

欧氏空间中带约束条件的等径问题

申凯元、何晞诚、唐子盛

摘要

欧氏空间中带限制条件的等径问题是指在限定的区域内寻找直径一定且测度最大的区域。在本文中，我们研究了限制区域是如下三种情形之一的等径问题：(1) 在平面上，由两条平行直线所围成的带状区域，我们给出的结论是一个直径为 1 的圆去掉两个球缺；(2) 在 n 维欧氏空间中，由两个平行的超平面所围成的区域，我们给出的结论是一个直径为 1 的 n 维球去掉两个球缺；(3) 在 n 维欧氏空间中，由圆锥所围成的区域。我们利用 Steiner 对称及其推广的方法，解决了上述三个问题，并确定了所求区域的形状，测度，并证明了该区域唯一。

关键词：等径问题，Steiner 对称，超平面，圆锥

目录

一、前言与背景	1
二、Steiner 对称及其推广	4
2.1 平面几何中一些基本结论	4
2.2 Steiner 对称	6
2.3 平面上平行线约束下的等径研究	7
2.4 Steiner 对称的推广	10
2.5 在 n 维空间的超平面约束下的等径研究	12
三、在 n 维圆锥约束下的等径研究	16
四、后续研究问题	25
五、未来展望	25
参考文献	26
致谢	27

2024 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2024丘成桐中学科学奖论文公示

一、前言与背景

等周问题和等径问题是几何学中的经典问题，历史上也很多与之相关有着很多有趣的典故。早在古罗马时代，古罗马史诗《埃涅阿斯纪》中提到公主狄多以牛皮圈地的故事。而中国的《明史·吕宋传》中记载了这样一个故事：葡萄牙人向吕宋国（今菲律宾）国王请求得到一块牛皮大小的土地来建造房屋居住。国王想都没想就答应了他们的请求，那些人于是撕裂牛皮，将牛皮连接起来，占有了吕宋国大量的土地，国王非常惊讶，但也无可奈何。

以上典故，用数学语言来描述就是：给定一条长度固定的线段，如何使其所围成的图形面积最大？这便是经典的等周问题。利用等周不等式[1]，这一问题有一个完美的答案。等周不等式表达为：

$$C^2 - 4\pi S \geq 0$$

其中， C 为平面上的简单闭曲线 Γ 的周长， S 为 Γ 所围成区域面积。该不等式取等号当且仅当 Γ 为圆。因此，当给定长度的线段围成的图形为圆时面积最大。

等周不等式可以推广到 n 维欧氏空间。若 K 是欧氏空间 \mathbb{R}^n 的一个凸体， B 为质心在原点的单位球。 $V(K)$ 表示凸体 K 的 n 维测度， $S(K)$ 表示凸体 K 的表面积，则：

$$\left(\frac{V(K)}{V(B)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \left(\frac{S(K)}{S(B)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

上述等号成立当且仅当 K 是 n 维球 [2]。

与等周问题相关的是等径问题，即在欧氏空间中，直径为定值的图形中，什么样的形状能使该图形体积最大？等径不等式[1]也对该问题进行了描述并给出了答案。等径不等式的表述如下：设 K 为平面上简单闭曲线围成的区域，其面积和直径分别为 $m(K)$ 和 d ，则：

$$d^2 - \frac{4}{\pi} m(K) \geq 0$$

当且仅当 K 为圆盘或单点集时等号成立。在高维的情形，等径不等式为：

$$V(\text{conv } A) \leq \frac{v_n}{2^n} (|A|)^n$$

其中 $\text{conv } A$ 为 A 的凸包， $V(A)$ 为 A 的 n 维测度， v_n 是 \mathbb{R}^n 内单位球的 n 维测度， $|A|$ 为 A 的直径。当且仅当 A 为 \mathbb{R}^n 中的球体时等号成立[4]。

上述问题我们称之为欧氏空间中不带限制条件等周或等径问题。现在，我们考虑在欧氏空间中，限制在特定区域内，直径一定且体积最大的形状。这一类问题我们称之为带限制条件的等径问题。关于这一问题，刘海亭等人[3]讨论了限制在两条平行直线之间，与两条平行线都相交且面积为固定值的所有图形中，存在一个周长最小的图形，进一步，他们确定了该图形的具体形状。Dai 等人[9]研究了限制在平面扇形区域中，过扇形的顶点且直径为1的所有图形中，存在唯一的图形，其面积最大。接着，Yang 等人[10]将这一结果推广到了三维空间。

在本文中，我们针对目前已有的结果，利用其中的某些方法，我们研究了限制区域是以下三种情形的等径问题：

1. 平面上，由一对平行直线围成的带状区域的等径问题。
2. n 维空间内，限制区域是一对平行的超平面的等径问题。
3. n 维空间内，限制区域为 n 维圆锥的等径问题。

我们主要利用 Steiner 对称及其推广和平面几何的基本知识解决了上述问题，并确定和计算出上述等径问题所对应的区域的形状和测度。

对 1，我们需要首先令两平行线之间的距离不超过1。在这个前提下，解决方案如下：

作一条与两平行线均平行且与两平行线距离相等的直线，以该直线上任意一点为圆心，作半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆。这个圆必然会被两平行线截去两部分区域（两部分区域为两个球冠），我们取该圆去掉两球冠以后的剩余部分，便得到了在两平行线之间直径为1且面积最大的图形。

经过计算，我们得到这个图形的面积：

$$\frac{\pi}{4} - a^2 \cdot \arccos a + 2a\sqrt{1-a^2}。$$

对 2，我们令两超平面之间的距离不超过1。在这个前提下，解决方案如下：

同上，我们令两超平面之间的距离不超过1。作一个与两超平面均平行且与两超平面距离相等的超平面，再作垂直于新定义的超平面的一条直线，以该直线上位于两超平面之间的点为球心，作半径为 $\frac{1}{2}$ 的

n 维球。该 n 维球必然会被两平行的超平面截去两部分区域（两部分区域为两个球缺），我们取该 n 维球去掉两球缺以后的剩余部分，便得到了在两平行超平面之间直径为1且体积最大的图形。

我们把半径为 r ，高为 h 的 n 维球缺的 n 维测度记作 $\varphi_n(r, h)$ ；对 $(n-2)$ 维球缺的 $(n-2)$ 维测度，同样定义 $\varphi_{n-2}(r, h)$ ，则该图形的 n 维测度计算式为：

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} - \frac{4}{n} \pi \left(\frac{1}{4} - a^2\right) \varphi_{n-2}\left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2}, \frac{1}{2} - a\right) + 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2} - \frac{1}{2} + a\right) \left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2} (1 - 2a) - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}}$$

对 3，我们首先预设前提：这个图形需要包含圆锥的顶点，且 n 维圆锥的锥角 θ 满足 $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ 。

在这个前提下，我们解决方案如下：

首先，我们给定球心在圆锥顶点的 n 维球，这个球会与该圆锥交于一个公共区域。这个区域关于一条过圆锥顶点的直线呈旋转对称。

在该直线上选择一点，以该点为球心，作半径为 $\frac{1}{2}$ 的 n 维球。当这个新定义的 n 维球同时与原 n 维球边界和原圆锥边界相交时，原 n 维球边界与新定义的 n 维球相交的部分围出了一个区域，其为一个 $(n-1)$ 维球；原圆锥边界与新定义的 n 维球相交的部分也围出了一个区域，其为一个 $(n-1)$ 维球。

当两个 $(n-1)$ 维球的直径相等时，我们取：公共区域内原圆锥边界与新定义的 n 维球相交部分以左的公共区域部分、公共区域内原 n 维球边界与新定义的 n 维球相交部分以右的公共区域部分、以及处于两个相交部分中间的新定义 n 维球的部分。将这三部分取并，我们便得到了包含圆锥顶点、直径为1且体积最大的图形。

该图形的 n 维测度计算式为：

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot a^n \cdot \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{n} \cdot \pi a^2 \tan^2\frac{\theta}{2} \varphi_{n-2}\left(a \cdot \tan\frac{\theta}{2}, 1-b\right) - \frac{\left(a \cdot \tan\frac{\theta}{2} - 1+b\right) \left(2a \cdot \tan\frac{\theta}{2} (1-b) - (1-b)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} - 2 \left(\frac{2}{n} \cdot \pi a^2 \tan^2\frac{\theta}{2} \varphi_{n-2}\left(a \cdot \tan\frac{\theta}{2}, 1-b\right) - \frac{\left(a \cdot \tan\frac{\theta}{2} - \frac{a+1-b}{2}\right) \left(2a \cdot \tan\frac{\theta}{2} \cdot \frac{a+1-b}{2} - \left(\frac{a+1-b}{2}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} \right)$$

