GPY 筛法的改进与推广

作者：郭耀诘 广西师大附属外国语学校

(GPY 筛法，指 Goldston.D.A, Pintz.J and Yildirim.C 三人创立的筛法的简称)

关键词：Goldston.D.A, Pintz.J and Yildirim.C 筛法(以下简称 GPY 筛法)；概率数论；变分法；Perron 公式；zeta 函数；等差数列上的素数定理；素数的有界间距。

摘要：本文提出了一种 GPY 筛法的多素变数版本，并对其用一种比以往更简便的变分法加以改进。我们先用以往论文的思路，对多素变数的筛法进行对角化，然后引入关键的复变积分计算参数，再对维度变分得到结论，这比以往利用变分法的其他解析数论文章要简单。结果是我们证明了比原筛法更精确的结论，可以不用 GPY 猜想证明素数的有界间距，这是继 Maynard 的降维变分和张益唐的光滑数之后，突破有界间距的第三条路。

目录

5.最终结果

· Lagrange 定理和 Hensel 引理的应用

· 最终结论

参考文献

致谢

1. 问题的介绍

· Naive 素数对猜想

我们研究的是素数间隔问题的变种。但是再此之前，我们打算对曾经把间隔推进到有界的方法做一个回顾。首先我们从 Hardy-Littlewood 的猜想的雏形开始，我们称其为天真的猜想。

命题 1.1.1(Naive 素数对猜想) 对任意·n 个整数 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$，有无穷多个整数 k，使得 $k+h_i\in \mathbb{Z},1\le i\le n$ 为素数。

当然这是假命题，但是我们可以引入可行整数对的概念：

定义 1.1.2(可行整数对) 称满足命题 1.1.1 的 H 为可行整数对。然后令 $Q(n)=\prod_{i=1}^{n}(n+h_i)(\equiv 0 \bmod p)$

基于这个定义，GPY 筛法才能被构造出来。我们下面不再复现它的构造过程，而是直接在我们的正文中使用类似的技术。

再说一些 GPY 筛法比 Selberg 筛法强的地方：关于维度的处理，它采取了主动升维的方式，而这一点有非平凡的意义。所以，维度在这些问题中相当重要。所以正文我们将跳出原有的框架，使用一些相当离谱的维度，也许不再具备明显的算术意义。

· 突破有界间距的方法

在这一节，我们主要是提一提过往突破有界间距的方法：张益唐通过改进 Bombieri-Vinogradov 定理，通过光滑 GPY 筛法证明了 7000 万的间距。

Maynard 通过降维，把高维筛法转化为低维筛法再变分，证明了 600 的间距。

当然，摆在我们眼前的那些路径是清晰的：从问题的根源处，开始改进等差数列上素数的分布阶；或者从筛法本身入手，改进 GPY 筛法本身(客观的讲，其他筛法，特别是组合筛法，根本不像可以碰到有界的筛法)。当然了，这些方法无法立刻推广到多素变数，因为它的计算量立刻会爆炸式增长，因为等差数列上素数定理无法统一的处理这些素数。

所以这里实际上给出了对未来的一个展望。我们的对策是放弃筛法维度这个概念的所有算术意义，然后用对待一个连续变量的方式对待它。虽然这不是一个值得推崇的作法，但确实可以让我们处理这个变量的时候不再拘束。

然后对多素变数的推广也可以用概率数论的方法完成。结果当然和我们通常的预测一样：变量是常数个时，对结果的量级没有本质的影响。

在本文中，我们采取以下非实效但让人感到简洁的记号：不区分几乎所有正常数的记号，统一用 C 表示，因为本文没有出现它们之间的减法；保留量级最高的余项，忽略以外的余项；主项主要看量级最高项，因为这种项的系数在文中从头到尾都是正的，而其他的项我们统一视为余项。

· **证明思路**

本文的证明思路是这样：先给出 naive 素数对猜想及其推广，然后我们引出 $Q_f(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(n-f(i)\right)$.接着我们给出权重函数，并利用它写出筛函数

$$S_f(N,m)=\sum_{N\le n<2N}\left(\sum_{i=1}^{m}\chi_{\mathrm{P}^m}\left(n-f(i)\right)-1\right)\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

于是这就是前三章计算的核心。接下来我们通过 **定理 3.1.1.** 和 **定理 3.1.2.** 来化简 T_1 和 T_2.其中用到了 Erdos-Kac 定理。随后我们进行筛函数的对角化，这里的方法完全来自于 Selburg 筛法的推导，最后我们用初等方法达到了

$$S_f(N,m)=N\left(\sum_{t\le 2N}\frac{\alpha_t^2}{h(t)}\right)\left(Cm(\log N)^{\varepsilon}-1\right)+R_0$$

这一结果.接下来我们使用复分析的方法。先用熟知的核心积分打开 α_t 的分子，利用级数展开和交换积分顺序把它化归成 **引理 4.2.1.** 随后我们用 Perron 公式算出了这一积分。

在变分法的章节，我们运用变分方法解决了参数 $k(h)$ 的确定，本质上超越了 GPY 筛法。然后我们运用 Lagrange 恒等式暴力化简 α_t，于是写出了最终的 **定理 4.3.3.** 然后我们清晰地看见了主项和余项。最后我们用 Siegel-Walfisz 定理解决了主项的下界，于是完成了 **定理 5.2.1.** 此时代入可行整数对的概念，立刻解决了素数的有界间距问题。

那么，让我们正式开始。

2. GPY 形式的变化

· 天真的素数对猜想的启发

为了推广 GPY 筛法，我们首先自然而然地推广所谓的天真素数对对猜想。也就是说，我在下面给出的命题。

命题 2.1.1　记

$$\mathrm{P}^{m}=\left\{p_1p_2......p_{m_0}\middle|p_i\in \mathrm{P},m_0\le m;\forall i,j\le m_0,i\ne j:p_i\ne p_j\right\}$$

那么对 $k\in \mathrm{Z},\forall f(k):\exists n\in \mathrm{Z},s.t.,\forall i\le k,n+f(i)\in \mathrm{P}^{m}$.

与天真素数对猜想一样，这当然是一个错误的命题。我们需要做的是提取“可行整数对”概念的替代品。如此定义 $Q_f(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(n-f(i)\right)$

当

$$Q_f(n)\equiv 0\left(\bmod \prod_{i=1}^{m+1}p_i\right)\overset{CRT}{\Longleftrightarrow} Q_f(n)\equiv 0\left(\bmod\ p_i\right),p_i\in \mathrm{P},\forall n\in \mathrm{Z}$$

我们的 $f(i)$ 就不再满足条件了。因为当 n 充分大时，它一定有其它因子或重复的素因子。下面为了方便讨论，我们记 $Q_f(n)\equiv 0\left(\bmod p_i\right)$ 为 v_{p_i} .

