

参赛队员姓名： 韩保诚、李兆轩

中学： 北京市十一学校

省份： 北京市

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 赵靖邦、马驰川

指导教师单位： 北京市十一学校

论文题目： 拉不开的“纸钳子”——书籍交叠体系中的摩擦放大现象

拉不开的“纸钳子”——书籍交叠体系中的摩擦放大现象

摘要

当两本相同的书被一页一页地交叠起来时，如果握住书脊向两边平行施加拉力，需要很大的力才能将两本书拉开，这两本互相交叠的书被称作“纸钳子”。最近的一项研究 [Phys. Rev. Lett. 116,015502,2016] 通过微分方程得出了拉开“纸钳子”的所需的力关于书的页数、纸张厚度、书脊到重叠部分的距离等变量的表达式。我们注意到，这篇文献中模型默认微分方程的边界条件，即“最外层纸张所受拉力是常数”。在本文中，我们基于受力分析对这一默认假设提出质疑。在预实验中，我们发现并解释了缓慢拉动书籍时产生的粘滑现象。在理论中，我们引入了纸张弹力这一变量，并通过挠曲线方程对其求解，得到了更准确的模型，并对书籍自锁现象的条件进行求解。为了检验修正后的模型，我们设计了定量的实验装置，聚焦测量了拉力关于书脊到交叠部分距离这一变量的变化关系，从实验的角度具体展示了此前模型假设的不合理性和本文所提出的修正模型的可靠性。本文的研究对深入理解“纸钳子”这一物理系统提供了更细致的理论图像，并对摩擦放大现象这一理论提供了更深刻的理解。

关键词：摩擦力；弹力；挠曲线方程

目录

1 引言	4
2 摩擦放大现象	5
2.1 传统模型	5
2.2 边界拉力形式的影响	7
2.3 定性分析与自锁现象	10
3 实验研究	10
3.1 交叠体系的搭建	11
3.2 临界拉力的测量	12
3.3 模型的检验	13
4 结论与展望	14
4.1 研究总结与意义	14
4.2 未来展望	15
4.2.1 完善理论和实验	15
4.2.2 粘滑现象的探索	15
4.2.3 特殊情况的考虑	16
致谢	16
附录	19
A. 完整实验数据	19
B. 传统模型合力方程的 Mathematica 求解代码与输出	20
C. 修正后模型合力方程的 Mathematica 求解代码与输出	21
D. 纸张摩擦系数的测定	22
E. 纸张抗弯刚度的测定	23
F. 测量纸张抗弯系数的 Mathematica 推导代码	26
G. 单页受力分析	27

1 引言

摩擦力，作为自然界中最常见的相互作用之一，自古以来便引起了人类的兴趣和探索。17 世纪末，纪尧姆·阿蒙顿（Guillaume Amontons）通过实验揭示了摩擦力与正压力成正比的关系 [1]。18 世纪，夏尔·奥古斯丁·德·库仑（Charles-Augustin de Coulomb）重新发现了这一定律——后被命名为“阿蒙顿-库仑定律”——并进一步确定在滑动过程中，摩擦力与表面间的相对速度无关 [1]。这些早期的研究为后续的摩擦学研究奠定了基础。

近年来，随着对复杂系统摩擦特性的深入研究，一些经典问题再次引起了科学家的深入关注。其中，最具代表性的便是“纸钳子”：当两本相同的书被一页一页地交叠起来时，如果握住书脊向两边平行施加拉力，需要很大的力才能将两本书拉开。这一实验因其直观且惊人的效果而广为人知，当两本书的页数足够多时，人力、叉车、汽车，甚至两辆军事坦克都无法将其分离 [2] [3]。

在 2016 年，H. Alarcón 等人重点研究了“纸钳子”中摩擦放大现象。研究通过微分方程描述了摩擦力随书页放大现象，解释了“纸钳子”难以拉开的物理机制，并定量地描述了拉开“纸钳子”所需的力与书籍物理属性的关系 [4]。

我们最早通过网上的短视频接触到这一现象，当时便觉得神奇且有趣。通过评论区的讨论，我们了解到了可以通过摩擦力这一角度去解释此现象，但并没有了解到更深层次的机理。后来，在高中学习了摩擦力相关的知识之后，我们重新燃起了对“纸钳子”的兴趣，并决定对于这一课题的机理进行深度地分析和研究。

通过调研文献，我们了解到了 H. Alarcón 等人的研究，学习并理解了其中给出的研究“纸钳子”体系的传统模型 [4]。在分析模型的过程中，我们注意到模型中默认“最外层纸张所受拉力是常数”这一假设成立。我们通过定性推导，发现此假设与模型中受力分析式的逻辑矛盾；此外，传统模型认为最外层纸张所受拉力源于弹力，但未为考虑其他书页的弹力。

基于这些问题，本文通过引入弹力项以及其逐页叠加修正了传统模型，得到了更精准、逻辑上更完备的模型，并基于修正后模型定性研究了纸钳子中特殊的“自锁现象”。进而，本文通过定量实验验证了传统模型假设的不合理性以及修正模型的可靠性。其中，实验装置为我们使用中学物理实验室可获得的器材设计搭建，保证了实验的稳定性和准确性。

本文具体安排如下：在第二节中，我们给出这一现象的传统模型和我们修正后的新模型，并对“自锁现象”进行定量分析；在第三节中，我们聚焦书脊到交叠部分距离这一变量进行实验研究，并通过测得数据检验新模型是否正确；本文的结论与展望在第四节中给出。

2 摩擦放大现象

2.1 传统模型

首先，我们将“纸钳子”模型简化，如图1所示。其中 d 为书脊到交叠部分的距离，左边为作书脊部分，右边为交叠部分。每本书的总页数记为 $2M$ ，规定每本书最中间的两张纸为 $n = 1$ 页，最外层的纸张为 $n = M$ 页。 θ_n 为第 n 张纸偏移角度， L 为纸张宽度，单页纸张的厚度记为 ϵ 。

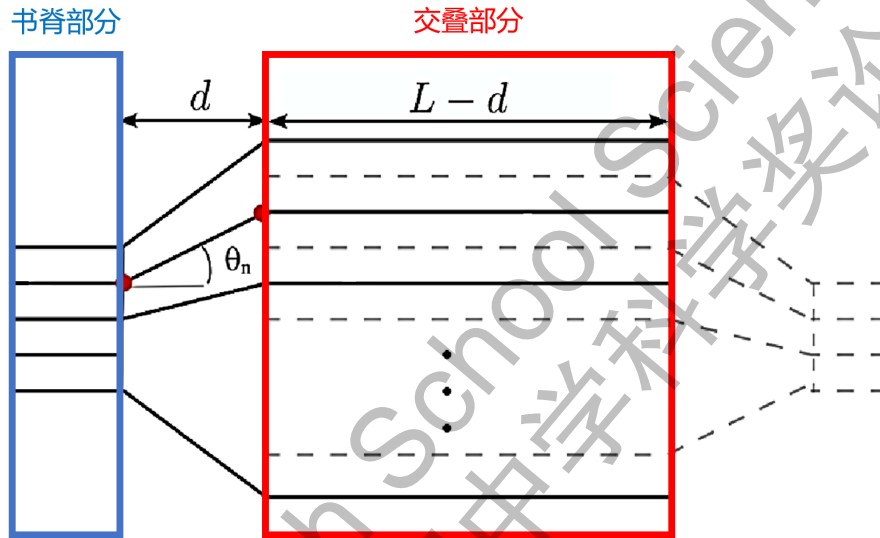


图 1: 模型示意图

由于即使是最外层书页，纸张倾斜的角度也并不大，我们便用了近似的方法，即当 $\theta_n \rightarrow 0^\circ$ 时， $\sin \theta_n \approx \tan \theta_n = \frac{n\epsilon}{d} \equiv K_n$ ， $\cos \theta_n \approx 1$ 。进而，得到交叠部分的宽度 $L \cos \theta_n \approx L - d$ 。因此可以认为所有书页的交叠部分的宽度都是 $L - d$ 。