在后文，我们将详细探讨得到这三个图形的过程。

二、Steiner 对称及其推广

2.1 平面几何中一些基本结论

在我们正式开始着手解决问题之前，我们需要先介绍一些基本结论，在此后的证明中，我们将会广泛应用这些结论。

引理 2.1.1 在直径为 1 的凸体内，两条长度为 1 的共面线段必然相交。

证明 假设在该凸体内存在两条不相交的共面线段 ab 、 cd ，且 $|ab| = |cd| = 1$ 。

考察凸四边形 $abdc$ ，它们的相对位置见图 1。显然四个内角 $\angle abc$ 、 $\angle acd$ 、 $\angle bac$ 、 $\angle bdc$ 中至少有一个角是钝角或直角。不妨假定 $\angle abc$ 为该角，则 $\triangle abc$ 中 $\angle abc$ 所对边为原四边形对角线 ac ，由正弦定理， $ac > ab = 1$ ，这与题设相悖。原命题得证。 \square

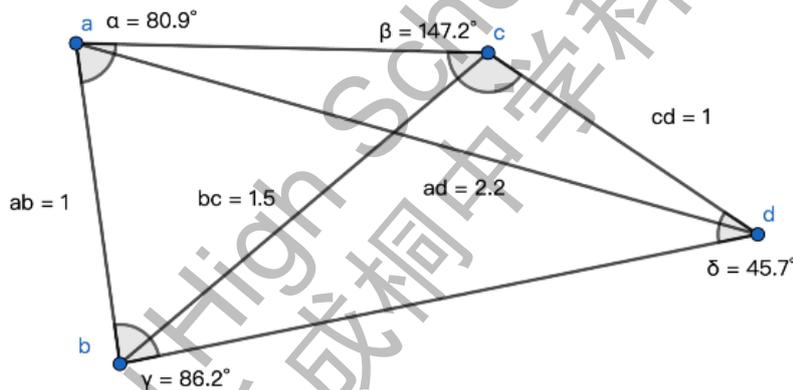


图 1 四边形 $abdc$

引理 2.1.2 给定一条线段 ab 和平面上任意一点 k ，在线段 ab 上任取一点 s ，当 s 在端点时， $|ks|$ 取得最大值。

证明 过 k 作 ab 的垂线，交 ab 于点 D ，连接 ak 、 bk 。由勾股定理， $|ks|^2 = |kd|^2 + |ds|^2$ 。

又 $|kd|$ 为定值，因此当 $|ds|$ 最大时， $|ks|$ 取得最大值。

当 $|ad| > |bd|$ 时， $|ds|_{max} = |ad|$ ，即 $s = a$ 时， $|ks|$ 取得最大值。

当 $|ad| \leq |bd|$ 时， $|ds|_{max} = |bd|$ ，即 $s = b$ 时， $|ks|$ 取得最大值。

图 2 给出了引理及证明中各点及线段相对位置。

综上，当 s 在端点时， $|ks|$ 取得最大值，命题得证。 \square

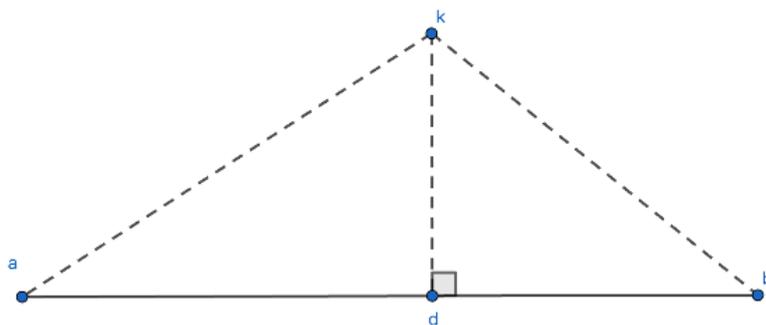


图 2 各点及线段相对位置

引理 2.1.3 对于一个以直线 L 为轴的 n 维旋转对称体，若在其内部存在点 p, q ，使得 $|pq|$ 最大，则线段 pq 和直线 L 相交。

证明 作过点 p 且垂直于直线 L 的超平面，记为 Π_p ；同理，对点 q ，同样作出这样的超平面，记为 Π_q 。由该图形的旋转对称性， Π_p, Π_q 截该 n 维旋转对称体所得部分应当为 $(n-1)$ 维球，分别记为 B_p, B_q 。记 Π_p, Π_q 间距离为 d_3 ，则我们可以将 Π_p 沿 L 方向，向 Π_q 移动 d_3 距离，使 Π_p, Π_q 重合。这个变换不会改变 B_p, B_q 上任意两点距离的相对大小关系。

现在， B_p 经过变换后和 B_q 为同心球，要使 $|pq|$ 最大，线段 $p'q$ 必然经过其公共球心。那么，线段 pq 也必然与 L 上一点相交。 □

当 $n=3$ 时，两超平面及其截旋转体所得截面、点 p, q 和点 p' 的位置如图 3 所示，其中 p' 及其在 Π_q 上所在圆为点 p 和原截面经变换后的点和圆。

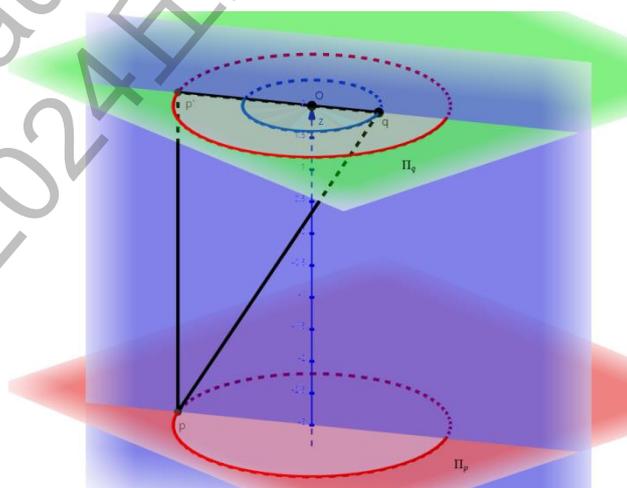


图 3 截面、 p, q 和 p' 的位置

注记 事实上，我们通过上述变换，也容易得到：在一旋转对称体内

任取一点，使得该点到旋转对称体内任意一点的距离最大的点唯一。

2.2 Steiner 对称

我们先回顾一下 Steiner 对称的定义[5]。

定义 给定一个凸集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和一条经过原点 O 的直线 L ，过原点 O 作垂直于 L 的 $(n-1)$ 维超平面 Π 。对于超平面的每个点 x ，设 L_x 是经过 x 且与 L 平行的直线。如果 $L_x \cap \Omega$ 非空，则构造以 x 为中点的线段 A_x ，使得线段 A_x 与 $L_x \cap \Omega$ 的长度相等。对超平面上的每个点都进行这一操作，再取这些线段 A_x 的并集，就会得到一个图形，这一变换称作 Ω 关于 L 的 Steiner 对称，将这个对称图形记作 $S_L(\Omega)$ 。记 $S_L(\Omega)$ 的直径为 $|S_L(\Omega)|$ 。图 4 展示了对一棱锥进行 Steiner 对称的示意图。