· 权重函数

和最开始的 GPY 筛法一样，为了方便计算和表示，我们考虑引入权重函数：$\chi_S(n)$.定义为:

$$\chi_S(n)=\begin{cases}1, n\in S\bigcap\{1\}\\ 0, n\notin S\bigcap\{1\}\end{cases}$$

然后我们的筛函数是：

$$S_f(N,m)=\sum_{N\le n<2N}\left(\sum_{i=1}^{m}\chi_{\mathrm{P}^m}\left(n-f(i)\right)-1\right)\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中 λ_d 是 Selberg 方法中的参数，它早已有已知的最佳取值。接下来，为了进行 $S_f(N,m)$ 的计算，我们不妨将和式拆为如下两个部分(直接验算就知道它们确实是相等的)：

$$T_1=\sum_{N\le n<2N}\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2, T_{2i}=\sum_{N\le n<2N}\chi(n-f(i))\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2\cdots\cdots\cdots(2)$$

So we have $S_f(N,m)=\sum_{i\le m}T_{2i}-T_1$.

3.二次型对角化

· T_1 的计算

在本章中，我们将对上述求和进行初步处理。让我们从第一个求和开始。. 交换 T_1 内外的求和号，然后就有

$$T_1=\sum_{N\le n<2N}\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\left(\sum_{\substack{N\le n<2N\\ [d_1,d_2]\|Q_f(n)}}1\right)$$

接下来令 v_d 作为同余方程 $Q_f(n)\equiv 0(\mathrm{mod}\, d)$ 的解数，显然有

$$T_1=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}v_{[d_1,d_2]}\left\{\frac{N}{[d_1,d_2]}+O(1)\right\}:=NM_1+E_1$$

接下来在第四章取 $\lambda_d\le 1$，就有

$$E_1\le\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}v_{[d_1,d_2]}\le m^2N^{-1}T_1$$

然后对 M_1，

$$M_1=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}v_{[d_1,d_2]}\frac{1}{[d_1,d_2]}\cdots\cdots\cdots(3)$$

从以上两式就得出

$$T_1=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}v_{[d_1,d_2]}\frac{N}{[d_1,d_2]}+O\left(\frac{m^2}{N-m^2}M\right)\cdots\cdots\cdots(4)$$

然后我们有下面的定理

定理 3.1.1. 对 T_1,我们有

$$T_1=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}v_{[d_1,d_2]}\frac{N}{[d_1,d_2]}+O\left(\frac{m^2}{N-m^2}M\right)$$

其中 $M_1=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}v_{[d_1,d_2]}\frac{1}{[d_1,d_2]}$

· T_2 的计算

我们不妨将求和展开，直接计算，有

$$T_{2i}^*:=\sum_{N<n\le 2N}\chi_{P^m}(n-f(i))=\sum_{N<n\le 2N}\sum_{t\le m}\sum_{\substack{Q_f(n)\equiv 0(\bmod p_j)\\ j=1,2,3,\cdots,\ t-1,t}}1\cdots\cdots\cdots(5)$$

注意到

$$Q_f(n)\equiv 0\left(\bmod\ p_j\right)\Leftrightarrow \exists i\in\{1,2,\cdots k\},s.t.,n\equiv f(k)(\bmod\ p_j)$$

那么我们只需计算满足 $p_j : p_j \mid n-f(i)$ 的个数，然后就可以得出 $Q_f(n)$ 的素因子的情况。我们此处不使用算术数列中 Bombieri-Vinogradov 的定理，而是往概率数论走。

$$T_{2i}=\sum_{N<n\le 2N}\sum_{t\le m}\sum_{\substack{Q_f(n)\equiv 0(\bmod\ p_j)\\ j=1,2,3,\cdots,\ t-1,t}}1\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

$$=\sum_{N<n\le 2N}\sum_{t\le m}\binom{\omega(Q_f(n))}{t}\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

$$=\sum_{N<n\le 2n}C(n)\cdot 2^{\omega(Q_f(n))}\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

$$\overset{Erdos-Kac}{=}\sum_{N<n\le 2N}C(n)\cdot 2^{\log\log Q_f(n)}\left(1+O(R_N)\right)\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

我们都知道由 Erdos-Kac's 定理, $\omega(Q_f(n))$ 的余项, R_0 即为

$$R_0\le 2N\int_{\log\log N}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le CNe^{-\frac{(\log\log N)^2}{2}}<<T_{2i}^{*}\cdots\cdots\cdots(6)$$

在这个式子中“<<”的意思是“远远小于”.我们使用正态分布的尾项估计来计算余项的大小。最后，从平均值定理来看，我们得到了

$$\exists C>0:T_{2i}=C\sum_{N<n<2N}2^{\log\log Q_f(n)}\left(1+O\left(R_N\right)\right)\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2\cdots\cdots\cdots(7)$$

所以我们有如下定理.

所以我们有如下定理.

定理 3.2.1. 对 T_{2i},我们有

$$T_{2i}=C\sum_{N<n<2N}2^{\log\log Q_f(n)}\left(1+O\left(R_N\right)\right)\left(\sum_{d\mid Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

其中 R_0 为远小于主项的余项.

· T_1 的对角化

现在，我们终于进入了这一部分，也许这是我论文中最简单的部分，我们会使用 Selberg 的一些著名结论，而不进行证明。

我们先进行 T_1 的对角化，T_{2i} 的对角化一定程度上可以利用 T_1 的结果.

令 $g(d)=\frac{v_d}{d}$, 我们有

$$M_1=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}g\left(\left[d_1,d_2\right]\right)=\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{g\left(d_1\right)g\left(d_2\right)}{g\left(\left(d_1,d_2\right)\right)}\cdots\cdots\cdots(8)$$

然后我们设 $h(p)=\frac{g(p)}{1-g(p)}$，由[1]的熟知套路，有

$$M_1=\sum_{d_1,d_2}g(d_1)g(d_2)\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{t\mid(d_1,d_2)}\frac{1}{h(t)}$$

$$=\sum_{\substack{d_1,d_2\le 2N\\ t\mid(d_1,d_2)}}g(d_1)\lambda_{d_1}\cdot g(d_2)\lambda_{d_2}\sum_{t\le 2N}\frac{1}{h(t)}$$

然后令

$$h(d)=\prod_{p\mid d}h(p)=\prod_{p\mid d}\frac{v_p}{p-v_p}$$

有

$$\alpha_t=\sum_{\substack{t\le N\\ t|d}} g(d)\lambda_d = g(t)\sum_{\substack{1\le n\le \frac{N}{t}\\ (n,v)=1}}\lambda_{vn}, T_1 = N\sum_{t\le N}\frac{\alpha_t^2}{h(t)}+O(R)\cdots\cdots\cdots(9)$$

这就解决了T_1的对角化.