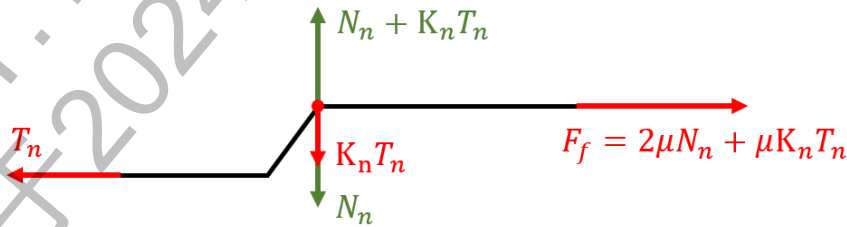


图 2: 单页受力分析图

对第 n 张纸做受力分析，其中 $1 \leq n < M$ ，如图2所示。这张纸会受到一个平行于书页的拉力，由于书脊部分和交叠部分之间的倾斜部分，交叠部分会受到一个

垂直与书页的分力，即 $\tan \theta T_n$ ，记作 $K_n T_n$ （具体受力分析见附录4.2.3）。第 n 张纸的上表面还会受到来自另一本书第 $n+1$ 张纸的一个向下的压力，记为 N_n 。相应地，下表面也会受到一个来自另一本书第 n 张纸的一个向上的支持力，根据受力平衡可得，下表面支持力大小为 $K_n T_n + N_n$ 。因此，根据阿蒙顿-库伦定律，可得纸张所受平行于页面的摩擦力大小为

$$F_f = 2\mu N_n + \mu K_n T_n \quad (1)$$

其中 μ 为纸面间的摩擦系数。由于本文主要讨论拉开纸张的临界拉力大小，而在纸张刚刚被拉动时以及被缓慢拉动的过程中，可以认为近似受力平衡，因此有

$$T_n = F_f = 2\mu N_n + \mu K_n T_n \quad (2)$$

由与此受力平衡方程，在后文中，如无特殊必要，我们不会区分拉力 T_n 和摩擦力 F_f 。

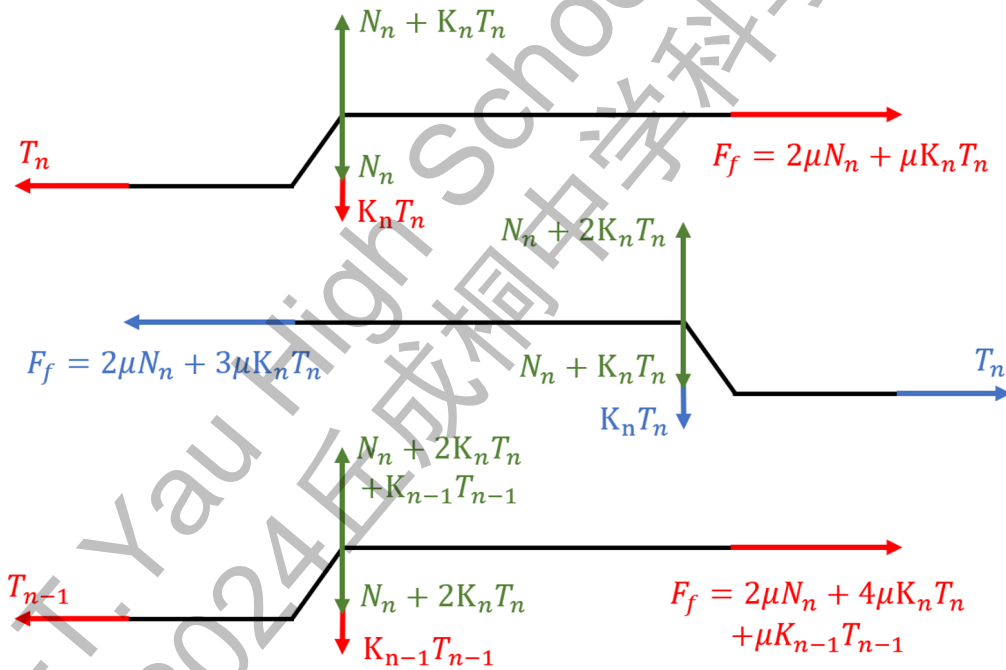


图 3: 多页受力分析图

随后，为了研究摩擦力是如何随着书页叠加放大，我们对多张纸进行受力分析，如图3所示。同一本书第 n 页所受拉力和第 $n-1$ 页所受拉力关系为

$$T_{n-1} - T_n = 3\mu K_n T_n + \mu K_{n-1} T_{n-1} \quad (3)$$

考虑到相邻两页拉力很接近，于是可得如下拉力递推式

$$T_{n-1} - T_n = 4\mu K_n T_n = 4\mu \frac{n\epsilon}{d} T_n \quad (4)$$

由于 $\epsilon \ll 1$ 且 $M \gg 1$ ，我们可以引入 $z = n/M$ 将离散递推式连续化为如下微分方程：

$$T'(z) + 4\mu \frac{M^2 z \epsilon}{d} T(z) = 0 \quad (5)$$

将一本书 $2M$ 页纸张的拉力进行求和，我们可以得到最终的所有页纸的拉力 \mathbb{T} 为

$$\mathbb{T} = 2M \int_0^1 T(z) dz = T^* \sqrt{\frac{d\pi}{2\mu\epsilon}} \exp\left(\frac{2M^2\mu\epsilon}{d}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2M^2\mu\epsilon}{d}}\right) \quad (6)$$

尽管在匀速拉动“纸钳子”的过程中式6总成立，但拉力 \mathbb{T} 在“纸钳子”刚刚被拉动时达到最大，我们称此时的拉力为临界拉力。在不引起歧义的情况下，后文中我们也将临界拉力记为 \mathbb{T} 。

需要指出的是，式6中 T^* 为最外层纸张所受的拉力，源于最外层纸张抵抗弯曲形变而产生的弹力 [4]。由于 T^* 非常微小，不易直接通过实验测量，在传统模型中被视为一个与 M 、 d 等变量无关的常数，往往需要通过实验数据进行拟合得到 [5]。

2.2 边界拉力形式的影响

如节2.1中所述，传统模型认为最外层纸张所受拉力 T^* 是源于纸张弯曲形变产生的弹力，与摩擦系数 μ 、书籍到交叠部分的距离 d 、半本书的页数 M 等变量无关。但我们发现，根据传统模型中式1，每一页纸都会受到一个摩擦力 $\mu K_n T_n$ ，即 $\mu \frac{n\epsilon}{d} T_n$ 。具体到最外层纸张，这个力就是 $\mu \frac{M\epsilon}{d} T_n$ 。观察形式可知，这个力会随着 M 、 d 、 ϵ 等变量的改变而改变。因此，我们对“最外层纸张所受拉力是常数”这一假设产生了怀疑。

另一方面，传统模型中认为 T^* 仅源于纸张形变从而产生的弹力，即上式中的 F_{EM} ；然而，按照此逻辑，内部书页应该同样会因为形变产生相应大小的弹力。因而，弹力也会按照递推式3逐页叠加。