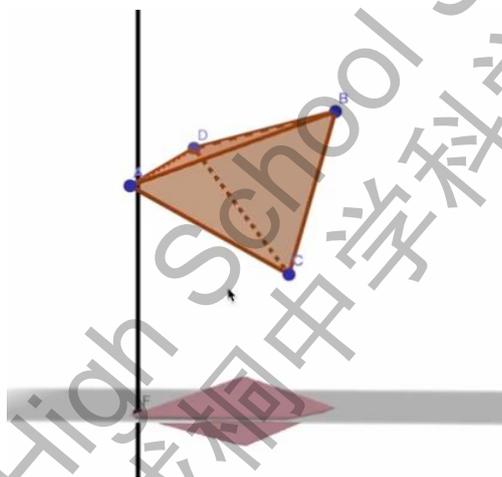


图 4 一个棱锥进行 Steiner 对称的示意图

我们接下来对 Steiner 对称的基本性质进行探究。

定理 2.2.1 $S_L(\Omega)$ 关于超平面 Π 对称

证明 由于任意一条线段 A_x 关于超平面 Π 对称，因此这些线段 A_x 的并集也必然关于超平面 Π 对称，原命题得证。 \square

定理 2.2.2 (Fubini's theorem [11]) Ω 和 $S_L(\Omega)$ 的 n 维测度相等。

$$\begin{aligned}
 \text{证明 } m(\Omega) &= \int_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega} 1 \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
 &= \int_{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Omega} \left(\int_{x_n \in L_x \cap \Omega} 1 \cdot dx_n \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\
 &= \int_{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Omega} m_{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\
 &= \int_{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Omega} \left(\int_{x_n \in L_x \cap S_L(\Omega)} 1 \cdot dx_n \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\
 &= m(S(\Omega))
 \end{aligned}$$

\square

定理 2.2.3 Ω 的直径不小于 $S_L(\Omega)$ 的直径。

证明 不妨取直线 L 为坐标轴 Ox_n ，并设在 $L_x \cap \Omega$ 中 x_n 坐标的最大值和最小值分别为 a, b ；在 $L_y \cap \Omega$ 中 x_n 坐标的最大值和最小值分别为 c, d 。

我们假设两个集合 X, Y 之间的距离为 $d^*(X, Y)$ ，则：

$$d^*(L_x \cap \Omega, L_y \cap \Omega)^2 = (\max\{a-d, b-c\})^2 + \|x-y\|^2 \geq \left(\frac{a-d+b-c}{2}\right)^2 + \|x-y\|^2$$

$$d^*(L_x \cap S_L(\Omega), L_y \cap S_L(\Omega))^2 \leq \left(\frac{a-d+b-c}{2}\right)^2 + \|x-y\|^2 \leq d^*(L_x \cap \Omega, L_y \cap \Omega)^2$$

因此 $d^*(L_x \cap S_L(\Omega), L_y \cap S_L(\Omega)) \leq d^*(L_x \cap \Omega, L_y \cap \Omega)$

由 x, y 的任意性，命题得证。 □

在回顾了 Steiner 对称的性质后，我们先来看以下问题。

问题 1 在平面上给定两条距离小于 1 的不重合的平行线。记两平行线之间直径为 1 且面积最大的图形为 Δ ，求这个图形的形状。

2.3 平面上平行线约束下的等径研究

通过适当的选取平面直角坐标系，可以使得两直线关于第一坐标轴对称，其方程分别为 $x_2 = a, x_2 = -a$ ，且 $0 < a < \frac{1}{2}$ 。

在该平面直角坐标系的基础上，我们可以给出如下定理。

定理 2.3 记 Δ^* 为 Δ 进行关于 Ox_1 和 Ox_2 的 Steiner 对称后所得对称体，则 Δ^* 就是 Δ ，并且

$$\Delta^* = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_2 \in [-a, a], x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Δ^* 的面积（即 Δ 的面积）是： $\frac{\pi}{4} - a^2 \cdot \arccos a + 2a\sqrt{1-a^2}$ 。

在本章以下部分，我们将证明该定理。

我们对 Δ 进行关于 Ox_1 和 Ox_2 的 Steiner 对称后,可以得到 $\Delta^* := S_{Ox_1} S_{Ox_2}(\Delta)$ 。由 Steiner 对称的性质, Δ^* 关于两坐标轴均对称。由上文所提及的 Steiner 对称的性质,我们断言, Δ^* 就是 Δ 。接下来我们研究 Δ^* 。

我们假设在第一象限中的一点 p_1 ,它在 Δ^* 的边界和两平行线的交集中(这一交集必然非空,否则 Δ^* 的面积仍可以增大,与假设矛盾);相应地,其关于轴 Ox_2 ,原点 O 和轴 Ox_1 对称的点为 p_2 、 p_3 、 p_4 。图 5 展示了平面直角坐标系、两平行线以及四点的相对位置。

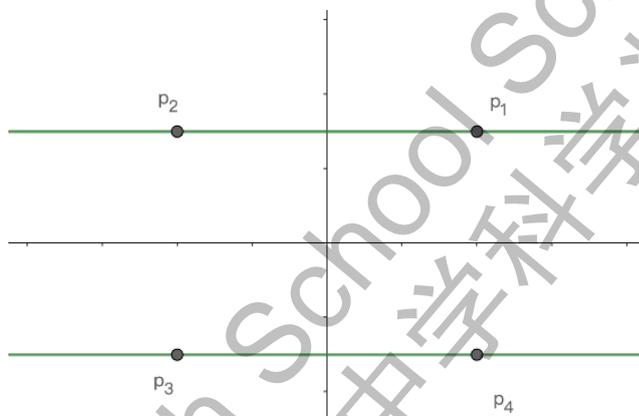


图 5 平面直角坐标系、两平行线以及 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的相对位置

现在,我们通过证明以下引理,得到 Δ^* 的一些性质。

引理 2.3.1. 若 p_1 为在第一象限中的任取的一点,满足在 Δ^* 的边界和两直线的交集中,其关于原点 O 对称的点为 p_3 ,则 $\max|p_1 p_3| = 1$ 。

证明 由题意可知,当 $|p_1 p_3|$ 取到最大值时, p_1 应当在 Δ^* 不与两直线相交的边界和两直线同凸体相交的边界的交界处。此时,假设 $\max|p_1 p_3| < 1$,则存在 p_1, p_4 之间不与两直线相交的边界上唯一的点 p ,使得 $|p_3 p| = 1$ 。由引理 2.1.3 的注记在 $n = 2$ 的退化形式以及 Δ^* 的对称性,可以知道对于 p_1 ,同样存在 $p_2 p_3$ 之间不与两直线相交的边界上唯一的点 p' 满足 $|p_1 p'| = 1$ 。然而由 Δ^* 的对称性,线段 pp_3 , $p_1 p'$ 平行不相交,与引理 2.1.1 矛盾。

综上所述, $\max|p_1 p_3| = 1$,命题得证。□

现在,设 p_5 为在 Δ^* 的边界和两直线的交集中且满足 $|p_5 p_7| = 1$ 的

第一象限点, p_6 、 p_7 、 p_8 分别为 p_5 关于轴 Ox_2 , 原点 O 和轴 Ox_1 对称的点。由引理 2.3.1 可知, Δ^* 必然包含长方形 $p_5 p_6 p_7 p_8$, 因为长方形中任意两点之距离不会超过 1。

引理 2.3.2 定义区域

$$R_a = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_2 \geq a, x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

$$R_{-a} = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_2 \leq -a, x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

上式所定义的两个区域为两个球冠。两球冠和原凸体 Δ^* 的并集的直径不超过 1。

证明 在与两直线相交的 Δ^* 的边界上取一点, 该点和两球冠上任意点之间的距离必然小于 1, 在 Δ^* 不与两直线相交的边界上取一个点 p , 若在球冠上存在一点 q , 使得 $|pq| > 1$, 则两区域和 Δ^* 的并集, pq 、 $p_5 p_7$ 、 $p_6 p_8$ 相对位置如图 6 所示。

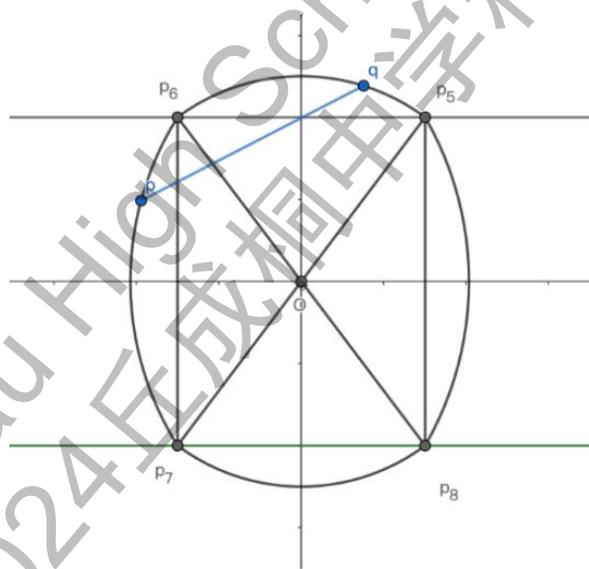


图 6 R_a 、 R_{-a} 和 Δ^* 的并集以及 pq 、 $p_5 p_7$ 、 $p_6 p_8$ 的相对位置

此时, 由定义可知, p_5 、 p_6 处于 R_a 上, p_7 、 p_8 处于 R_{-a} 上, 故对任意的 q , 都有 $|p_5 q|$, $|p_6 q|$, $|p_7 q|$, $|p_8 q| \leq 1$ 。同时 pq 必然和 $p_5 p_7$ 、 $p_6 p_8$ 其中一条线段不相交, 则与引理 2.1.1 矛盾, 故原命题得证。□