· T_{2i} 的对角化

由于我们之前已经细致讨论了第一部分和式的对角化，现在我们只用将T_{2i}化归成T_1的情况就好.注意到

$$\begin{aligned}
T_{2i} &= C\sum_{N<n<2N} 2^{\log\log Q_f(n)}\left(1+O\left(R_N\right)\right)\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2 \\
&= C(\log N)^{\varepsilon}\sum_{N<n\le 2N}\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2(1+O(R)) \\
&= C(\log N)^{\varepsilon}\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ [d_1,d_2]|Q_f(n)}} 1\sum_{d_1,d_2}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}(1+O(R)) = (\log N)^{\varepsilon}T_1+O(R)
\end{aligned}$$

于是到这里已经T_1和一模一样了，直接用之前的结果就得到

$$T_{2i} = N(\log N)^{\varepsilon}M_{2i}+O(N^{-1}m^2(\log N)^{\varepsilon}T_{2i})\cdots\cdots\cdots(10)$$

其中将上式直接对角化，即得

$$M_{2i}=M_1=\sum_{t\le 2N}h^{-1}(t)\alpha_t^2, \forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

然后就可以把第一章中的筛函数计算出来了，我们将以上对角化的结果，代入第二章的式(1)(2)有

$$S_f(N,m)=\sum_{i=1}^{m}T_{2i}-T_1=N\left(\sum_{t\le 2N}\frac{\alpha_t^2}{h(t)}\right)\left(Cm(\log N)^{\varepsilon}-1\right)+O(m^3T_{2i}(\log N)^{\varepsilon})$$

$\cdots\cdots\cdots(11)$

最后，让我以一个定理总结这一章努力的成果.

定理 3.3. 对第二章定义出的筛函数 $S_f(N,m)=\sum_{i\le m}T_{2i}-T_1$，有

$$S_f(N,m)=N\left(\sum_{t\le 2N}\frac{\alpha_t^2}{h(t)}\right)\left(Cm(\log N)^{\varepsilon}-1\right)+R_0$$

其中有 $|R_0|<<Cm^3T_{2i}(\log N)^{\varepsilon}$，$\alpha_t=\sum_{\substack{d\le 2N\\ 1\le t|d}}\frac{v_d}{d}\cdot\lambda_d$.

*4.*复变积分和变分方法

· Selberg 参数的连续渐近

在这一章节的开始，我们先做一些准备工作.因为在下面我们需要将一些数论量做积分运算，所以需要它们在实数集上的替代品.令

$$\widetilde{\mu}_R(d)=\begin{cases}N^{-\varepsilon_0},\mu(d_0)=0,d\in B(d_0,\frac{1}{2})\\ \mu(d),otherwise\end{cases},\chi_t(s)=\begin{cases}N^{-\varepsilon_0},(\frac{s}{t},s)>1\\ 1,otherwise\end{cases}$$

以及令

$$\widetilde{g}(d)=\begin{cases}0,d=n+\frac{1}{2},n\in Z\\ g(d_0),|d_0-d|=\min_{d_i\in Z}|d_i-d|,otherwise\end{cases},\lambda_d=\widetilde{\mu}_R(d)\left(\frac{\log 2N/d}{\log 2N}\right)^{k(d)}$$

显然有

$$\left|\lambda_d-\mu(d)\left(\frac{\log 2N/d}{\log 2N}\right)^{k(d)}\right|\le C\cdot N^{-\varepsilon_0}\to 0, N\to\infty.\forall d\in[0,N]\cdots\cdots\cdots(12)$$

于是我们给出了 Selberg 参数的连续渐进.

· 有趣的复变积分

这半页基本上类似于[1]的想法。从[1]得

$$I=\frac{m!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s^{m+1}}ds=\begin{cases}(\log x)^m,|x|>1\\ 0,0<|x|\le 1\end{cases}\cdots\cdots\cdots(13)$$

其中对数取右半平面一条解析分支.利用式(13)展开分子有

$$\alpha_t=g(t)\sum_{\substack{1\le t\le\frac{2N}{v}\\(t,v)=1}}\lambda_{tv}=g(t)\sum_{\substack{1\le t\le\frac{2N}{v}\\(t,v)=1}}\mu(tv)\left(\frac{\log 2N/v}{\log 2N}\right)^{k(tv)}$$

$$=\tilde{\mu}_R(t)\tilde{g}(t)\sum_{\substack{v\le N/t\\(v,t)=1}}(\log 2N)^{-k(vt)}\frac{k(vt)!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\tilde{\mu}_R(v)\tilde{g}(v)}{s}\cdot\frac{\log^s(2N/d)}{s^{k(vt)+1}}ds$$

其中 $w(v)=\frac{2N}{v}$，为了在每一个参数上都取最佳维度，我们把 Selberg 参数为

$$\left|\lambda_d(Selburg)-\mu(d)\left(\frac{\log 2N/v}{\log 2N}\right)^{k(d)}(:=new\lambda_d)\right|\le C\cdot N^{-\varepsilon_0}$$

这是我们相对原始筛法做出的改进.为了将上面的无穷积分化归为有限积分，需要注意到下面的估计.

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}-\int_{c-iN}^{c+iN}\le\int_{c+iN}^{c+i\infty}\left|\log 2N/v\right|^{S}\left|s\right|^{-k(vt)-2}ds<<O(N^{-k(vt)-2})$$

从而有

$$I_0 := \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \frac{\log(2N/v)^s}{s^{k(vt)+1}} ds = \int_\gamma \quad + O(N^{-k(vt)-2}) + O(N^{-\varepsilon} I)$$

然后定义$\gamma := \{z | z \in [c-iN, c+iN]\}$，方向由负到正.接下来我们将幂函数展开，并代入积分，有

$$\sum_{\substack{v \le \frac{2N}{t} \\ (v,t)=1}} k(vt)! \int_\gamma \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \frac{w(d)^s}{s^{k(vt)+1}} ds$$

$$= \sum_{\substack{v \le \frac{2N}{t} \\ (v,t)=1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} k^j(vt) k(vt)! \int_{c-iN}^{c+iN} (\log s)^j \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \frac{(\log 2N/v)^s}{s} ds$$

$$= \sum_{\substack{v \le \frac{2N}{t} \\ (v,t)=1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_\gamma \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \frac{w^s}{s} \int_\gamma \frac{j!}{2\pi i} \frac{s^u}{u^{j+1}} du ds \cdots\cdots\cdots(14)$$

然后我们给出的二重复积分在积分区域内显然是存在的, 所以我们可以交换积分的顺序.就有

$$\sum_{\substack{v \le \frac{2N}{t} \\ (v,t)=1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_\gamma \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \frac{w^s}{s} \int_\gamma \frac{j!}{2\pi i} \frac{s^u}{u^{j+1}} du ds$$

$$= \sum_{\substack{v \le \frac{2N}{t} \\ (v,t)=1}} k^j(vt) k(vt)! \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_\gamma u^{-j-1} du \int_\gamma \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \cdot \frac{w^s}{s} s^u ds$$