基于以上两点，我们对传统模型进行了修正。首先，我们表示最外层纸张所受拉力 T^* 为

$$T^* = \mu \frac{M\epsilon}{d} T^* + \mu F_{EM} \quad (7)$$

其中 F_{EM} 是最外层纸张形变而产生的弹力。我们引入挠曲线方程对弹力定性描述和求解 [6]。

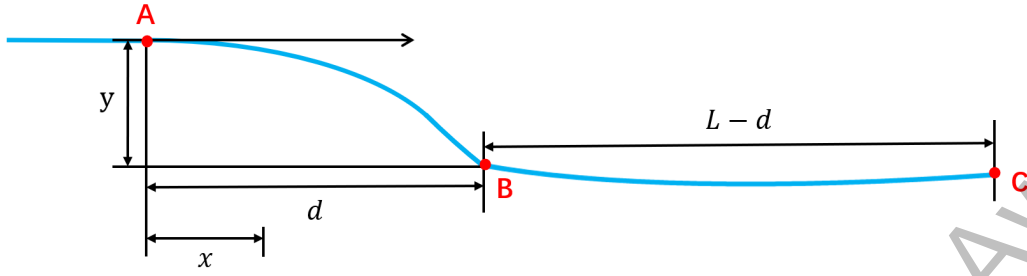


图 4: 挠曲线示意图

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{F_E(d-x)}{EI} \quad (8)$$

其中 M 为力矩, EI 为抗弯刚度, F_E 为弹力 x 、 y 为图4所示变量。

根据图4, 除最外层两张纸外, 其他书页实际上都会受到两个弹力, 一个弹力是 AB 段形变产生的, 其等效作用点在 B 处, 另一个是来自 BC 段的轻微弯曲, 其等效作用点在交叠部分的右端 C 处。考虑到 BC 段弯曲程度较小, 导致弹力矩较小, 加之 BC 段力臂 $L-d \gg d$, 因此 C 处的弹力远小于 B 处弹力, 模型中忽略不计。为了计算 B 处弹力, 我们将 $x=d$ 带入式8并进行积分求解, 得到

$$F_E = \frac{3EIy}{d^3} \quad (9)$$

因此, 针对第 n 页的纸张弹力, 我们带入 $y = n\epsilon$, 得到了

$$F_{En} = \frac{3EIn\epsilon}{d^3}. \quad (10)$$



图 5: 交叠部分的弧度

如图5所示, 我们发现在实际情况中, 书籍交叠部分呈现出了明显的弧度, 其两端紧密贴合, 而中部相对松散。因此, 交叠部分中部所产生的摩擦力几乎可以忽略, 主要的压力和摩擦力都分布于交叠部分的两端边界处。

因此，我们明确了力的作用点为书籍的交叠部分两端，并引入弹力 F_{E_n} ，重新绘制受力分析图，如下图。

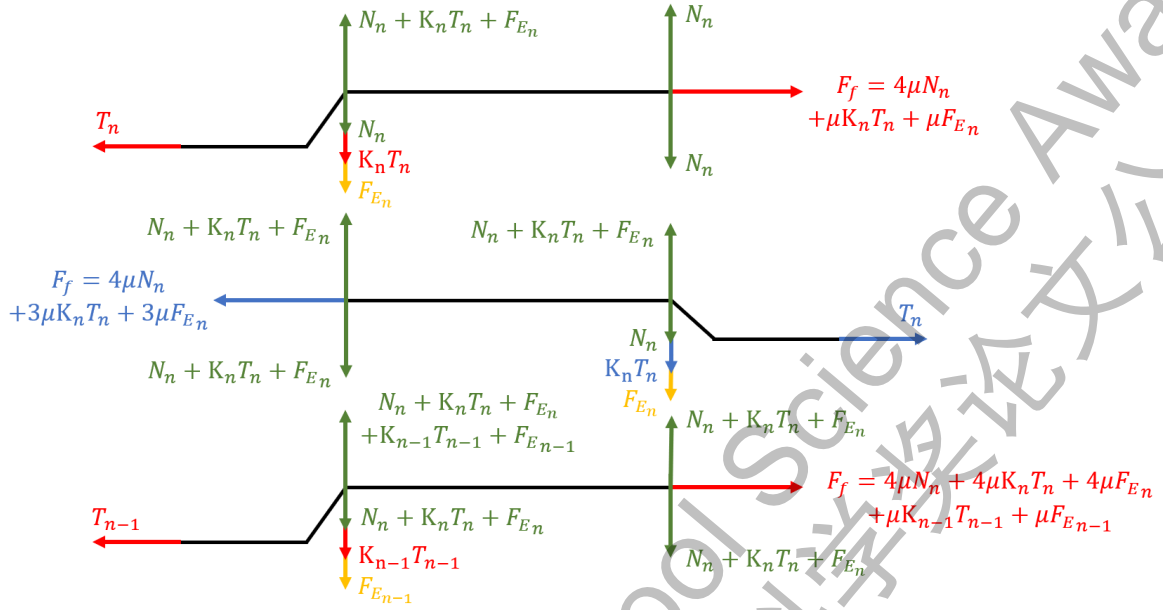


图 6: 多页受力分析 (修正弹力)

如图所示，我们可以得到新的受力分析，如下：

$$T_{n-1} - T_n = 4\mu \frac{n\epsilon}{d} T_n + 4\mu \frac{3EI n \epsilon}{d^3} \quad (11)$$

与2.1节同理，引入 $z = n/M$ 后将离散递推式连续化为如下微分方程：

$$T'(z) = -4\mu \frac{M^2 z \epsilon}{d} T(z) - 4\mu \frac{M^2 3EI z \epsilon}{d^3} \quad (12)$$

通过积分 $\mathbb{T} = 2M \int_0^1 T(z) dz$ ，我们可以得到最终的所有页纸的拉力为

$$\mathbb{T} = \frac{3EI}{2d^2} \left(-4M + \frac{d}{d - M\epsilon\mu} \sqrt{\frac{2d\pi}{\mu\epsilon}} \exp\left(\frac{2M^2\mu\epsilon}{d}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2M^2\mu\epsilon}{d}}\right) \right). \quad (13)$$

修正后模型中合力方程式13相比较传统模型式6，最大的优势在于其中没有任何需要实验数据拟合的参数，所有参数均可通过独立实验测得。

至此，我们已经从理论上说明 T^* 不是常数，并通过引入弹力得到了修正后的模型。在3.3中，我们将看到实验中 T^* 是一个关于 d 变化的变量，且变化程度不可忽视。因此，修正后的模型在逻辑性、准确性和完整性上都优于传统模型。