从这个事实出发, 我们可以直接考虑两个区域和 Δ^* 的并。这就回归到了 Bieberbach 给出的等径问题结论[6]。

因此, 我们得到了原问题的解决方案:

作以原点为圆心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆，减去上述的球冠 R_a 、 R_{-a} ，同时再

补上 Δ^* 在两直线处的边界，便得到了 Δ^* ：

$$\Delta^* = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_2 \in [-a, a], x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

经过计算，我们得到 Δ^* 的面积（也即 Δ 的面积）是：

$$\frac{\pi}{4} - a^2 \cdot \arccos a + 2a\sqrt{1-a^2}.$$

因此，原定理得到证明。

当我们将问题约束条件推广至 n 维，得到了下面这个推广问题：

问题 2 在垂直于一直线的两个不同的超平面（它们的距离不超过1）中间，求直径为1且 n 维测度体积最大的图形形状。

经典的 Steiner 对称并不能解决这一推广问题，接下来，我们将对 Steiner 对称进行推广，从而利用它来解决这一推广问题。

2.4 Steiner 对称的推广

面对上述问题，我们将对 Steiner 对称进行推广，得到一个新的变换。

定义 固定一个经过原点的 $(n-1)$ 维超平面 Π 和一条垂直于该平面的直线 L 。给定 \mathbb{R}^n 中的一个凸集 Ω 。对于每个点 $x \in L$ ，设 Π_x 为经过 x 且平行于 Π 的超平面。如果 $\Pi_x \cap \Omega$ 是非空的，则设 $B_x \subset \Pi$ 是一个以 x 为球心的 $(n-1)$ 维球，其 $(n-1)$ 维测度等于 $\Pi_x \cap \Omega$ 的 $(n-1)$ 维测度；对线段的每个点每一个点都进行以上操作，取所有 B_x 的并集，所得图形记作 $\overline{S_L}(\Omega)$ ，将这一变换称为 Ω 关于 L 的 $(n-1)$ 维的推广 Steiner 对称。

图 7 给出了当 $n=3$ 时，棱锥关于 z 轴进行推广 Steiner 对称示意图。

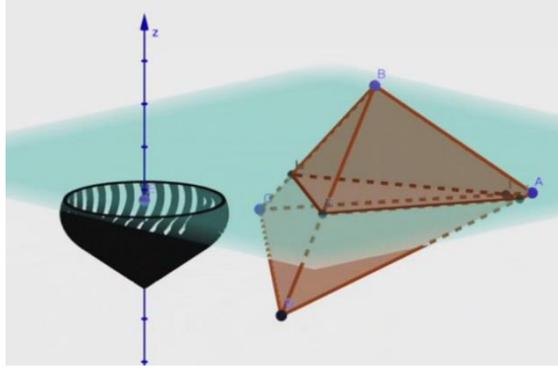


图 7 当 $n=3$ 时，棱锥关于 z 轴进行推广 Steiner 对称操作示意图

与定理 2.2.1 和定理 2.2.2 的证明同理，我们可以证明推广后的 Steiner 对称仍然不改变 Ω 的 n 维测度，且 $\overline{S_L(\Omega)}$ 关于直线 L 对称：

定理 2.4.1 $\overline{S_L(\Omega)}$ 关于直线 L 对称

定理 2.4.2 Ω 和 $\overline{S_L(\Omega)}$ 的 n 维测度相等。

定理 2.4.3 (随机 Steiner 对称[7]) 对任意凸体 $K \subset \mathbb{R}^d$ ，存在一个直线序列 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ ，使得 K_n 收敛到与其测度相等的球。其中， $K_0 = K$ ， $K_1 = S_{L_1}(K)$ ， $K_n = S_{L_n}(K_{n-1})$ 。

引理 2.4.4 对于紧凸集 $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ ，设 B_X 和 B_Y 是以原点 O 为球心的 n 维球， B_X 和 B_Y 的 n 维测度恰好就是 X 和 Y 的 n 维测度，则 $d^*(B_X, B_Y) \leq d^*(X, Y)$ 。

证明 设 \mathcal{H} 为 \mathbb{R}^n 中所有非空紧子集的集合，它在 Hausdorff 度量 $d_{\mathcal{H}}$ 下构成超空间。映射 $(A, B) \mapsto d^*(A, B)$ 是一个 \mathcal{H}^2 到 \mathbb{R} 的连续函数。根据定理 2.4.3，存在一个直线序列 $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ ，使得：

1. $d_{\mathcal{H}}(X_m, B_X) \rightarrow 0$ ，其中 $X_0 = X$ ， $X_k = S_{L_k}(X_{k-1}), k \geq 1$
2. $d_{\mathcal{H}}(Y_m, B_Y) \rightarrow 0$ ，其中 $Y_0 = Y$ ， $Y_k = S_{L_k}(Y_{k-1}), k \geq 1$ 。

由 Steiner 对称直径不减的性质，我们可以得到：

$$d^*(X_k, Y_k) \leq d^*(X, Y)$$

故 $d^*(B_X, B_Y) \leq d^*(X, Y)$ ，命题得证。 \square

在证明推广的 Steiner 对称仍满足直径不减之前，我们再介绍一个引理。

引理 2.4.5 选取 $x, y \in L$ ，使得 $\Pi_x \cap \Omega, \Pi_y \cap \Omega$ 是非空集，那么：

$$d^*(\Pi_x \cap S_L(\Omega), \Pi_y \cap S_L(\Omega)) \leq d^*(\Pi_x \cap \Omega, \Pi_y \cap \Omega)。$$

证明 由定理 2.2.3， $d^*(L_x \cap S_L(\Omega), L_y \cap S_L(\Omega)) \leq d^*(L_x \cap \Omega, L_y \cap \Omega)$ ，即

Steiner 对称不会增加两个集合的距离, 所以推广 Steiner 对称也不会增加两个集合间的距离, 命题得证。□

接下来我们就来证明推广后的 Steiner 对称仍满足直径不增的性质。

定理 2.4.6 $\overline{S_L}(\Omega)$ 的直径不大于 Ω 的直径, 即 $|\overline{S_L}(\Omega)| \leq |\Omega|$

证明 选取 $x, y \in L$, 使得 $\Pi_x \cap \overline{S_L}(\Omega), \Pi_y \cap \overline{S_L}(\Omega)$ 是非空集, 任取 $p \in \Pi_x \cap \overline{S_L}(\Omega), q \in \Pi_y \cap \overline{S_L}(\Omega)$ 都有:

$$\|p - q\| \leq d^*(\Pi_x \cap \overline{S_L}(\Omega), \Pi_y \cap \overline{S_L}(\Omega))$$

由引理 2.4.5, $d^*(\Pi_x \cap \overline{S_L}(\Omega), \Pi_y \cap \overline{S_L}(\Omega)) \leq d^*(\Pi_x \cap \Omega, \Pi_y \cap \Omega)$,

这说明任取 p, q , 都有 $\|p - q\| \leq d^*(\Pi_x \cap \Omega, \Pi_y \cap \Omega)$ 。

$d^*(\Pi_x \cap \Omega, \Pi_y \cap \Omega) \geq \|p - q\|_{\max} = d^*(\Pi_x \cap \overline{S_L}(\Omega), \Pi_y \cap \overline{S_L}(\Omega))$ 。

由 x, y 的任意性, $|\overline{S_L}(\Omega)| \leq |\Omega|$, 命题得证。□

接下来, 我们利用这个 Steiner 对称的推广来解决这一推广问题。

问题 2 在垂直于一条直线的两个不同的超平面 (它们的距离不超过 1) 中间, 求直径为 1 且 n 维测度体积最大的图形形状。

2.5 在 n 维空间的超平面约束下的等径研究

利用推广 Steiner 对称, 我们得以解决问题 2。

通过选取空间直角坐标系, 我们使题中该直线与第一坐标轴 Ox_1 重合, 且使得两超平面方程分别为

$$W_a = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = a\};$$

$$W_{-a} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = -a\}, \text{ 其中 } 0 < a < \frac{1}{2}.$$