然后我们去计算内层的积分，由**引理 4.2.1**，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s} \cdot \frac{w^s}{s} s^u ds = z\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v) s^{u-1}\Big|_\gamma + O\Big(\int_\gamma s^u \frac{w}{N} \log N ds\Big)$$

它的过程略微有些复杂，将在下两页证明并陈述。

引理 4.2.1 的证明：这是因为我们可以选$a(n)$使得($\phi(s) = \frac{w^s}{s}$)

$$\frac{\widetilde{\mu}_R(v)g(v)}{s}s^u\ell(s)=\sum_{j\ge1}\frac{a(j)}{j^s}=\sum_{j=1}^{w(d)}\frac{a(j)}{j^s}+c(w(d))\frac{w(d)^{1-s}}{1-s}+O(\frac{1}{\log N})$$

其中 $\ell(s)<<s^{\varepsilon_0},\forall\varepsilon_0>0$ 是一个误差函数.而对下一个等号，$c(w(d))$ 是运用积分中值定理的常数，在假设 $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a(j)}{j^s},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{j^s}$ 都绝对收敛，即 s 在绝对收敛横坐标的右侧时，我们用第一实效 Perron 公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}-iN}^{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}+iN}\ell(s)\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\phi(s)ds=\sum_{j\le w}a(j)+O(\frac{(\log N)^{2-s}}{N})+O(\frac{1}{N})$$
$$+O(\frac{\log\log N}{N})=c(N)\sum_{j\le w}\frac{a(j)}{j^s}+O(\frac{\log\log N}{N}C(N))+O(\frac{(\log N)^2}{N})$$

其中 $c(N),C(N)$ 是 Dirichlet 级数的中值定理的常数。以及(θ为待定参数)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a(j)}{j^s}+\frac{C(N)}{N}(\frac{w(v)^{1-s}}{1-s}+O(\frac{1}{\log N}))$$
$$=\sum_{j=1}^{w}\frac{a(j)}{j^s}+O(\frac{1}{\log N})=\phi(s)\ell(s)\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}+O(\frac{\log\log N}{N}C(N))+O(\frac{(\log N)^2}{N})$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}-iN}^{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}+iN}\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\ell(s)\phi(s)ds=\sum_{j\le\log2N/v}a(j)+O(\frac{\log\log N}{N}C(N))$$
$$=c_s(N)\sum_{j\le w(d)}\frac{a(j)}{j^s}+O(\frac{\log\log N}{N}C(N))+O(\frac{(\log N)^2}{N})=c(N)C(\log2N/v)$$
$$(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j^s}+\frac{w(v)^{1-s}}{1-s})+O(\frac{\log\log N}{N}C(N))$$

然后我们选取 $a(n)$ 和 c 满足

$$\left|\sum_{n\ge1}\frac{a(n)}{n^s}\right|,\left|\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^s}\right|<+\infty,c=1+\frac{1}{\log\log\theta N/v},c(N)\in(1,\zeta(1+\frac{1}{w})(\log\log N)^{-1})$$

于是此时将结果带入到积分，

$$= c_s(N)\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}} + O(\frac{\log\log N}{N}C(N)) + O(\frac{(\log N)^2}{N})$$

于是最后一个等号显然不足为惧。用 zeta 函数在 1 附近的渐近公式，有

$$\zeta(1+\frac{1}{w(v)}) = \frac{\sigma^{1-s}}{s-1} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\gamma_j(s-1)^j = w(v) + O(\frac{1}{w(v)})$$

故有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}-iN}^{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}+iN} \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\ell(s)\phi(s)ds \le w\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s_0^{1-u}} + O(C(N)\frac{\log\log N}{N})$$

以及在另一方向的

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}-iN}^{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}+iN} \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\phi(s)\ell(s)ds \ge \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s_0^{1-u}} + O(C(N)\frac{\log\log N}{N})$$

也正确，就有$\exists 0<|z_0|\le\frac{N}{vt},\exists C>0$，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}-iN}^{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}+iN} \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\ell(s)\phi(s)ds = |z_0|\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\Big|_\gamma + O(C(N)\frac{\log\log N}{N})$$

这是综合上两式把 s 选取在端点而得.于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}-iN}^{1+\frac{1}{\log\log\theta N/v}+iN} \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\phi(s)\ell(s)ds = |z|\frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s^{1-u}}\Big|_\gamma + O(|z|C(N)\frac{\log\log N}{N}))$$

其中$0<|z|\le\frac{N^{1+\varepsilon}}{vt}$，$\forall\varepsilon>0$，故有

引理 4.2.1.有如下积分等式成立.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)}{s}\cdot\frac{w^s}{s}s^u ds = |z|\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)s^{u-1}\Big|_\gamma + O(|z|\frac{\log\log N}{N}C(N))$$

其中$0<|z|\le\frac{N^{1+\varepsilon}}{vt}$，$\forall\varepsilon>0$，然后对余项的部分，直接估计有(s 的实部小)

$$R(N)<|z|\frac{C(N)\log N}{N}\Big|_{\gamma}<\frac{C\log N|z|}{N}[(c+iN)^{c-1+iN}-(c-iN)^{c-1+iN}]\cdots\cdots(15)$$

所以主项是远大于余项的.然后把(15)代入到二重积分中，然后反复使用(13)的结论，就可以得到($0\le c_1<1$ 是严格的)

$$I=N\sum_{\substack{v\le\frac{2N}{t}\\(v,t)=1}}k^{j}(vt)k(vt)!\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{(-1)^{j}}{2\pi i}\int_{\gamma}u^{-j-1}s^{u-1}\widetilde{g}(v)\widetilde{\mu}_{R}(v)du+R(N))$$

$$=Cz\sum_{\substack{v\le\frac{2N}{t}\\(v,t)=1}}k^{j}(vt)k(vt)!\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}}{2\pi i}(O(1)+\int_{\gamma-1}\frac{(c+iN)^{r}-(c-iN)^{r}}{(r+1)^{j+1}}\widetilde{g}(v)\widetilde{\mu}_{R}(v)dr)$$

$$+c_1I$$

$$=Cz\sum_{\substack{(v,t)=1\\v\le\frac{2N}{t}}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-k(vt))^{j}}{j!}k(vt)\widetilde{g}(v)\widetilde{\mu}_{R}(v)\left[(\log c+iN)^{j}-(\log c-iN)^{j}\right]+c_1I$$