2.3 定性分析与自锁现象

根据修正后的模型，分别绘制临界拉力 T - 交叠部分距离 d 和临界拉力 T - M 变化图像，并观察 T 随这两个变量变化的趋势。

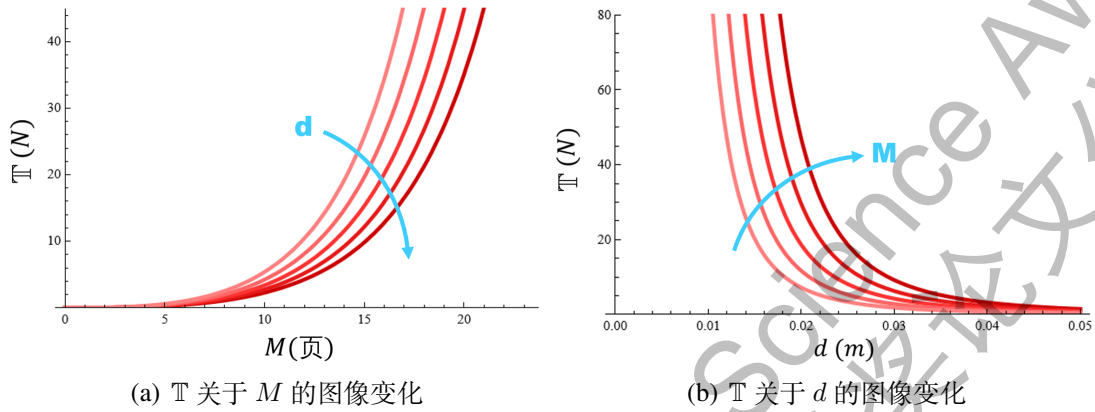


图 7: 修正后模型定性图像

通过观察图像 (a) 可以发现，随着半本书页数 M 增大，临界拉力 T 迅速增大，体现出明显的摩擦放大现象。通过观察图像 (b) 可以发现，随着书脊到交叠部分的距离 d 减小，临界拉力 T 迅速增大，也体现出明显的摩擦放大现象。

特别地，在 $d \rightarrow d_c > 0$ 时， T 便会趋近无穷大，而非只有当 $d \rightarrow 0$ 时 T 才能趋近无穷大。因此，我们认为“纸钳子”模型在一定条件下会产生自锁现象——即无论施加多大的力也无法将书籍拉开。观察等式13可得，当 $d \rightarrow M\epsilon\mu > 0$ 时， $T \rightarrow \infty$ ，也就会产生自锁现象。由于在现实实验中，很难区分“纸钳子”是由于体系自锁导致无法拉开还是人为施加拉力不足以拉开，因此我们未能在实验中确定出准确的 d_c 。

3 实验研究

为了验证传统模型中“最外层纸张所受拉力 T^* 是常数”此假设不成立，并验证修正后的模型的可靠性，我们需要进行定量实验研究，旨在得到“临界拉力 T 与一个变量的关系”，并根据传统模型中式6计算得到“ T^* 与此变量的关系”。

考虑到改变书籍到交叠部分的距离 d 比较方便，我们便选择重点研究 d 作为实验部分的变量，测量不同 d 之下的临界拉力 T 大小，并计算得到不同 T^* 大小，判断其是否为常数。

3.1 交叠体系的搭建

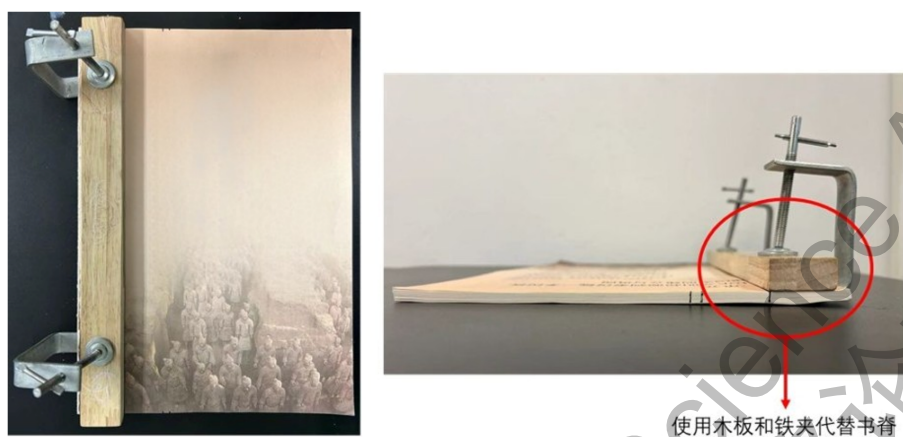


图 8: 单本实验用书的搭建

如图8所示。为了保持实验用书的物理性质相同，我们从同一厂家购买了若干本相同的人教版历史教材，并将封面页撕去，以排除纸张材料不同带来的误差。由于书籍原有书脊不够牢固，无法支持进行实验，我们使用木板和铁夹来代替书脊的作用。更重要的是，木板固定书脊可以防止在书脊到交叠部分距离 d 较小时防止书籍发生弯折，从而导致有空气进入，造成实验测得值偏小。



图 9: 实验用书的交叠过程

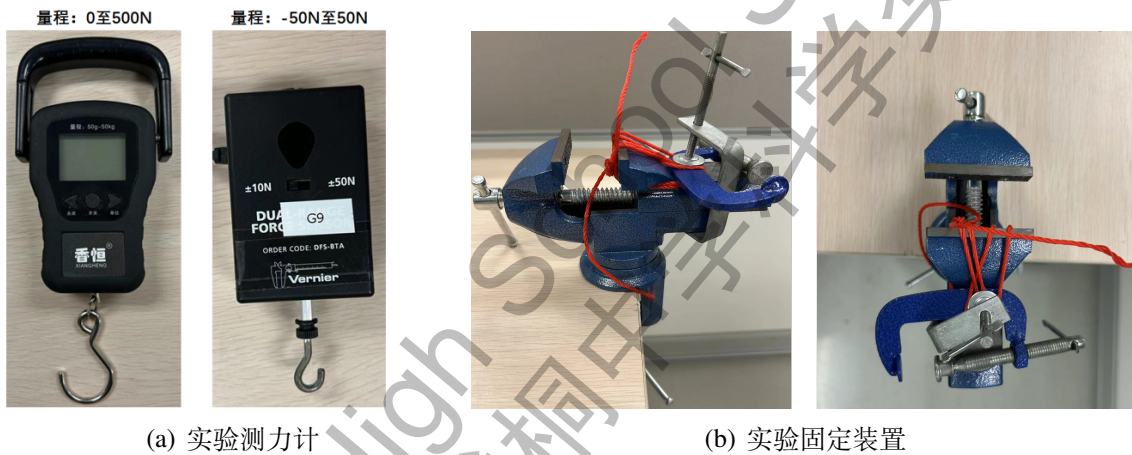
随后，我们将书的侧面标记刻度，便于改变书籍到交叠部分的距离 d ，并如图9所示将两本书一页一页地交叠在一起。至此，两本书所形成的交叠体系搭建完成。

3.2 临界拉力的测量

在测定临界拉力之前，我们测定了摩擦系数 μ 、刚体抗弯刚度 EI 、单页纸张厚度 ϵ 三个无关变量的数值。在后续实验中，我们控制这些变量数值保持不变，数据如表1所示，其中 μ 和 EI 的具体测量过程见附录。

参数	数值
μ	0.54
$EI/m \cdot N^2$	2.7×10^{-5}
ϵ/m	7.4×10^{-5}
$M/\text{页}$	20

表 1: 实验参数



(a) 实验测力计

(b) 实验固定装置

图 10: 实验器材

在测量临界拉力 T 的过程中，我们使用了图10 (a) 两种测力计：其中左图的测力计量程为 0 至 500N，具有量程大的优点；右侧测力计的量为-50 至 50N，优点是能画出拉力随时间变化的图像，并给出每时刻所对应数据。

如图10 (b) 所示，我们搭建了固定装置以保证实验稳定性。我们将台虎钳作为固定装置的底座，并使用绳子和铁夹将用于固定书脊的蓝色夹牢固地绑在底座上，从而形成了一个结实的固定装置。此装置能够将书籍交叠体系的一边竖直固定住，以防止由于书籍倾斜导致的重力影响实验结果，提高实验的稳定性和准确性。同时，此固定装置装置可以保证拉动交叠体系并测量的过程单人即可完成。