那么, 我们在这个空间直角坐标系的基础上, 可得到如下定理。

定理 2.5 我们记 T_a 是所有在两超平面之间, 且直径为 1 的 n 维图形的集合。假定 Δ_1 为 T_a 中具有最大 n 维测度的元素, Δ_1^* 为 Δ_1 关于超平面

$\Pi_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = 0\}$ 的推广 Steiner 对称和关于轴 Ox_1 的

Steiner 对称所得的图形, 则 Δ_1^* 即 Δ_1 , 且:

$$\Delta_1^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -a \leq x_1 \leq a, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{1}{4}, a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

其 n 维测度为:

$$m_n(\Delta_1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} - \frac{4}{n} \pi \left(\frac{1}{4} - a^2\right) \varphi_{n-2}\left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2}, \frac{1}{2} - a\right) \\ + 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2} - \frac{1}{2} + a\right) \left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2} (1 - 2a) - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}}.$$

在此后本章内容中，我们证明这一定理。

利用推广 Steiner 对称，我们可以考察图形 Δ_1^* 。我们可以发现， Δ_1^* 关于超平面 Π_0 和 Ox_1 对称，并且为一绕 Ox_1 旋转的凸体。由上文所提及的推广 Steiner 对称的性质，我们断言， Δ_1^* 就是 Δ_1 。

相似地，我们再假设一点 p_1 ，在 Δ_1^* 的边界和 W_a 、 W_{-a} 的交集中（这一集合也必然非空，否则 Δ_1^* 的 n 维测度必将可以增大，与假设矛盾）；相应地、其关于 Π_0 对称、原点 O 以及 Ox_1 对称点为 p_2 、 p_3 、 p_4 。图 8 展示了 Π_0 、原点 O 、 Ox_1 轴以及 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的相对位置。

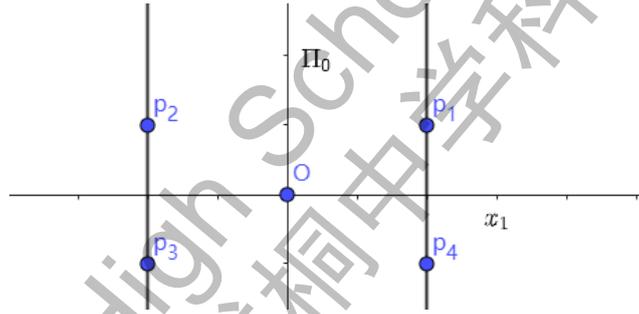


图 8 Π_0 、原点 O 、 Ox_1 轴以及 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的相对位置

现在，我们先证明以下引理。

引理 2.5.1 若 p_1 为在 Π_0 的右侧、 Ox_1 的上方的任取的一点，满足在 Δ_1^* 的边界和两超平面的交集中，其关于原点 O 对称的点为 p_3 ，则 $\max |p_1 p_3| = 1$ 。

证明 事实上，由 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的定义可知，此四点与 Ox_1 共面，这便转化为了引理 2.3.1 的二维情况。我们由引理 2.3.1，已经解决了这个问题。□

引理 2.5.2 设区域

$$G_1 = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1^2 \leq a^2, -x_1' \leq x_1 \leq x_1' \right. \right\}$$

由上式所述可知 G_1 为 n 维圆柱，则 Δ_1^* 包含 G_1 .

证明 我们取一点 $p_5(x_1', x_2, \dots, x_n)$ ，使得 $|p_5 p_7| = 1$ ，其中 p_6 、 p_7 、 p_8 分别为 p_5 关于 Π_0 、 O 、 Ox_1 对称的对应点。

取设 G_1 内部两点 p, q ，由引理 2.1.3 可知，当 p, q 与 Ox_1 共面时， $|pq|$ 才能取到最大值，又因为当两点和 Ox_1 共面时， $|pq|$ 最大值在边界上取到，所以由引理 2.1.2 和 Δ_1^* 的对称性，我们选取 p_5 、 p_6 、 p_7 、 p_8 所在平面考察。此时由引理 2.1.2，边界上两点最大值即 $p_5 p_7$ 的长度，故 G_1 的直径不超过1。由平面选取的任意性，原命题得证。□

引理 2.5.3 假定两 n 维区域

$$R_{-a} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \leq -a, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

$$R_a = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \geq a, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

上式所述区域为两个球缺，则原凸体 Δ_1^* 和 R_a, R_{-a} 的并的直径仍然不超过1。

证明 取 Δ_1^* 内部的一点 p ， $R_a \cup R_{-a}$ 内部一点 q ，由引理 2.1.3，可知 p, q 和 Ox_1 共面时， $|pq|$ 才能取到最大值。因此，我们转为二维情况思考。由凸体 Δ_1^* 的对称性，我们可以选取 p_5 、 p_6 、 p_7 、 p_8 、 Ox_1 所在的公共平面，在该平面上， R_a, R_{-a}, Δ_1^* 截面以及 p_5 、 p_6 、 p_7 、 p_8 、 Ox_1 、 pq 的位置如图 9 所示。

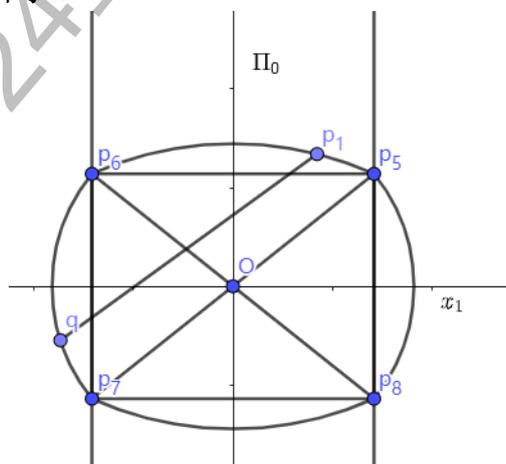


图 9 Π_0 、原点 O 、 Ox_1 轴以及 p_5 、 p_6 、 p_7 、 p_8 、 pq 的相对位置

事实上，由引理 2.3.2，我们可知在共面情况下，加入 R_a, R_{-a} 截面前后， Δ_1^* 截面直径不会超过 1，即不改变 Δ_1^* 直径。因此，由选择平面的任意性，原命题得证。□

因此，由经典等径问题中 Bieberbach 的结论，与 2.3 节类似，我们得到了 Δ_1^* 的描述：

以原点 O 为球心， $\frac{1}{2}$ 为半径的 n 维球去掉上文所述两球缺，再补上 Δ_1^*

在两超平面上的边界所得到的图形，便得到了 Δ_1^* ：

$$\Delta_1^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -a \leq x_1 \leq a, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{1}{4}, a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\},$$

接下来我们来计算 Δ_1^* （即 Δ_1 ）的 n 维测度，即一个大球体减去 2 个球缺所得图形的 n 维测度。

记大球体为 B_r ，其半径为 r ，其 n 维测度即

$$m_n(B_r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

由论文[8]，我们知道 n 维球缺的测度满足以下递推公式：

$\varphi_n(r, h)$ 满足以下的递推关系：

$$\varphi_n(r, h) = \frac{2}{n} \pi r^2 \varphi_{n-2}(r, h) - \frac{(r-h)(2rh-h^2)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} \quad (n \geq 4).$$

特别地，当 $n=3$ 时，即我们常见的三维球缺的体积表达式：

$$\varphi_3(r, h) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h),$$

当 $n=2$ 时，即二维弓形的面积表达式：

$$\varphi_2(r, h) = r^2 \cdot \arccos \frac{r-h}{r} - (r-h) \sqrt{2rh-h^2}.$$

回到本问题，球缺的半径 $r = \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$ ，高度 $h = \frac{1}{2} - a$ ，此时，该

球缺的 n 维测度为：

$$\varphi_n(r, h) = \frac{2}{n} \cdot \pi \left(\frac{1}{4} - a^2 \right) \varphi_{n-2} \left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2}, \frac{1}{2} - a \right) \\ - \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2} - \frac{1}{2} + a \right) \left(\sqrt{\frac{1}{4} - a^2} (1 - 2a) - \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} \quad (n \geq 4)。$$