然后我们给出 $c=1+\frac{1}{\log\log\theta\,\mathrm{N}/\mathrm{v}}$，

$$I=Cz\sum_{\substack{v\le\frac{2N}{t}\\(v,t)=1}}\left[(1+iN+\frac{1}{\log \mathrm{N}})^{-k(vt)}-(1-iN+\frac{1}{\log N})^{-k(vt)}\right]\cdot\Gamma(k(vt)+1)\widetilde{\mu}_{R}(v)\widetilde{g}(v)+c_1I$$

以上我们计算了积分的值。在下一节，我们引入变分方法计算它的极大值。

· 维度变分和渐近展开

这一段采用类似于 Maynard 的想法，但变分的对象有所区分。

让我们将积分的内容写得更加清楚一些，于是对中括号中的两个复数进行实数化后再相减，并使用定义过的权重函数，则

$$I = Cz\sum_{v\le \frac{2N}{t}} \frac{(1-iN+\frac{1}{\log\log\theta N/v})^{k(vt)}-(1+iN+\frac{1}{\log\log\theta N/v})^{k(vt)}}{(1+N^2)^{k(vt)}}\cdot\Gamma(k(vt)+1)\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)\chi(v)+$$

$c_1 I$

$$= Cz\frac{\left|1+iN+\frac{1}{\log\log\theta N/v}\right|}{|1+iN|}\left|\sum_{v\le \frac{2N}{t}} \frac{(1-iN)^{k(vt)}-(1+iN)^{k(vt)}}{(1+N^2)^{k(vt)}}\cdot\Gamma(k(vt)+1)\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)\chi(v)\right|+$$

$c_1 I$

$$= Cz\left|\sum_{v\le \frac{2N}{t}} \frac{(1-iN)^{k(vt)}-(1+iN)^{k(vt)}}{(1+N^2)^{k(vt)}}\cdot\Gamma(k(vt)+1)\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)\chi(v)\right|+$$

$c_1 I + O(\frac{I}{N\log N})$

然后我们直接对 $k(vt)$ 使用离散情形的 E-L 方程，计算 I 虚部的极大值的下界，

于是有

$$\begin{cases} |k(h)| \le K > 0 \\ \Delta_{k(h)}\operatorname{Im}[\frac{(1-iN)^{k(h)}-(1+iN)^{k(h)}}{(N^2+1)^{k(h)}}\Gamma(k(h)+1)\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t})] = 0 \quad , h := vt \\ \Delta^2_{k(h)}\operatorname{Im}[\frac{(1-iN)^{k(h)}-(1+iN)^{k(h)}}{(N^2+1)^{k(h)}}\Gamma(k(h)+1)\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi(\frac{h}{t})]\Big|_{k=k_0} \le 0 \end{cases}$$

其中

$$\Delta_{k(h)}F(k(h),h) := F(k(h),h) - F(k(h)-1,h) - \left[F(k(h),h) - F(k(h),h-1)\right]$$

然后由于它是函数方程，第一个解的存在性是显然的，这是初等的观察。而第二个解的存在性也是十分自然的，因为极小值显然在边界才会取得，从而我们的变

分问题是有解的，对第一个方程，

$$\Delta_k \operatorname{Im}[\frac{(1-iN)^{k(h)}-(1+iN)^{k(h)}}{(N^2+1)^{k(h)}}\Gamma(k(h)+1)]\tilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\tilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t})=0$$

$$\Leftrightarrow F(k(h))-F(k(h)-1)=F(k(h))[\tilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\tilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t})-\tilde{\mu}_R(\frac{h}{t}-1)\tilde{g}(\frac{h}{t}-1)\chi_t(\frac{h}{t}-1)]$$

$$F(k):=\operatorname{Im}\frac{(1-iN)^k-(1+iN)^k}{(1+N^2)^k}$$

然后我们知道左边对比虚部时，只要次数模二余一，$k(vt)$ 就可以做到常数级。

而当次数模二不余 0，直接取 N 周围的另一个解，由 String 公式，有

$$\operatorname{Im}[\frac{(1-iN)^{k(h)}-(1+iN)^{k(h)}}{(N^2+1)^{k(h)}}\Gamma(k(h)+1)]$$

$$=\left|\frac{(1-iN)^{k(h)}-(1+iN)^{k(h)}}{(N^2+1)}\sqrt{2\pi k(h)}\left(\frac{k(h)}{e}\right)^{k(h)}\right|+o(\operatorname{Im})$$

$$\le C\left|\frac{2N}{N^2+1}\cdot\frac{N}{e}\right|^N\sqrt{N}=C\left(\frac{2}{e}\right)^N\to 0$$

于是我们令 $k(h)\in\overline{B}\left(2h+1,\varepsilon(h)\right),\varepsilon(h)\le N^{-r_o},\exists r_0>0$，然后我们知道，实际上右边的差分是为 0 的，于是综上所述，有如下的引理。

引理 4.3.1 当我们给定筛法的维数为

$$k(h)=\begin{cases}2k(h)+1+\varepsilon_1(h),\left|\varepsilon_1(h)\right|<<1,h\in D\\ \\ N+\varepsilon_2(h),\dfrac{\left|\varepsilon_2(h)\right|}{N}<<1,h\notin D\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots(16)$$

则筛函数达到极大值。其中，D 是我们任意选出的一个集合。

于是，下面我们进行展开式的计算。

$$\left|I\right| \widetilde{<} \left|z\right| \operatorname{Im} \sum_{v \le \frac{2N}{t}} \frac{(1-iN)^{k(vt)} - (1+iN)^{k(vt)}}{(1+N^2)^{k(vt)}} \cdot \Gamma(k(vt)+1)\widetilde{\mu}_R(v)\widetilde{g}(v)\chi_t(v)$$

$$\approx \left|z\right| \sum_{\substack{t|h\le 2N \\ h\in D}} F(2k_h h+1)\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t}) + \sum_{h\notin D}(\frac{2}{e})^N + O(\frac{I}{N})$$

$$\widetilde{>} CN^{-2k_t h}\left|z\right| \sum_{\substack{t|h\le 2N \\ h\in D}} \widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t}), \min_{h\in D} k_h \le k_t \le \max_{h\in D} k_h$$

于是我们不妨先计算维度的上界。我们有

$$F(k(h)) - F(k(h)-1) = F(k(h))[\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t}) - \widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t}-1)\widetilde{g}(\frac{h}{t}-1)\chi_t(\frac{h}{t}-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (N^2+1)[(1-iN)^{2k_h h} - (1+iN)^{2k_h h}] = (2k_h h + 1 + C(\frac{h}{t}))[(1-iN)^{2k_h+1} - (1+iN)^{2k_h+1}]$$

$$+O(\varepsilon_1(h)F)$$

$$\Leftrightarrow 4k(h) = 2k(h) + 1 + \varepsilon_1(h) + C(\frac{h}{t}) \Leftrightarrow k(h) = \frac{1}{2} + \varepsilon_1(h) + C(\frac{h}{t}) \cdots\cdots\cdots (17)$$