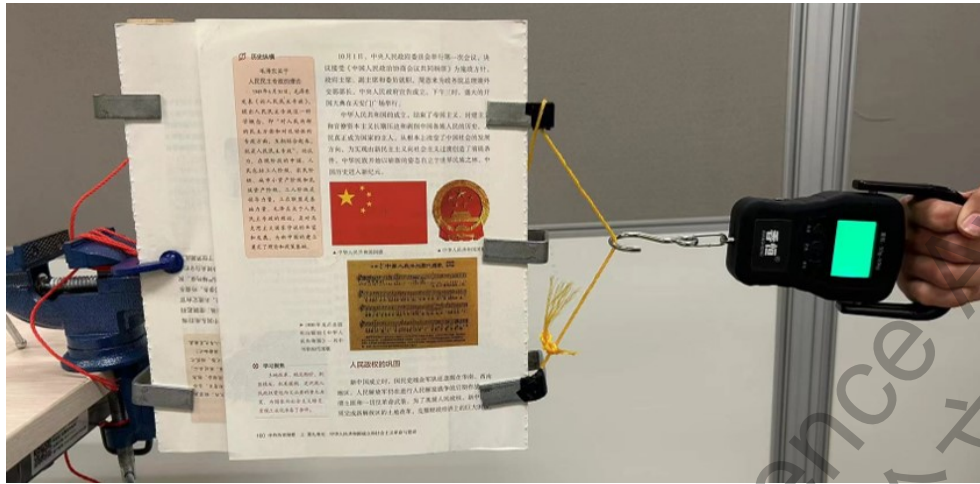


图 11: 完整实验装置图

如11所示，在测量临界拉力 T 时，我们将搭建好的书籍交叠体系的一侧固定在实验固定装置上，使用拉力计水平于地面缓慢拉动另一侧如图。同时使用录像机录制视频，观察拉开两书时的测力计示数并记录。

我们针对 6 个不同的 d 值进行了 6 组实验，每组实验重复 6 次以减少误差。完成实验后，我们将实验数据绘制在图13中数据点位置。

3.3 模型的检验

根据2.1节传统模型中6式，我们可以计算出不同书脊到交叠部分的距离 d 下 T^* 的值，检验 T^* 是否是一个常数。结果如下图12：

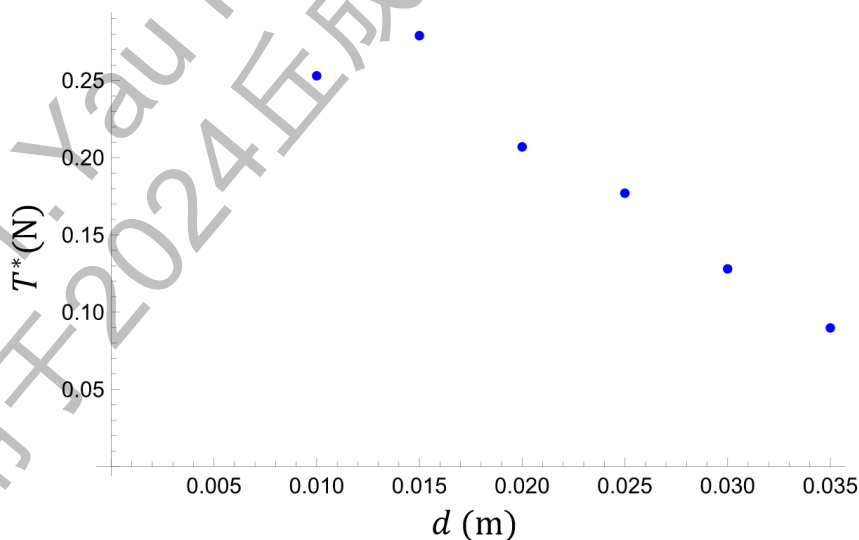


图 12: T^* 关于 d 的变化

根据表格和图像，我们发现 T^* 并不是一个常数，而是随着 d 变化的，且变化程度十分明显，不可忽视。因此，最外侧纸张所受拉力 T^* 不能通过传统模型进行拟合，“ T^* 是常数”这一假设是错误的。

随后，我们利用2.2节修正后模型中13式，绘制理论和实验的对照图像，即图13。

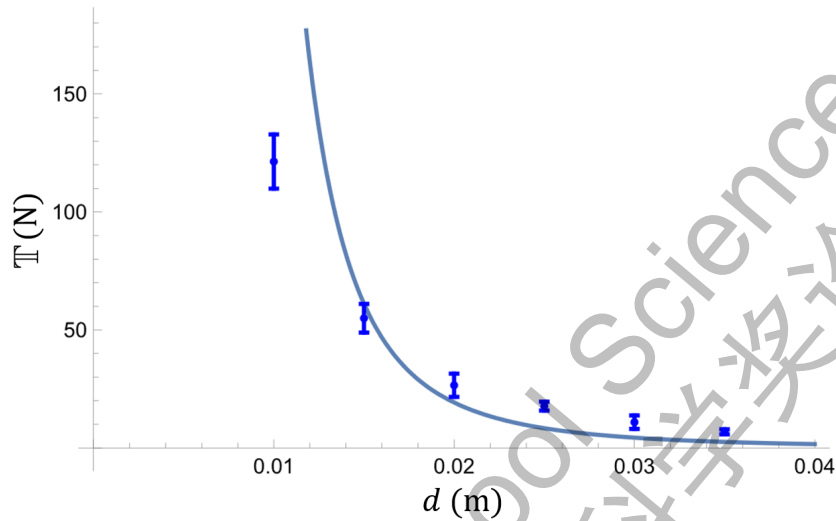


图 13: 理论实验对比图

通过观察理论与实验的对比图，我们发现理论与实验在整体趋势上大致一致。在 d 比较大时，理论值和实验值比较接近；但是在 d 比较小时，理论值和实验值之间会有较大的误差。这是由于在计算弹力时，我们使用了挠曲线方程，而这一方程需要在偏移角度 θ 较小，即 d 较大时才能适用。此外，误差还有可能源于在测量每本书厚度 ϵ 时，我们使用游标卡尺将书页压紧后测得的数据，而在实际情况中纸张之间不会那么紧密相连。

尽管如此，相比传统模型，我们的模型在理论上更加完备，没有逻辑漏洞；实验上，理论值和实验数据也大致吻合，误差远小于图12中 T^* 的浮动程度；更重要的是，我们的模型的所有参数都没有进行拟合，而是通过独立的实验分别测得的。

4 结论与展望

4.1 研究总结与意义

本文研究了“纸钳子”现象的产生原因以及物理机制。在理论方面，我们首先引入了传统模型，并详细说明了单页纸张和多页纸张的受力分析，从中得到了拉力叠加的递推式，并得到最后临界拉力与书籍纸张页数、摩擦系数等其他变量的定量

关系 [4]。通过理论分析，我们说明了传统模型“最外层纸张所受拉力是常数”假设的不合理性，并在其基础上通过引入弹力进行修正，得到了更加精确、更完整、所有参数不需要拟合的模型。通过对修正模型进行定性分析，我们分析了临界拉力随不同变量的变化趋势，并注意到了明显的摩擦放大现象，其本质有两个来源，一是源于书本的弹力产生的摩擦力，二是源于拉书时拉力的竖直分力产生的摩擦力。特别地，我们发现在 $d \rightarrow d_c = M\epsilon\mu > 0$ 时， $\mathbb{T} \rightarrow \infty$ ，即出现自锁现象。在实验部分，我们主要聚焦研究于书脊到交叠部分距离对临界拉力的影响。我们通过实验室有限的实验器材，手动设计并搭建了低成本、高稳定性、单人可操作的固定装置，并多次重复实验得到了实验数据。通过数据分析，我们验证了传统模型假设的不合理性，并说明了修正后模型的可靠性。