因此， Δ_1 的 n 维测度即 n 维球的 n 维测度减去两个 n 维球缺的 n 维测度，即定理 2.5 给出的计算式。因此，原定理得到证明。

接下来，我们再通过推广 Steiner 对称来解决一个问题。

问题 3 给定某 n 维空间直角坐标系，以及 n 维圆锥：

$$C_\theta := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 \geq k^2 (x_2^2 + \dots + x_n^2) \}$$

其中 $k = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$ 。设 \mathcal{M}_θ 为 C_θ 中直径为 1 且包含原点 O 的图形的

集，求 \mathcal{M}_θ 中的最大元素 Δ_2 。

三、在 n 维圆锥约束下的等径研究

在先前，已经有学者研究过二维扇形[9]和三维圆锥[10]约束情况下的等径问题。这部分中，我们主要研究张角 $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi \right)$ 的 n 维圆锥约束情况下的等径问题。

记 Δ_2 关于 Ox_1 的推广 Steiner 对称体为 Δ_2^* ，由上文所提及的推广 Steiner 对称的性质，我们断言， Δ_2^* 就是 Δ_2 。此外，我们记 Δ_2^* 的边界为 $\partial \Delta_2^*$ ， A_θ 是以原点为球心的 n 维单位球。

接下来我们来证明几个引理，从而给出 Δ_2^* 的形状。

引理 3.1 存在一点 $p \in \Delta_2^*$ ，使得该点位于单位球的表面

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\} \text{ 上。}$$

证明 我们采用反证法证明。如果不存在这样的点 p ，那么我们可以找到一个极小实数 $\varepsilon > 0$ ，使得

$$\Delta_2^{*'} = \Delta_2^* + (\varepsilon, 0, 0, \dots, 0)$$

为 A_θ 的一个子集。然而此时，取原点 O 和 Δ_2^* 上任意一点的连线，由这些连线组成的集和 $\Delta_2^{*'}$ 的并的直径不大于1，这由**引理 2.1.2**所保证；同时，这个图形的 n 维测度严格大于 Δ_2^* 的 n 维测度，这同 Δ_2^* 的定义相矛盾，原命题得证。 \square

图 10 展示了 Δ_2^* 、 $\Delta_2^{*'}$ 以及 $\Delta_2^{*'}$ 和 Δ_2^* 边界和原点连线所得的并集的二维示意图。

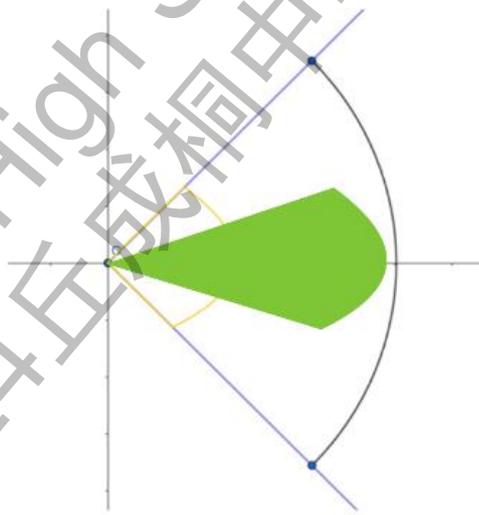


图 10 并集的二维示意图

引理 3.2 设 $a \in [0, 1]$ 是使得 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_\theta \mid x_1 \leq a\}$ 包含在 Δ_2^* 的最大实数，那么：对于 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial\Delta_2^* \mid x_1 \geq a\}$ 上的每一个点 p ，都存在点 $q \in \partial\Delta_2^*$ ，使得 $|pq| = 1$ 。

证明 假如在 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial\Delta_2^* \mid x_1 \geq a\}$ 上有一点 p_0 ，对于所有的 q ，都有 $|p_0q| < 1$ ，则 Δ_2^* 与半径足够小的，以 p_0 为圆心的 n 维球的

并集的直径也不超过1。因此，该并集也是 \mathcal{M}_θ 的一个子集，并且体积将会严格地比 Δ_2^* 大。这是不可能的，因此原命题得证。 \square

图 11 给出了我们上述操作的一个二维示意图。

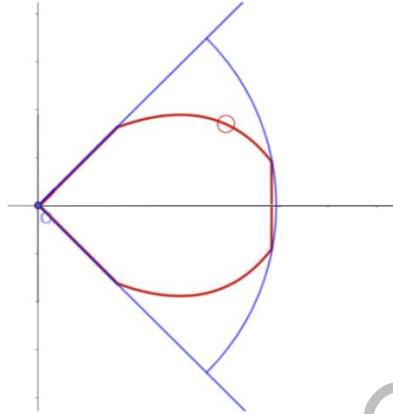


图 11 该操作的一个二维示意图

引理 3.3 设 $b \in [0, 1]$ 为使得 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = b, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ 与

Δ_2^* 有交集的最小的实数，则 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_\theta | x_1 \geq b\}$ 为 Δ_2^* 的一个子集。

证明 由引理 2.1.3，对于任意点 $p(z_1, z_2, \dots, z_n)$ 满足 $z_1 \in [b, 1]$ ，在 $\partial\Delta_2^*$ 上存在一点 q ，使得 $|pq| = 1$ 且与第一坐标轴相交。因此，我们不妨设由 pq 和 Ox_1 决定的二维平面和 $(n-1)$ 维线性空间

$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_\theta | x_1 = b\}$ 的交集为 γ 。由 γ 的定义， γ 是一条同 Ox_1 、 pq 共面的线段。当 $q \neq O$ 时，原点 O 和线段 γ 围成的三角形和线段 pq 的相对位置如图 12 所示。

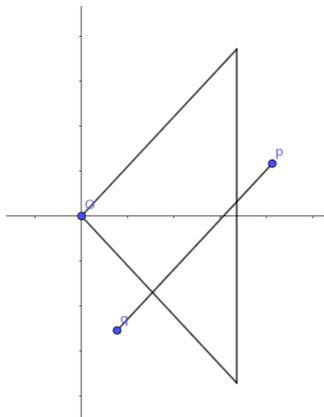


图 12 原点 O 和线段 γ 围成的三角形和线段 pq 的相对位置

注意到， O 与 γ 上端点连接所成的线段不与 pq 相交，且长度为 1，由引理 2.1.1 可知，这是不可能的，故矛盾。因此， $q=O$ ，由 $p(z_1, z_2, \dots, z_n)$ 的任意性，原命题得证。□

在介绍下一个引理前，我们不妨延续 a, b 先前的定义，设

$$\Pi_a := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = a\}$$

$$\Pi_b := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = b\}$$

两个 $(n-1)$ 维线性空间分别交 Δ_2^* 于一个 $(n-1)$ 维球，分别记为 D_a 和 D_b 。

引理 3.4 $|D_a| = |D_b|$ 。

证明 我们在此将分为两部分证明：1. $|D_a| \leq |D_b|$ 2. $|D_a| \geq |D_b|$ 。

先证 1. 我们采用反证法：若原式不成立，则 $|D_a| > |D_b|$ 。可知此时存在 $\varepsilon_1 > 0$ ，使得

$$|D_a| > |D_b| + 6\varepsilon_1,$$

即其半径之差大于 $3\varepsilon_1$ 。设 r_1 为 D_a 的半径， r_2 为 D_b 的半径。取 $(n-1)$ 维线性空间 $\Pi_b = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = b\}$ 左侧与之平行的 $(n-1)$ 维线性空间 Π_1 ，使其满足

$$r_3 = \frac{|\Pi_1 \cap A_\theta|}{2} < r_2 + \varepsilon_1,$$

并设两空间之间的距离为 ε_2 。同理，取 $\Pi_a = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = a\}$

