学习了微积分的知识，并选修了学校开设的数学建模课程。通过这两门课程的学习，我掌握了一些数据处理和建模的基本方法，为本研究奠定了基础。

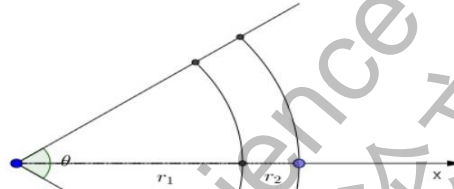
祁琦老师的指导是无偿的。在此，我要对祁琦老师的悉心指导表示由衷的感谢，她不仅教我如何做研究，还教我如何做有温度的研究。

## 附录

### 1、飞镖盘中的各个得分区块的的瞄准点位（质心）的计算

每个得分区块(环扇形区域)瞄准点的位置坐标 ( $\mu_{ax}$ ,  $\mu_{ay}$ ) 就是这个区域的质心, 可以使用环形扇形的质心公式来计算。质心位于扇形角平分线上, 距离飞镖盘圆心的距离如下。

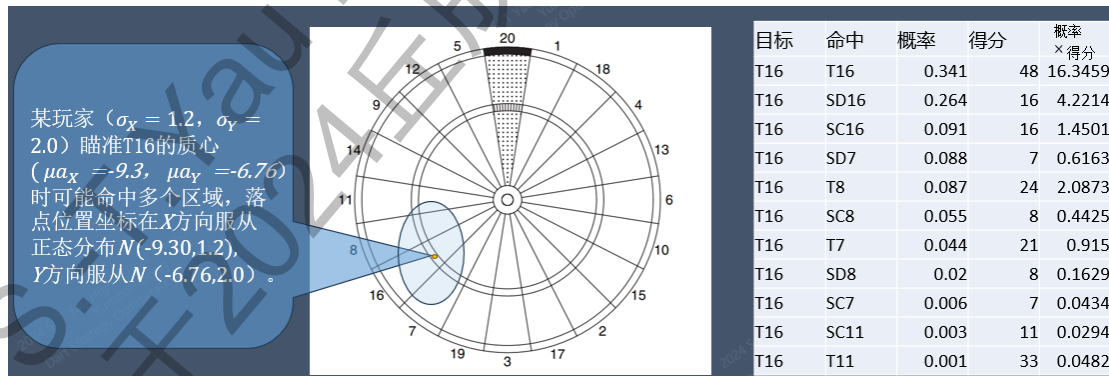
$$l = \frac{4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(r_2^3 - r_1^3)}{3\theta(r_2^2 - r_1^2)}$$



### 2、转移概率求解过程举例

用 $X, Y$ 方向上两个独立的二维正态分布的标准差 ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ) 来描述一个玩家的水平, 当玩家瞄准某一个目标位置  $target = a$  投掷, 而命中某个区域  $hit = h$  的概率可以用二维正态分布的积分公式, 其中  $(\mu_{ax}, \mu_{ay})$  是目标区域  $target = a$  的中心的横纵坐标。

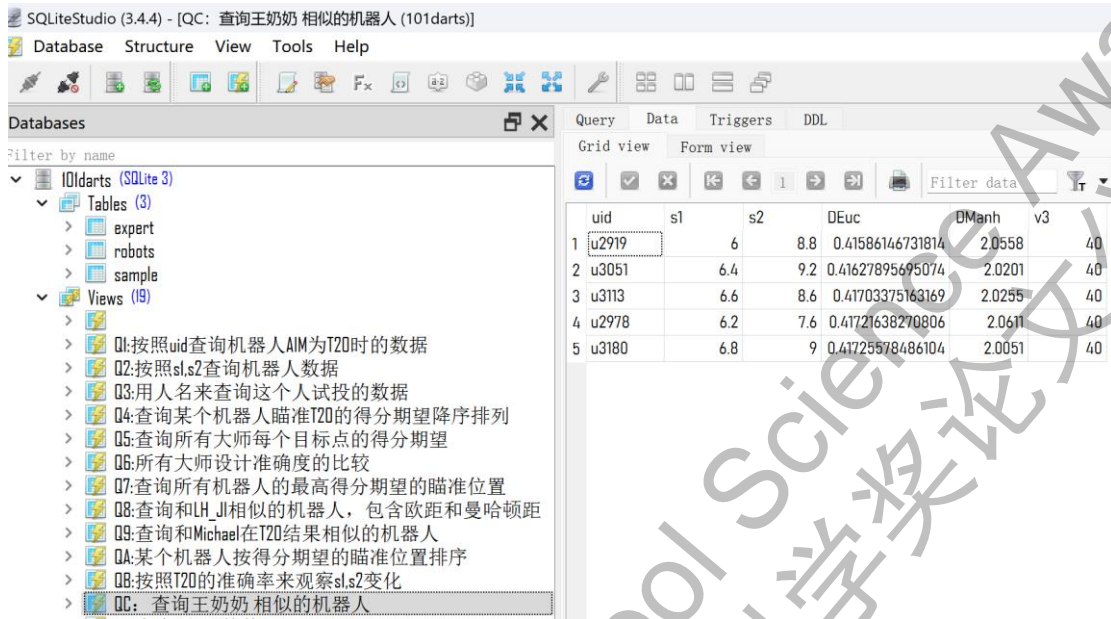
$$P(target = a, hit = h) = \iint_h \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x-\mu_{ax})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\mu_{ay})^2}{2\sigma_y^2}\right) dx dy$$