作为经典的力学问题，“纸钳子”中的摩擦放大现象在日常生活中有诸多体现，如卡式纹盘和中国指套等例子 [4][7]。此外，此摩擦放大现象在 DNA 与细菌噬菌体衣壳的相互作用等微观生物学现象中也起到重要作用 [8]。因此，本文对摩擦放大现象的研究能够加深对相关现象中的理解。

4.2 未来展望

4.2.1 完善理论和实验

本模型中，为了尽量简洁地揭示出物理本质，做了很多的近似和理想情况假设，如小角近似、不考虑重力等。后续研究可以完善在其他情况下（如考虑重力或者纸张偏移角度很大）根据应用环境和目的可以有针对性地对模型进行修正和完善。

同时，由于中学实验室条件有限，我们只能就地取材，手动设计和搭建。这在一定程度上增加了实验的不确定性和不稳定性，并使由于一个人能施加的力有限，也导致我们无法去研究“自锁现象”这种需要巨大拉力的情况；更重要的是，在人手拉动的时候很难保证完全匀速，这也会在一定程度上影响实验数据的准确性。由此，如果有机会的话，我们希望能够在后续的研究中应用更精密、稳定的仪器进行实验。

4.2.2 粘滑现象的探索

实验时，我们通过拉力传感器获得了拉力 \mathbb{T} 关于时间 t 的图像，如图14所示。其中图 (a) 为测量摩擦力时，一张纸夹在两张纸滑动时拉力随时间的变化关系，图 (b) 为拉动“纸钳子”的拉力 \mathbb{T} 关于时间 t 的变化关系。观察图像，我们发现拉动过程中拉力 \mathbb{T} 的变化并不光滑，而是呈现出了明显的上下振荡。这是由于在纸张之间进行相对滑动时，动摩擦力和静摩擦力会交替出现，这一现象叫做粘滑现象 (stick-slip phenomenon) [9] [10][11]。但由于这种快速振荡的现象振幅很小，几乎不影响拉力

T 的整体变化趋势，加之其还涉及到复杂的非线性计算，本文模型中并未将其纳入考虑。希望在后续的研究中，我们可以进一步对粘滑现象进行更加定量的研究和探索。

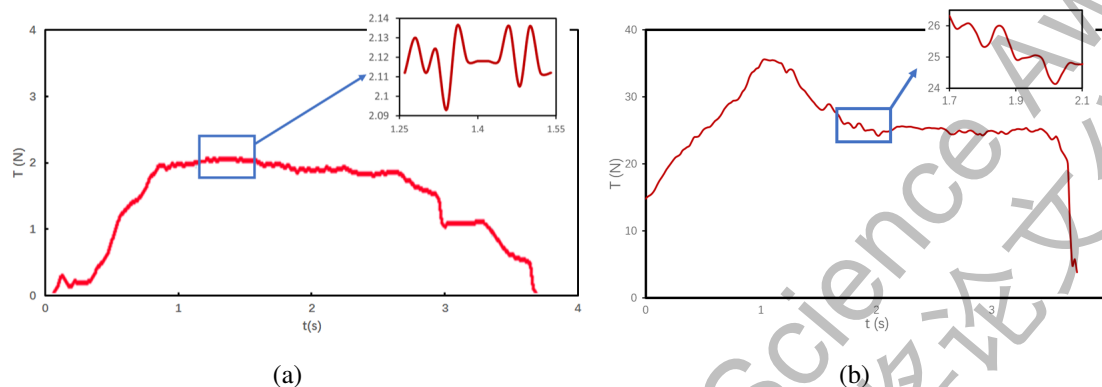


图 14: 粘滑现象。(a) 图为一纸夹在两张纸滑动时拉力随时间的变化关系，(b) 图为拉动“纸钳子”的拉力 T 关于时间的变化关系。从中可以看到明显的粘滑现象

4.2.3 特殊情况的考虑

在实验中，我们偶然发现当双手抓住书脊快速抖动，几乎不费力气就能将书拉开。我们希望针对此现象进一步研究。

致谢

在本论文即将提交之际，我们心中充满感激，感谢所有的老师和同学们对我们研究的支持。

在初中时期，我们首次通过网络短视频邂逅了“纸钳子”现象——一本看似普通的书，却无法被拉开，这激发了我们浓厚的好奇心。视频下方的评论区成为了我们探索的起点，那里的讨论让我们意识到摩擦力可能是解开这一谜团的关键。然而，对于其背后的深层机制，我们仍然知之甚少，尤其是对于摩擦力何以如此巨大这一问题，我们充满了探究的欲望。随着时间的推移，我们在高中物理课堂上对摩擦力有了更系统的学习，同时，我们发现“纸钳子”也是 2016 年 IYPT 的一道题目，这不仅重新点燃了我们对“纸钳子”现象的兴趣，也激发了我们深入研究的决心。

在文献调研阶段，我们发现了 A. Héctor 等人对“纸钳子”现象的描述 [4]。通过深入阅读和学习，我们逐步理解了文献中的模型，并对其数学物理基础有了初步的掌握。我们感谢该文献的作者，他们的工作为我们的研究提供了宝贵的理论基础。

在理论建模和实验验证的过程中，我们遇到了诸多挑战。对于文献中提到的书本最外侧的临界拉力 T^* ，我们发现其测量和模型中的假设存在逻辑上的矛盾。为了解决这一问题，我们进行了大量实验，并通过多次测量不同条件下的拉力来拟合数值。这一过程虽然艰难，但最终我们提出了一个更准确、逻辑上更完备的“纸钳子”模型。

在此，我们要感谢在理论推导和实验过程中给予我们帮助的十一学校的马驰川老师和赵靖邦老师。本研究的实验设计、数据获取、分析计算、实验实施以及论文撰写等工作均由我们在两位指导老师的指导下独立完成。在研究过程中，我们深刻体会到了科学研究的严谨性和挑战性，也更加坚定了我们科学探索的热情和决心。

本文的两位作者在完成论文的过程中充分配合，韩保诚主要负责文献调研和理论总结，也共同完成了实验阶段的数据采集，李兆轩主要负责实验设计、数据采集和画图工作。两位同学一起完成了全文的撰写修订和最后校对。

再次感谢所有给予我们帮助和支持的人，是你们让我的高中生活更加丰富多彩，也是你们让我对科学探索充满了无限的憧憬和热情。

参考文献

- [1] D. Dowson and D. Dowson, *History of Tribology* (Longman, London, 1979).
- [2] https://www.youtube.com/watch?v=RtieXgPrj_4&t=130s.
- [3] https://www.youtube.com/watch?v=h0t-D_ee-JE.
- [4] A. Héctor, T. Salez, C. Poulard, J.-F. Bloch, É. Raphaël, K. Dalnoki-Veress, and F. Restagno, *Phys. Rev. Lett.* 166,015502 (2016).
- [5] 宋家玮 and 陈晨, *物理教师*, vol. 38, no. 4, pp. 52-55 (2017).
- [6] 姚志城, *物理教学*, vol. 39, no. 1, pp. 22-25 (2017).
- [7] I. Stuart, *Br. J. Appl. Phys.* 12, 559 (1961).
- [8] S. Ghosal, *Phys. Rev. Lett.* 109, 248105 (2012).
- [9] R. Leine, D. van Campen, A. de Kraker, and L. van den Steen, *Nonlinear Dyn.* 16, 41 (1998).
- [10] C. Yan, H.-Y. Chen, P.-Y. Lai, and Tong P. *Nat Commun.* 14,6221 (2023).