其中(与第四章的 C( )不同)

$$C(v) := \widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t}) - \widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t}-1)\widetilde{g}(\frac{h}{t}-1)\chi_t(\frac{h}{t}-1)$$

然后选取 D 为

$$D = \left\{ h \in \mathrm{Z} \middle| \widetilde{\mu}_R(h) \ge N^{-\varepsilon}, (\frac{h}{t}, t) = 1, 3 \le h \le N \right\}$$

$$\Rightarrow \left|I\right| = CN^{-2k_t h + \frac{\log \varepsilon_1(h)}{\log N}} \left|z\right| \sum_{\substack{t|h\le N \\ h\in D}} \widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t}) + O(\frac{I}{\log N}) + O(\varepsilon_1(h)N)$$

$$= CN^{-1+\varepsilon_1(h)+C(\frac{h}{t})} \left|z\right| \sum_{\substack{t|h\le N \\ h\in D}} \widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})\chi_t(\frac{h}{t}) + O\left(\max\left\{ \frac{I}{\log N}, \varepsilon_1(h)N \right\} \right)$$

$$= CN^{-1+C(\frac{h}{t})+\varepsilon_1(h)}|z|\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t})\widetilde{g}(\frac{h}{t})+O\left(\max\left\{\frac{I}{\log N},\varepsilon_1(h)N\right\}\right)$$

$$= CN^{-1+C(\frac{h}{t})+\varepsilon_1(h)}|z|[(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t}))(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{g}^2(\frac{h}{t}))$$

$$+\sum_{\substack{h_i<h_j\in D\\ t|h_{i,j}\le 2N}}(\widetilde{\mu}_R(\frac{h_i}{t})\widetilde{g}(\frac{h_j}{t})-\widetilde{\mu}_R(\frac{h_j}{t})\widetilde{g}(\frac{h_i}{t}))^2]^{1/2}+O\left(\max\left\{\frac{I}{\log N},\varepsilon_1(h)N\right\}\right)$$

在最后一行我们用了 Lagrange 恒等式。其中，我们知道连续化的 Mobius 函数值的均值，以及我们对连续化的$\widetilde{g}(d)$已经有所了解，它的值是小于一的常数，有

$$|I| = CN^{-1-C(\frac{h}{t})+\varepsilon_1(h)}|z|[(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t}))(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{g}^2(\frac{h}{t}))$$

$$+\sum_{\substack{h_i<h_j\in D\\ t|h_{i,j}\le 2N}}(\widetilde{\mu}_R(\frac{h_i}{t})\widetilde{g}(\frac{h_j}{t})-\widetilde{\mu}_R(\frac{h_j}{t})\widetilde{g}(\frac{h_i}{t}))^2]^{1/2}+O\left(\max\left\{\frac{I}{\log N},\varepsilon_1(h)N\right\}\right)$$

$$= CN^{-1-C(\frac{h}{t})+\varepsilon_1(h)}|z|[(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{\mu}_R(\frac{h}{t}))(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{g}^2(\frac{h}{t}))+\sum_{\substack{h_i,h_j\in D\\ t|h_{i,j}\le 2N}}\frac{C_2t^2}{h_i^2}(\widetilde{\mu}_R(\frac{h_i}{t})-\mu_R(\frac{h_j}{t}))^2]^{1/2}$$

$$+O\left(\max\left\{\frac{I}{\log N},N\varepsilon_1(h)\right\}\right)$$

$$\ge CN^{-1-C(\frac{h}{t})+\varepsilon_1(h)}|z|[C_2\frac{\varphi(t)}{t}N(\sum_{\substack{h\in D\\ t|h\le 2N}}\widetilde{g}^2(\frac{h}{t}))+C^{'}N^{-1}\log\frac{N}{t}\left(\frac{\varphi(t)}{t}N\right)^2]^{1/2}$$

$$+O\left(\max\left\{\frac{I}{\log N},N\varepsilon_1(h)\right\}\right)\cdots\cdots\cdots(18)$$

然后我们还要如下引理，来说明最后一行.

引理 4.3.2 令$T(n):=\{1\le s\le n|\mu(s)\ne 0\}$，则$\left|T(n)-\frac{6}{\pi^2}n\right|\le 3\sqrt{n}$

证明：注意到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i|n}\frac{1}{n^2}\mu(i)=1$$

以及熟知的

$$\left|T(n)-n\sum_{i\le\sqrt{n}}\frac{\mu(i)}{i^2}\right|\le\sqrt{n}$$

就证完了.

于是，我们终于得到了 α_t 极大值的展开。我们将式(18)直接代入之前的表达式，就得到了以下定理。

定理 4.3.3 对之前定义的 α_t

$$\alpha_t \ge C\tilde{\mu}_R(t)\tilde{g}(t)\frac{|z|}{N^{1+C(v)}}[\frac{\varphi(t)}{t}N(\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le 2N}}\tilde{g}^2(\frac{h}{t}))+C_3(\log\frac{N}{t})^2N\frac{\varphi^2(t)}{t^2}]^{1/2}+R(N)$$

$$R_t(N):=\max\left\{\frac{I}{\log N},N\varepsilon_1(vt)\right\}\cdots\cdots(19)$$

5.最后的结果

· Lagrange 定理和 Hensel 引理的应用

这里基本上就回到了初等的部分。代入到 $S_f(m,N)$，我们计算它最核心的那个和式，有(到这里 2N 和 N 没有本质的区别了)

$$\sum_{t\le 2N} h^{-1}(t)\alpha_t^2 \ge C\sum_{t\le N}\tilde{\mu}_R^2(t)\tilde{g}^2(t)\frac{|z|^2}{N^{2+2C(v)}h(t)}[\frac{\varphi(t)}{t}N\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le N}}\tilde{g}^2(v)+N(\log\frac{N}{t})^2\frac{\varphi^2(t)}{t^2}]$$

$$+O(\sum_{t\le N}h^{-1}(t)\alpha_t^2\max\left\{\frac{1}{\log N},\varepsilon_1(vt)\frac{N}{I}\right\})\cdots\cdots\cdots(20)$$

然后用广义积分中值定理，我们可得到

$$\sum_{t\le N} h^{-1}(t)\alpha_t^2 \ge C\sum_{t\le N}N^{-2C(v)}\frac{\tilde{g}^2(t)}{h(t)}|z|^2[\frac{\varphi(t)}{tN}\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le N}}N^{-2C(v)}\tilde{g}^2(v)+\frac{1}{N}(\frac{\varphi(t)}{t}\log\frac{N}{t})^2]$$

$$+O(\frac{\sum_{t\le N}\alpha_t^2h^{-1}(t)}{\log N})\cdots\cdots\cdots(21)$$

下面我们把目光放在初等数论上，去计算之前所说的 v_t 的值。当 t 为素数 p 时，

由 Lagrange 定理，$v_d<m$，就推出了 $g(p)<\frac{m}{p}$，再将 mod p 用 Hensel 引理提升

为 mod $p^r(r>1)$ 的解。以上过程说明了

$$\tilde{g}^2(v)h^{-1}(t)=\frac{v_t^2}{t^2}\prod_{p|t}\frac{p-v_p}{v_p}\ge C\frac{1}{t^2}\prod_{p|t}(\frac{p}{v_p}-1)\ge\frac{C}{t}$$