左侧一同其距离为 ε_2 的 $(n-1)$ 维线性空间 Π_2 ，使得

$$r_4 = \frac{|\Pi_2 \cap C_\theta|}{2} > r_1 - \varepsilon_1.$$

图 13 给出了超平面 Π_1 、 Π_2 、 Π_a 、 Π_b 相对位置二维示意图。

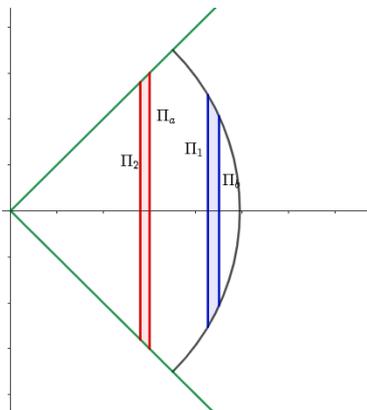


图 13 超平面 Π_1 、 Π_2 、 Π_a 和 Π_b 示意图

又因为

$$\max\{|pq|, p \in \partial(\Pi_2 \cap \Delta_2^*), q \in \Delta_2^*\} < 1$$

成立，因此存在一些实数 $\varepsilon_3 > 0$ ，使得

$$\max\{|pq|, p \in \partial(\Pi_2 \cap \Delta_2^*), q \in \Delta_2^*\} < 1 - \varepsilon_3$$

成立。我们可以取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ ，此时令

$$\sigma(x) = x + (\varepsilon, 0, \dots, 0),$$

其中 x 为 Δ_2^* 中的点，记这样的操作为 σ ，再记

$$V := \{\sigma(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Delta_2^*, |O\sigma(x)| \leq 1\}.$$

我们设 Π_1' 为 Π_1 经过 σ 操作后所得超平面。

$D_1' := \{\sigma(x) \mid x \in \Pi_1 \cap C_\theta\}$ ，原点 O 经过 σ 操作后得到 O' ，并让一个过第一坐标轴的二维面交 D_1' 于线段 $a_1 a_2$ ，其中 a_1, a_2 为该线段上下端点。然而，此时我们通过进一步观察发现，由 ε 的定义，可知以 OO' ， $O'a_1$ 为边的平行四边形以第一坐标轴为轴所形成的 n 维旋转对称体满足以下性质：

A. V 同其取并，直径不超过 1；

B. $m_n(R) > m_{n-1}[(r_1 - \varepsilon_1)B] \cdot \varepsilon > m_{n-1}[(r_2 + \varepsilon_1)B] \cdot \varepsilon$ ，其中 R 为该旋转对称体。

因此，我们转而考虑 $V_2 := V \cup R$ 。

通过对 V_2 与 Δ_2^* 的对比，我们可以知道 V_2 在 Π_1' 以左部分与 Δ_2^* 相比， n 维测度增加，记增加部分测度为 $m_n(\Delta_+)$ ，满足 $m_n(\Delta_+) = m_n(R)$ ；在 Π_2 以右部分与 Δ_2^* 相比， n 维测度减小，记减小部分测度为 $m_n(\Delta_-)$ ，满足 $m_n(\Delta_-) = m_n(R) > m_{n-1}[(r_1 - \varepsilon_1)B] \cdot \varepsilon > m_{n-1}[(r_2 + \varepsilon_1)B] \cdot \varepsilon > m_n(\Delta_-)$ 此外，其余部分测度在操作前后测度不变。由 Δ_2^* 定义，这是不可能的。故 1. 得证。

以相同的思路，2. 也得证，故原命题得证。 \square

引理 3.5 $|D_a| = |D_b| > 0$ 。

证明 过 $(1, 0, 0, \dots, 0)$ 作过原点的任意一条射线，垂足为点 n 。过 On 中点作 $l \perp On$ 。由引理 3.2，若 $|D_a| = |D_b| = 0$ ，可知对 $\Delta_2^*, \forall p \in \Delta_2^*, \exists q \in \Delta_2^*, |pq| = 1$ 。

因此当 $p \rightarrow O$ 时，上述结论也恒成立。然而，当 $p \rightarrow O$ 时，我们考虑该

射线、 pq 、第一坐标轴共面的情况（根据引理 2.1.3，可知共面时才能取到直径长），示意图如图 14。

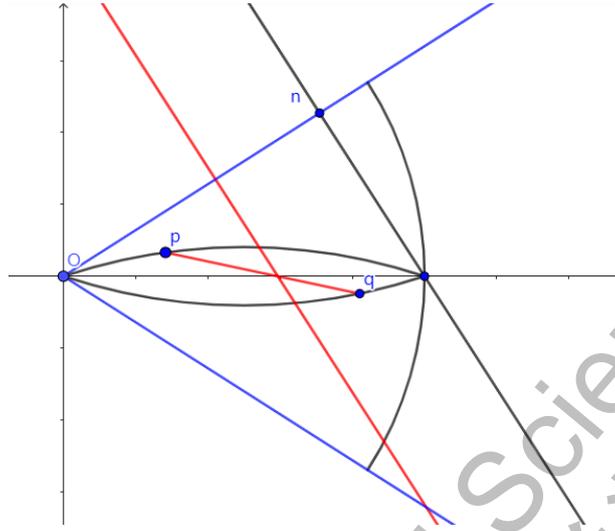


图 14 共面时，各点以及线段的示意图

由 p 在 l 以左，此时 $\angle Opq$ 为钝角，则 $|pq| > 1$ 。

因此矛盾，故原命题得证。 □

再结合引理 2.3.1 的思路，我们得到这样的结论：

以一个包含第一坐标轴的二维平面分别截 D_a, D_b 于线段 S_a, S_b ， S_a 的上下端点分别为 p_{a+}, p_{a-} ， S_b 的上下端点分别为 p_{b+}, p_{b-} 。此时应有：

$$|p_{a+} p_{b-}| = |p_{a-} p_{b+}| = 1。$$

这使我们确定了给定的 C_θ 中 D_a, D_b 的位置。

通过上述引理，我们已经得到了关于 D_a 以左的部分和 D_b 以右的部分的 n 维测度最大值及其相对位置。现在，我们需要解决在两者中间的部分，即在区域

$$U_m := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a < x_1 < b\}$$

内的部分的 n 维测度最大值。

引理 3.6 若 B 是以 $(\frac{a+b}{2}, 0, \dots, 0)$ 为球心、 $\frac{1}{2}$ 为半径的 n 维球，

$B \cap U_m$ 则为满足题意的具有最大 n 维测度的元素。

证明 设 Y 是在 U_m 内直径为 1 的具有最大 n 维测度的元素，让我们考虑 Y 和两球冠

$$R_a = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1^2 + \left(x_1 - \frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}, x_1 \leq a \right\}$$

$$R_b = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1^2 + \left(x_1 - \frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}, x_1 \geq b \right\}$$

的并。

由推广 Steiner 对称, 可知 Y 是关于第一坐标轴的旋转对称体。取该图形内部两点 p, q , 由 Y 的对称性和引理 2.1.3, 我们只需考虑在 p, q 和第一坐标轴共面时的情况。由 Y 的旋转对称性, 我们选取由上文 $p_{a+}, p_{a-}, p_{b+}, p_{b-}$ 所决定的平面考虑。然而, 此时本质上便回到了引理 2.3.2, 因此同样地, 可知 Y 和两球冠取并前后, 并不改变直径, 因此回到了 Bieberbach 的等径问题结论, 原命题得证。□

综上所述, 我们可以得到如下定理:

定理 3.7 让 a, b 依然保持前文所述的定义和由引理得到的性质, 则:

$$a = \sqrt{\frac{2+2\cos\theta}{5-4\cos\theta}} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$b = \frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} + \sqrt{\frac{2+2\cos\theta}{5-4\cos\theta}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

$\Delta_2^* = M_l \cup M_c \cup M_r$, 其中

$$M_l := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_\theta \mid x_1 \leq a \},$$

$$M_r := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_\theta \mid x_1 \geq b \},$$

$$M_c := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1^2 + \left(x_1 - \frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}, a \leq x_1 \leq b \right\}.$$

用文字描述定理 3.7, 即:

Δ_2^* 在超平面 Π_a 左侧的部分, 是 C_θ 在超平面 Π_a 左侧的部分;

Δ_2^* 在超平面 Π_a 右侧且在超平面 Π_b 左侧的部分, 是以

$\left(\frac{a+b}{2}, 0, \dots, 0 \right)$ 为球心, $\frac{1}{2}$ 为半径的 n 维球在两超平面之间的部分;

Δ_2^* 在超平面 Π_b 右侧的部分, 是以原点 O 为球心的 n 维单位球在超平

面 Π_b 右侧的部分。

通过计算,我们可以算出其 n 维测度。首先我们计算 M_l 的 n 维测度。

n 维圆锥 C 的体积计算公式为

$$m_n(C) = \frac{1}{n} m_{n-1}(B_r) \cdot h,$$

其中 $m_{n-1}(B_r)$ 是底面 $(n-1)$ 维球体 B_r 的 $(n-1)$ 维测度, h 该圆锥

的高。 M_l 的高 $h = a$, 底面球体的半径为 $a \cdot \tan \frac{\theta}{2}$, 则 M_l 的 n 维测

$$\text{度为: } m_n(M_l) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot a^n \cdot \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^{n-1}。$$