- [11] S. Fujisawa¹, Y. Sugawara¹, S. Ito¹, S. Mishima¹, T. Okada¹, and S. Morita¹,
Nanotechnol. 4, 138 (1993).

2024 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2024丘成桐中学科学奖论文公示

附录

A. 完整实验数据

物理量\组别	1	2	3	4	5	6
书脊到交叠部分距离 d/mm	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00
书籍交叠页数一半 M	20					
纸张材质	纸张厚度 ε/m	7.4×10^{-5}				
	抗弯刚度 $E/\text{N}\cdot\text{m}^2$	2.7×10^{-5}				
	摩擦系数 μ	0.54				
临界拉力 T/N (平均)	121.37	54.95	26.55	17.71	10.92	6.84
第一次测量	104.20	46.89	23.60	19.25	12.34	7.45
第二次测量	112.60	55.10	23.07	18.06	9.80	5.14
第三次测量	119.50	60.91	28.12	19.60	13.03	7.45
第四次测量	126.30	51.15	21.67	18.52	5.58	6.32
第五次测量	132.70	62.98	35.13	15.68	12.52	6.49
第六次测量	132.90	52.67	27.73	15.14	12.25	8.17
方差	132.1667	36.92540	24.42019	3.489617	8.113480	1.159187
标准差	11.49638	6.076627	4.941679	1.868052	2.848417	1.076655

书籍到交叠部分的距离 d/m	最外层纸张所受拉力 T^*/N
1.0×10^{-2}	0.253
1.5×10^{-2}	0.279
2.0×10^{-2}	0.207
2.5×10^{-2}	0.177
3.0×10^{-2}	0.128
3.5×10^{-2}	0.090

表 2: T^* 关于 d 的变化

B. 传统模型合力方程的 Mathematica 求解代码与输出

(* 变量解释: 其中T[1]为模型中边界条件, 即T* *)

$$\alpha = (2 * \mu * M^2 * \epsilon) / d$$

$$k = (M^2 * z * \gamma * \epsilon) / \text{Power}[d, 3]$$

$$\text{Solution} = \text{DSolve}[\{-T'[z] == 2 * \alpha * z * T[z], T[1] == \text{Ta}\}, T[z], z]$$

$$f[x] = T[z] /. \text{Solution}[1]$$

$$f[x1] = 2 * M * \text{Integrate}[f[x], \{z, 0, 1\}]$$

$$f[x2] = \text{Simplify}[f[x1]]$$

$$\text{Out}[515] = \frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d}$$

$$\text{Out}[516] = \frac{M^2 z \gamma \epsilon}{d^3}$$

$$\text{Out}[517] = \left\{ \left\{ T[z] \rightarrow e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d} z} - \frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d} \text{Ta} \right\} \right\}$$

$$\text{Out}[518] = e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d} z} - \frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d} \text{Ta}$$

$$\text{Out}[519] = \frac{\sqrt{d} e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Ta} \text{Erf}\left[\frac{\sqrt{2} M \sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu}}{\sqrt{d}}\right]}{\sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu}}$$

$$\text{Out}[520] = \frac{\sqrt{d} e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Ta} \text{Erf}\left[\frac{\sqrt{2} M \sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu}}{\sqrt{d}}\right]}{\sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu}}$$

C. 修正后模型合力方程的 Mathematica 求解代码与输出

```
ClearAll["Global`*"]
```

[清除全部]

(* 变量解释: 其中T[1]为模型边界条件, 即T*; A为纸张抗弯刚度, 即EI *)

```
Solution =
```

```
DSolve[
```

[求解微分方程

$$\{-T'[z] == 2 * (2 * \mu * M^2 * \epsilon) / d * z * T[z] + 4 * \mu * (M^2 * z^3 * A * \epsilon) / d^3, \\ T[1] == (\mu * (M * 3 * A * \epsilon) / d^3) / (1 - \mu * M * \epsilon / d)\}, T[z], z]$$

```
f[x] = T[z] /. Solution[[1]]
```

```
f[x1] = 2 * M * Integrate[f[x], {z, 0, 1}]
```

[积分

$$\left\{ \left\{ T[z] \rightarrow - \frac{3 A e^{-\frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d}} \left(-d e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d}} + d e^{\frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d}} - e^{\frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d}} M \epsilon \mu \right)}{d^2 (d - M \epsilon \mu)} \right\} \right\}$$

$$- \frac{3 A e^{-\frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d}} \left(-d e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d}} + d e^{\frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d}} - e^{\frac{2 M^2 z^2 \epsilon \mu}{d}} M \epsilon \mu \right)}{d^2 (d - M \epsilon \mu)}$$

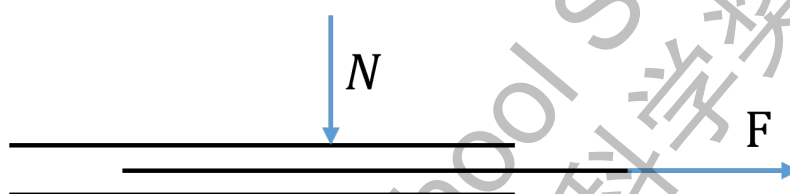
$$3 A M \left(-4 + \frac{d^{3/2} e^{\frac{2 M^2 \epsilon \mu}{d}} \sqrt{2 \pi} \operatorname{Erf} \left[\frac{\sqrt{2} M \sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu}}{\sqrt{d}} \right]}{M \sqrt{\epsilon} \sqrt{\mu} (d - M \epsilon \mu)} \right)$$

$$2 d^2$$

D. 纸张摩擦系数的测定



(a) 实验装置实物图



(b) 实验装置示意图

图 15: 为了得到实验用书的纸张摩擦力大小, 我们构建了如图所示实验装置。其中图 (a) 为实验实物图, 图 (b) 为纸张摆放方式截面的示意图, 每条线表示一页书。

我们选用了三本不同的书籍, 取书中的纸张进行了动摩擦系数测量实验。实验的具体步骤如下:

1. 从每本书中选取三张书页, 按照如上图交错的方式排列它们。
2. 在纸张的上方放置不同重量的砝码, 以产生不同的正压力。
3. 固定外侧的两张书页, 尝试拉动中间的书页。
4. 测量拉动中间书页所需的力的大小, 并记录实验数据。
5. 对于每本书, 重复上述操作三次及以上。

由于中间书页的上下表面都受摩擦力的作用, 我们有: $F = 2\mu N$, 其中 F 为拉动纸张所需的拉力, N 为纸张所受的正压力。由此, 我们可以计算出动摩擦系数 μ 的值。

书籍编号: 1			书籍编号: 2			书籍编号: 3		
摩擦系数	压力/N	摩擦力/N	摩擦系数	压力/N	摩擦力/N	摩擦系数	压力/N	摩擦力/N
0.56	1.962	2.20	0.53	1.962	2.08	0.56	0.981	1.09
0.58	0.981	1.13	0.58	2.943	3.40	0.54	1.962	2.11
0.59	2.943	3.45	0.50	0.981	0.99	0.51	2.943	3
0.51	2.943	3.00						
0.50	3.924	3.90						