然后有

$$\sum_{t\le N} h^{-1}(t)\alpha_t^2 \ge C\sum_{t\le N}N^{-2C(v)}\frac{\tilde{g}^2(t)}{h(t)}|z|^2[\frac{\varphi(t)}{tN}\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le N}}\tilde{g}(v)+\frac{1}{N}(\frac{\varphi(t)}{t}\log\frac{N}{t})^2]+O(\frac{\sum_{t\le N}\alpha_t^2h^{-1}(t)}{\log N})$$

$$\ge CN^{-1}\sum_{t\le N}\frac{|z|^2}{t^2}N^{-2C(v)}\varphi(t)\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le N}}\tilde{g}(v)+C'N^{-1}\sum_{t\le N}(\frac{|z|}{t}\varphi(t)\log\frac{N}{t})^2+O(\frac{\sum_{t\le N}\alpha_t^2h^{-1}(t)}{\log N})$$

以及我们知道 $\varphi(t)\ge\frac{Ct}{\log\log t}$，结合 Cauchy 不等式就有

$$C'N^{-1}\sum_{\substack{t\le N\\ vt\in D}}\frac{|z|^2}{t^2}N^{-2C(v)}\varphi^2(t)(\log(\frac{N}{t}))^2 \ge C'N^{-1}|z|^2\sum_{\substack{t\le N\\ vt\in D}}\left(\frac{N^{-C(\lfloor\frac{2N}{t}\rfloor)}\log\frac{N}{t}}{\log\log t}\right)^2$$

$$\ge C'\left(\sum_{\substack{t\le N\\ vt\in D}}\frac{\log N-\log t}{N^{1+C(\lfloor\frac{2N}{t}\rfloor)}\log\log t}|z|\right)^2 \ge C'\left(\sum_{\substack{\mu(t-1)=0\\ 2|\omega(t)}}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t}\right)^2$$

由右侧求和号的定义，

$$\sum_{\substack{\mu(t-1)=0\\ 2|\omega(t)}}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t}\ge\sum_{\substack{qp\equiv 1 \bmod r^2,\, p,q\ge 3\\ (p,q)=(p,r)=(r,q)=1}}\frac{\log N-\log qp}{N\log\log qp}=\sum_{(q,r)=1}\sum_{\substack{p>q,(p,r)=1\\ p\equiv q^{-1}\bmod r^2}}\frac{\log N-\log qp}{N\log\log qp}$$

再由 Siegel-Walfisz 定理，

$$\sum_{p\equiv q^{-1}\bmod r^2}\frac{\log N-\log qp}{N\log\log qp}=\sum_{s=1}\frac{\log N-\log q\dfrac{s}{\log s\varphi(r^2)}r^2}{N\log\log q\dfrac{s}{\log s\varphi(r^2)}r^2}+O(N\log Ne^{-c\sqrt{\log N}})$$

$$\ge\sum_{s=1}\frac{\log N-\log\dfrac{r^2}{\varphi(r^2)}qs+\log(q\log s\dfrac{r^2}{\varphi(r^2)})}{N\log\log q\dfrac{s}{\log s}\dfrac{r^2}{\varphi(r^2)}}\ge\sum_{s=1}\frac{\log N-\log C(r)qs}{N\log\log qsC(r)}$$

$$\approx\int_1^{\frac{N}{qC(r)}}\frac{\log N-\log C(r)qs}{N\log\log qsC(r)}ds=\frac{1}{qNC(r)}\int_3^N\frac{\log N-\log s}{\log\log s}ds=\frac{1}{qNC(r)}\int_3^{\log N}\frac{\log N-s}{\log s}e^s ds$$

$$\ge\frac{1}{qNC(r)}\left(\int_3^{\log N}\frac{\log N}{\log s}e^s ds-N\right)=-\frac{1}{qC(r)}+\frac{\log N}{qNC(r)}\int_{\log 3}^{\log N}\frac{e^s}{\log s}ds$$

$$=-\frac{1}{qC(r)}+\frac{\log N}{qNC(r)}\left(\frac{N}{\log\log N}+\int_{\log 3}^{\log N}\frac{e^s}{s(\log s)^2}ds\right)$$

其中 $C(r)=\dfrac{r^2}{\varphi(r^2)}$ 对 q 求和就有

$$\sum_{p\equiv q^{-1}\bmod r^2}\frac{\log N-\log pq}{N\log\log pq}\ge-\sum_q\frac{1}{qC(r)}+\sum_q\frac{\log N}{qNC(r)}\left(\frac{N}{\log\log N}+\int_{\log 3}^{\log N}\frac{e^s}{s(\log s)^2}ds\right)$$

$$=\frac{(\log N)^2}{\log\log NC(r)}+O\max\left\{\frac{(\log N)^2}{\log\log N}\int_{\log 3}^{\log N}\frac{e^s}{s(\log s)^2}ds,\frac{\log N}{C(r)}\right\}$$

以上就是主项的下界。然后注意到

$$CN^{-1}\sum_{t\le 2N}\frac{|z|^2}{t^2}\varphi(t)\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le 2N}}\widetilde{g}(v)\le CN^{-1}\sum_{t\le N}\frac{|z|^2}{t^2}\varphi(t)\sum_{\substack{vt\in D\\ vt\le 2N}}\frac{1}{v}\le C\sum_{t\le 2N}\frac{|z|^2}{t\log\log t}$$

这样就区分出了余项，那么

$$\sum_{t\le 2N}h^{-1}(t)\alpha_t^2\ge |z|^2\left\{C(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2+O(\sum_{t\le N}\frac{1}{t\log\log t})\right\}+O(\frac{|z|^2}{\log N}(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2)$$

这样就结束了主要部分的估计.