### 3、用 SQLite Studio 存储和管理飞镖投掷机器人、专业玩家和老年玩家的投掷数据的举例。

数据库中有三张表, 其中 Expert 表存储 2019 年大师赛的专业玩家的数据, robots 表存储飞镖投掷机器人的仿真数据, Sample 表存储老年玩家投掷的

数据。为了便于观察和分析这些数据，左下是建立的一系列查询，右侧数据是用最近邻方法找到的和王奶奶水平最接近的机器人排序。



#### 4、世界冠军 Michael 和社区的王奶奶完成一次 501 比赛，完成比赛的最优策略比较。

下表中，阴影区域表示两位玩家采用相决策的状态，可以看出不同玩家在比赛中的最优策略有很大的不同，只有在比赛收尾阶段才会采用相同的决策。

状态S	Michael V. Gerwen		王奶奶		状态S	Michael V. Gerwen		王奶奶	
	最优决策	E_min	最优决策	E_min		最优决策	E_min	最优决策	E_min
501	T20	14.5142	SC16	71.0457	33	SD17	2.7579	SC19	39.8197
500-204	T20	...	SC16	...	32	D16	1.7776	D16	37.8634
500-123	T19-T20	...	SC16	...	31	SC19	2.7522	SC19	39.7845
122-82	T17-T20	...	SC16	...	30	D15	1.9661	D15	38.3577
82-60	T14-T20	...	SC16,SC11	...	29	SD17	2.7687	SC3	39.7002
59	SD19	3.0692	SC19	40.9379	28	D14	1.742	D14	38.2068
58	SD18	3.045	SC13	40.9237	27	SD15	2.7775	SC19	39.6264
57	SD17	3.0747	SC19	40.9379	26	D13	1.8292	D13	37.71
56	SD20	2.9762	T8	40.774	25	T3	2.7668	T3	39.7535
55	SD19	3.0247	SC17	40.7332	24	D12	1.9073	D12	37.7735
54	T14	2.9868	T11	40.5589	23	SD7	2.762	T19	39.6309
53	SD17	3.0109	SC2	40.5509	22	D11	1.7791	D11	37.6871
52	SD20	2.8067	SC14	40.3622	21	SD5	2.7679	T3	39.34
51	SD19	2.8563	SC15	40.5869	20	D10	1.7506	D10	38.5093
50	SD18	2.8348	SC11	40.0891	19	SD3	2.7546	T17	39.4849
49	SD17	2.8547	SC15	40.4432	18	D9	2.003	D9	38.0932
48	SD20	2.7801	SC14	40.1702	17	SD1	2.7522	SC13	40.1004
47	SD19	2.8207	SC15	40.3254	16	D8	1.6798	D8	37.2727
46	SD18	2.8062	T14	40.0954	15	SD3	2.7767	SC7	40.182
45	SD17	2.8275	SC16	40.2549	14	D7	2.2245	T10	38.7079
44	SD16	2.7749	T14	39.9323	13	SD1	2.7701	SC9	39.4688
43	SD15	2.8259	SC19	40.0193	12	D6	1.6912	D6	35.9405
42	SD10	2.8213	T6	39.9147	11	SD3	2.9032	T19	40.207
41	SD13	2.8368	DB	39.9786	10	D5	2.3478	D5	39.4909
40	D20	2.019	D20	38.4819	9	SD1	2.9058	T20	40.4486
39	SC19	2.8037	SC19	39.9811	8	D4	1.8261	D4	34.9834
38	D19	2.2728	D19	38.725	7	SD3	3.0708	SC5	41.5591
37	SD9	2.8208	SC16	39.9076	6	D3	2.4361	D3	38.7618
36	D18	1.9579	D18	37.8867	5	SD1	3.055	T1	42.0595
35	SC19	2.7263	SC7	39.8345	4	D2	1.9856	D2	34.1859
34	D17	2.2717	D17	38.592	3	SD1	3.1537	T1	43.7396
					2	D1	2.0751	D1	34.4826

5、一零一中飞镖社团在社区开展面向老年人的飞镖活动。

飞镖社团在社区中向老年人推广飞镖这项运动，同时完成访谈、调研和数据采集，帮助老年玩家坚持开展飞镖运动。