图 16: 摩擦系数记录表

观察表20中数据,发现三本书摩擦系数相近,因此可求取其所有数据的平均值,得到:摩擦系数 μ 的值为 0.54。

E. 纸张抗弯刚度的测定

计算纸张抗弯刚度 EI 的公式在2.2中给出。如下图,把纸的一边固定在 $(0,0)$ 点,公式中的 x 与 y 分别表示梁伸出固定点的水平距离和与之对应的下垂的距离。 $M(x)$ 为以 x, y 为支点时,其右侧受力产生的力矩。

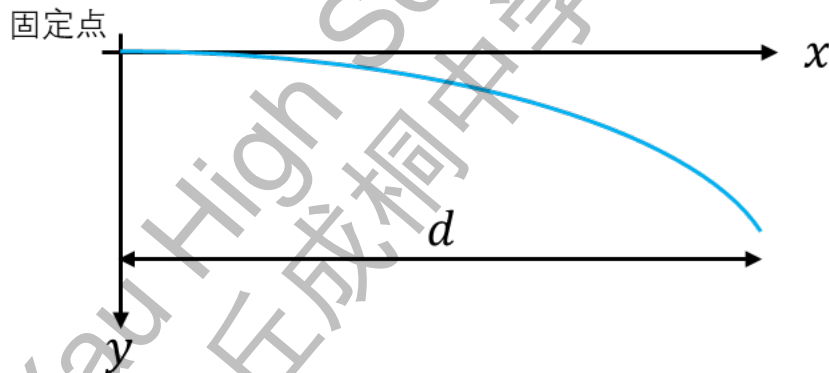


图 17: 纸张形变示意图

前人在测量纸 EI 的过程中选择忽略重力效应,在纸的末端施加拉力,从而直接计算出力矩,求解 EI 。然而,在实验中,我们发现量取纸的抗弯系数时,重力是不可忽视的,如下图,仅靠重力作用,纸就有了较明显的下垂。



图 18: 重力效应下的纸张下垂

故此，在进行力矩分析时，我们选定重力作为产生力矩 $M(x)$ 的作用力，即测量纸张在重力作用下自然下垂的相关参数来表示 EI 。为了表示出 $M(x)$ ，我们取横坐标为 x 的点作为支点，此时，此点处的 $M(x)$ 可表示为，从此点到横坐标为 d 的点的力矩的积分：

$$\int_0^{d-x} \eta g(d-x-t) dt \quad (14)$$

其中， η 为单位长度的书的质量，即将书沿着长边裁剪 1cm，裁剪下纸张的质量。

将 $M(x)$ 求出后带入挠曲线方程中，可得：

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} d^2 g \eta - dgx\eta + \frac{1}{2} gx^2 \eta \quad (15)$$

求解该微分方程可得：

$$y = \frac{g(d-x)^4 \eta}{24EI} + c_1 + c_2 x \quad (16)$$

由于我们知道此函数过 $(0,0)$ 点，且 $x=0$ 时，此函数的一阶导为 0，我们可

以得到：

$$y = \frac{g(d-x)^4\eta}{24EI} - \frac{d^4g\eta}{24EI} + x\frac{d^3g\eta}{6EI} \quad (17)$$

因此，我们只需要测量出 6 组 (x, y) 的数据并用数据拟合上述函数，就可以得到 EI 的值。我们按照如下方法搭建实验装置：



图 19: 测定 EI 的实验装置

根据实验测量结果我们将数据带入拟合，得到了拟合函数和 EI 的值，拟合效果图如下：

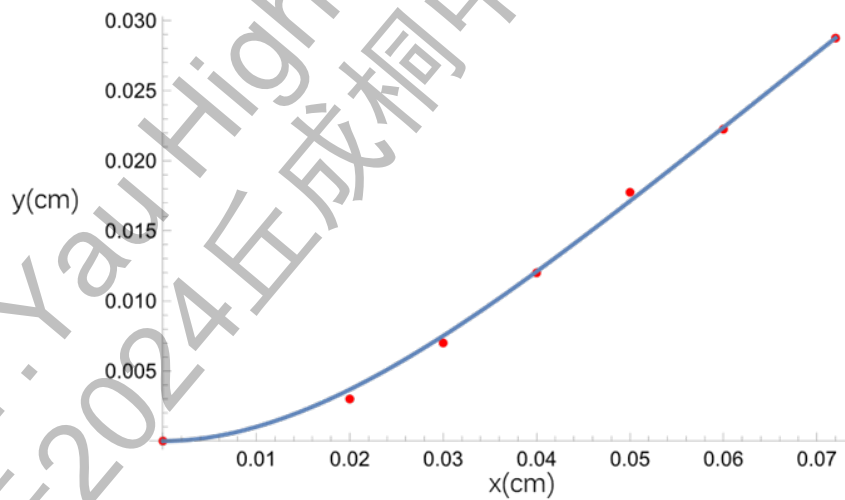


图 20: 拟合效果图

上图中红色的点表示测量得到的坐标值，而蓝色的线表示拟合得出的函数图像，最终，我们得到 $EI \approx 2.7 \times 10^{-5} N/m^2$

F. 测量纸张抗弯系数的 Mathematica 推导代码

```
f[x_] := (x + r*Sin[a])^2 + (y[x] - r*Cos[a])^2 - r^2
```

```
Solve[{(f'[x] /. y[x] -> 0 /. x -> 0) == 0}, r]
```

$$\left\{ \left\{ r \rightarrow \frac{\text{Sec}[a] (1 + y'[\theta]^2)}{y''[\theta]} \right\} \right\}$$

```
Clear[g]
```

```
[清除]
```

```
solution[x] := DSolve[EI y''[x] ==  $\frac{1}{2} d^2 g \eta - d g x \eta + \frac{1}{2} g x^2 \eta$ , y[x], x]
```

```
solution1[x] = solution[x]
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{g (d-x)^4 \eta}{24 EI} + c_1 + x c_2 \right\} \right\}$$

$$\int_0^{d-x} \eta g (d-x-t) dt$$

$$\frac{1}{2} d^2 g \eta - d g x \eta + \frac{1}{2} g x^2 \eta$$

```
data = {{0, 0}, {0.02, 0.003}, {0.03, 0.007}, {0.04, 0.012}, {0.05, 0.01775}, {0.06, 0.02225}, {0.072, 0.02875}}
```

```
{{0, 0}, {0.02, 0.003}, {0.03, 0.007}, {0.04, 0.012}, {0.05, 0.01775}, {0.06, 0.02225}, {0.072, 0.02875}}
```

```
{{0, 0}, {0.02, 0.003}, {0.03, 0.007}, {0.04, 0.012}, {0.05, 0.01775}, {0.06, 0.02225}, {0.072, 0.02875}}
```

```
{{0, 0}, {0.02, 0.003}, {0.03, 0.007}, {0.04, 0.012}, {0.05, 0.01775}, {0.06, 0.02225}, {0.072, 0.02875}}
```

$$\frac{g (d-x)^4 \eta}{24 EI} - \frac{d^4 g \eta}{24 EI} + x \frac{d^3 g \eta}{6 EI} /. \{g \rightarrow 9.81, \eta \rightarrow 0.0239, d \rightarrow 0.072\}$$

$$\frac{2.62534 \times 10^{-7}}{EI} + \frac{0.00976913 (0.072-x)^4}{EI} + \frac{0.0000145852 x}{EI}$$

```
FindFit[data,  $\frac{2.6253405849599995 \times 10^{-7}}{EI} + \frac{0.009769125 (0.072-x)^4}{EI} + \frac{0.000014585225471999998 x}{EI}$ , EI, x]
```

```
{EI -> 0.0000273819}
```

G. 单页受力分析