· 最终结论

我们将 $\sum_{t\le N}h^{-1}(t)\alpha_t^2$ 代入到 $S_f(m,N)$，

$$S_f(m,N)=N(\sum_{t\le 2N}h^{-1}(t)\alpha_t^2)(Cm(\log N)^{\varepsilon}-1)$$

$$\ge |z|^2\left\{CN(\log N)^{\varepsilon}(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2+O(N\sum_{t\le N}\frac{(\log N)^{\varepsilon}}{t\log\log t})\right\}$$

$$+O(\frac{|z|^2}{(\log N)^{1-\varepsilon}}(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2)+O(CN|z|^2(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log t\log t})^2)$$

于是我们以一个定理结束本文。

定理 5.2.1 对筛函数

$$S_f(N,m)=\sum_{N\le n<2N}\left(\sum_{i=1}^{m}\chi_{\mathrm{P}^m}\left(n-f(i)\right)-1\right)\left(\sum_{d|Q_f(n)}\lambda_d\right)^2$$

我们有 $\exists\lambda_d$：

$$S_f(m,N)=N(\sum_{t\le N}h^{-1}(t)\alpha_t^2)(Cm(\log N)^{\varepsilon}-1)$$

$$\ge |z|^2\left\{CN(\log N)^{\varepsilon}(\sum_{\substack{\mu(t-1)=0\\ 2|\omega(t)}}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2+O(N\sum_{t\le N}\frac{(\log N)^{\varepsilon}}{t\log\log t})\right\}$$

$$+O(\frac{|z|^2}{(\log N)^{1-\varepsilon}}(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2)+O(CN|z|^2(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log t\log t})^2)$$

其中我们的$1\le|z|\le\log(2N)$.

最后我们指出，我们的筛法是强于[1]中的筛法的，因为取 Q 的实根为可行整数对时，

$$\left|\left\{(p_1,p_2)\big\|p_1-p_2\right|<+\infty,\le N\le p_1,p_2\le 2N\right\}\Big|$$

$$\ge |z|^2\left\{CN(\log N)^{\varepsilon}(\sum_{\substack{\mu(t-1)=0\\ 2|\omega(t)}}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2+O(N\sum_{t\le N}\frac{(\log N)^{\varepsilon}}{t\log\log t})\right\}$$

$$-\pi(2N)+O(\frac{|z|^2}{(\log N)^{1-\varepsilon}}(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log\log t})^2)+O(CN|z|^2(\sum_{t\le N}\frac{\log N-\log t}{N\log t\log t})^2)$$

那么我们无条件地证明了素数的有界间距定理的推广。即定理 5.2.2：

定理 5.2.2. 以 p_n 记第 n 个素数，则

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)<+\infty$$

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+i}p_{n+j}-p_{k+n}p_{t+n})<+\infty$$

$$\ldots\ldots$$

都成立。

参考文献

[1] Goldston.D.A, Pintz.J and Yildirim.C, ‘Primes in tuples I.’ *Annals of Mathematics.,*170(2),

(2009)819-862

[2] Maynard,J ‘Small gaps between primes.’ *Annals of Mathematics*.,181(1),(2015)383-413

[3] Zhang.Y, ‘Bounded gaps between primes.’ *Annals of Mathematics*.,179(3),(2014)1121-1174.

[4] Friedlander.J.B and Iwaniec.H, ‘Opera de cribro.’ *American Methemaatical Society*.(2010)

[5] Soundarajan.K, ‘Small gaps between prime number.’ *The work of Goldston-Pintz-Yildirim. Bulletin of Mathematics Society*,44(1),(2007),1-18

[6] Erdos.P.and Kac.M. ‘The Gaussian aw of Erroos in the theory of Additive Number Theoretic Functions.’ *Journal of Mathematics*.(1940)

[7] J.Rosser, L.Schoenfeld. ‘Approximate formulas for some functions of prime numbers.’ *Illinois Journal of Mathematics,*6(1), (1962)

[8] Cramer.H, ‘On tehe order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers.’*Acta Arithmetica,*2(1),(1936),23-26

[9] Polymath8b, IX: Large quadratic programs. http://terrytao.wordpress.com/2014/02/21/polymath8b-ix-large-quadratic-programs/#comment-297456

[10] Erdos.P. ‘The difference of consecutive primes.’ *Duke Mathematics Journal,*6(2),(1940)

[11] Zhang.Y, ‘Discrete mean estimates and the Landau-Siegel zero.’ *(Arxiv:2211.02515)*,(2022)

[12] Travorlzh,https://zhuanlan.zhihu.com/p/550586353

致谢页

毫无疑问，这是一个富有想象力的成果。这个问题的 Key idea 来自于 James Maynard 的十年以前的工作。

研究这个问题的 motivation 有些复杂。开端来自于一年前的一个 idea：通过研究椭圆曲线上特殊点个数的计算，得到一种三次指数和的估计。

但是我很快失败了，这个想法太天真，not even a wrong. 但是我发现在这类问题中，所考虑的椭圆曲线并非是本质的。于是我使用变分法来寻找这样所谓本质的替代品。这时我又想到距现在两年前我曾研究过的素数间距，当时我只能做到平方根号级别。而九个月前我决定将他们结合，并且注意到 Maynard 的工作。不同的是我的时间没那么多，无法把其拆为多个一维变量变分再细致计算，所以选择了比较取巧的效果相对接近的办法，如果以后有时间一定会再次推进相关的进一步的研究。

这篇论文的想法是很 nature 的，对角化二次型的指导思想是三位大佬 Goldston.D.A, Pintz.J 和 Yildirim.C 的原封不动的想法。然后在使用 Bombieri-Vinogradov 定理的地方，我运用了 Erdos-Kac 的定理来代替。原因是我无法简单的像处理一个素因子那样处理，在这方面，概率数论已经完全够用。

到了复变积分的技术基本是我的原创，当然是基于那个对数化积

分的式子上(这件事当然不是我的原创，但除了这件事都算得上是)，然后整理出更漂亮的式子用来变分。这里我们研究的那个函数没有三位大佬的那么容易，所以无法轻易化成 zeta 函数。

到变分学的部分，idea 基本上是 Maynard 的工作，虽然细节和他的 paper 没什么关系，于是变分后神奇地干掉了一部分负的值，这部分实质上是与原始 GPY 筛法的差距，克服了素数分布阶的困难。需要说的是，虽然我们选出的 Selberg 参数有点诡异，但是这其实是由于我们选择干掉负项引起的。

最后初等数论方面的估计没什么可说的，系数方面我们克服了困难，但是我们最终的量级不如三位大佬的 paper 当中的，这是来自于 Erdos-Kac 定理和繁琐复杂的高维 Bombieri-Vinogradov 定理之间的差距。

以上部分都是我一人完成，未接受他人帮助。

终于来到了致谢的部分：感谢我的父母，他们在生活上给了我许多帮助，总是出现在我最需要的时候；感谢我当时的老师唐立东和罗怀华，他对我的课内作业网开一面，给了我研究数学的时间；感谢我之前的数竞老师何周，他教会了我许多事；感谢师大附外对我的支持；感谢广西师大派出的外聘竞赛教练，他们强化了我初等数论的知识。

特别鸣谢知乎介绍 GPY 筛法和指数和问题的用户@Travorlzh，没有他的中文介绍，我大概都不会知道有 GPY 筛法这么神奇的东西，本文多次采用了他的记号，也在对角化的部分参考了他的文章。