接下来我们计算 M_r 的 n 维测度, 在前文我们已经介绍过, n 维球缺的 n 维测度满足以下递推公式:

$$\varphi_n(r, h) = \frac{2}{n} \pi r^2 \varphi_{n-2}(r, h) - \frac{(r-h)(2rh-h^2)^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} (n \geq 4)。$$

其中, $\varphi_n(r, h)$ 和 $\varphi_{n-2}(r, h)$ 与前文定义相同。

回到 M_r 的 n 维测度, 其高度 $h = 1 - b$, $r = a \cdot \tan \frac{\theta}{2}$, 带入计算可得:

$$m_n(M_r) = \frac{2}{n} \pi a^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \varphi_{n-2}\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2}, 1 - b\right) - \frac{\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2} - 1 + b\right) \left(2a \cdot \tan \frac{\theta}{2} (1 - b) - (1 - b)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} (n \geq 4)。$$

最后, 我们再来计算 M_c 的 n 维测度, 它可以由球体的 n 维测度减去两个球缺的 n 维测度得到。记该球体为 B_r' , 由:

1. 球体半径为 $\frac{1}{2}$, 可得其 n 维测度为:

$$m_n(B_r') = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

2. 两个球缺的半径为 $a \cdot \tan \frac{\theta}{2}$ ，其高度 $h = \frac{1}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{a+1-b}{2}$ ，

可以得到这两个球缺之一的 n 维测度如下：

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2}, \frac{a+1-b}{2}\right) &= \frac{2}{n} \pi a^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \varphi_{n-2}\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2}, 1-b\right) \\ &- \frac{\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2} - \frac{a+1-b}{2}\right) \left(2a \cdot \tan \frac{\theta}{2} \cdot \frac{a+1-b}{2} - \left(\frac{a+1-b}{2}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} (n \geq 4). \end{aligned}$$

结合①②，我们通过

$$m_n(M_c) = m_n(B_r') - 2\varphi_n\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2}, \frac{a+1-b}{2}\right),$$

即可求得 M_c 的 n 维测度。

最后，将上述三个部分的 n 维测度相加，我们得到了以下定理：

定理 3.8 Δ_2^* 的 n 维测度计算式为：

$$\begin{aligned} m_n(\Delta_2) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot a^n \cdot \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{n} \cdot \pi a^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \varphi_{n-2}\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2}, 1-b\right) \\ &- \frac{\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2} - 1+b\right) \left(2a \cdot \tan \frac{\theta}{2} (1-b) - (1-b)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \\ &- 2\left(\frac{2}{n} \cdot \pi a^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \varphi_{n-2}\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2}, 1-b\right) - \frac{\left(a \cdot \tan \frac{\theta}{2} - \frac{a+1-b}{2}\right) \left(2a \cdot \tan \frac{\theta}{2} \cdot \frac{a+1-b}{2} - \left(\frac{a+1-b}{2}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \pi^{\frac{n-1}{2}}\right). \end{aligned}$$

我们代入 $n=3$ 进行验证，即有：

$$\begin{aligned} m_{\Delta_2^*} &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{5 - 4 \cos \theta} \cdot \frac{4 - 5 \cos \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \right) + \frac{2\pi}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{2 + 2 \cos \theta}{5 - 4 \cos \theta}} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2 + 2 \cos \theta}{5 - 4 \cos \theta}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &+ \frac{\pi}{3} \left(2 + \frac{2 - 2 \cos \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \right)^2 \left(1 - \frac{2 - \cos \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \right), \end{aligned}$$

这与论文[10]的结果是一致的。因此**定理 3.7** 和**定理 3.8** 共同给出了

原问题的最终解决方案。

四、后续研究问题

- 1.我们将会研究限制在两个平行平面间的等周问题（即在三维空间中给出两个平行平面，求体积为定值，与两平面相交，且表面积最大的图形），并将该情形向 n 维推广。我们目前猜测这个图形是一个关于两个平面的中间平面对称的旋转体。
- 2.我们将研究一般曲面（例如流形）上带限制条件的等周、等径问题。

五、未来展望

随着对欧氏空间中带约束条件的等径问题研究的不断深入，我们发现其在以下领域的应用潜力：

- 1.芯片设计：**在芯片设计中，算力单元的分布和空间分配是一个关键问题。通过优化这些单元的布局，可以提高芯片的性能和效率。我们的等径问题研究成果可以帮助优化算力单元的分布，从而提升芯片的整体性能。
- 2.雷达系统优化：**在雷达系统中，波束的覆盖范围和精度是至关重要的。我们的研究成果可以帮助优化波束的覆盖范围，提高雷达系统的精度和范围。
- 3.无线电通信：**在无线电通信领域，天线阵列的布局对于信号的质量和覆盖一致性有着直接影响。我们的研究成果可以用于优化天线阵列的布局，提升信号质量，增强覆盖的一致性。

通过这些应用，我们的研究成果不仅能够推动理论的发展，还能够为实际问题的解决提供有力的工具。我们期待未来能够在这些领域取得更多的突破，并为相关技术的发展做出贡献。。

参考文献

- [1] 杨丹, 徐文学, 姜德烁. 平面紧集的等径不等式. 西南师范大学学报: 自然科学版. 2012;37(10):38-40.
- [2] 赵长健. Orlicz 等周不等式. 数学学报. 2022 May 15:513-22.
- [3] 刘海亭, 李寿贵, 柴方. 限制在两平行线间的等周问题. 数学杂志. 2012;32(2):377-80.
- [4] Burago YD, Zalgaller VA. Geometric inequalities. Springer Science & Business Media; 2013 Mar 14.
- [5] Krantz SG, Parks HR, Krantz SG, Parks HR. Steiner Symmetrization. The Geometry of Domains in Space. 1999:223-46.
- [6] Bieberbach L. Über eine Extremaleigenschaft des Kreises. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1915;24:247-50.
- [7] Mani-Levitska P. Random Steiner symmetrizations. Studia Sci. Math. Hungar. 1986;21(3-4):373-8.
- [8] 李临珍. n 维超球缺体积的一个递推公式. 广东民族学院学报. 1995(4):21-3.
- [9] Dai XR, He WH, Luo J. An isodiametric problem with additional constraints. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013 Jan 1;397(1):1-8.
- [10] Yang Y. An Isodiametric Problem with Additional Constraints in Euclidean space R^3 . arXiv preprint arXiv:1503.03364. 2015 Mar 11.
- [11] Tao T, editor. An introduction to measure theory. American Mathematical Soc.; 2011 Sep 14.

致谢

申凯元同学主要负责了论文的引言和理论背景部分并在部分证明中创新利用画图几何的方法替代了繁琐的代数证明。她不仅深入挖掘了研究领域的文献资料，还对相关理论进行了细致的梳理和分析，从而为论文构建了一个坚实的理论框架。申凯元同学的工作不仅体现了她对研究领域的深刻理解和洞察力，还展现了她出色的文献综述能力。她的努力使得论文的理论基础更加稳固，为后续的研究工作提供了清晰的指导方向。

何晞诚同学则承担了论文中实际思考和计算部分的撰写任务。他以清晰的逻辑思维和精确的计算能力，对论文中的数据分析和模型构建进行了深入的研究。何晞诚同学的工作不仅确保了论文内容的详实性和准确性，还通过他的严谨态度和细致工作，提高了论文的科学性和可信度。

唐子盛同学则负责了论文中各理论的证明工作。他的工作是论文问题解决的关键环节，通过对理论的严密论证，为论文的最终结论提供了坚实的支撑。唐子盛同学的逻辑推理能力和对理论的深刻理解，使得论文的论证部分更加严密和有说服力。

在论文的修改和完善阶段，我们遇到了一些困难，特别是在如何对理论进行充分解释上。感谢璩斌老师的耐心指导，他帮助我们进一步理解了复杂的理论，并指导我们如何更准确地解释论文问题和解决。

综上所述，三位同学各司其职，在指导老师的指引下不断完善论文，共同为论文的成功撰写做出了不可磨灭的贡献。