

参赛队员姓名： 时文博 洪小凯 赵玉浩

中学： 江苏省海安高级中学

省份： 江苏省

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 苏俊 王维国

指导教师单位： 江苏省海安高级中学

论文题目： 蜘蛛网动力学的研究

## 摘要

蜘蛛网在蜘蛛捕食方面发挥了巨大的作用，蜘蛛借助它困住猎物，并帮助自己移动。蜘蛛能成功地利用蜘蛛网捕猎除了源自蜘蛛丝自身的特性外，也与其结构密不可分。当猎物撞击到网上时，微小的振动也会引起整个网面的变化，有助蜘蛛捕猎。本研究利用橡皮筋搭建了蜘蛛网模型，进行了静力学分析，得出了蜘蛛网受力时的形变情况与蛛丝张力关系。此外，我们在不同方向不同位置施加压力，研究蜘蛛网的振动情况，探究边缘振动对中心的影响，从而研究蜘蛛网承受冲击和蜘蛛感知猎物的方式的优越性。

本研究的创新之处在于分析了蜘蛛网受到轻小物体撞击时的振动情况，并初步构建了相应的理论模型。

**关键词：**蜘蛛，蜘蛛网，振动

## 目录

摘要.....	2
一、研究背景.....	4
二、预实验.....	5
2.1 实验方案.....	5
2.2 理论分析.....	5
三、蜘蛛网的静力学研究.....	6
3.1 径向拉力与中央节点处质量关系的研究.....	6
3.2 中央节点下降高度和中央物体重量关系的探究.....	8
四、蜘蛛网的小振动研究.....	9
4.1 实验.....	9
4.2 对中心点振动的理论分析.....	10
五、对蜘蛛网振动放大的研究.....	11
5.1 垂直方向的振动放大实验.....	11
5.2 垂直方向实验分析.....	12
5.3 理论分析.....	13
六、水平方向的振动.....	15
6.1 实验.....	15
6.2 理论分析.....	16
七、总结与展望.....	18
参考文献.....	19
研究日志.....	20
致谢.....	22
组员简介.....	23
指导老师陈述.....	24

## 一、研究背景

蜘蛛是自然界中常见的一种生物，而蜘蛛网是它捕猎的主要工具，如图 1-1。我们知道，蜘蛛网有着令人难以置信的坚韧性，这与其承力方式具有密不可分的关系。例如，马达加斯加国家公园的达尔文树皮蜘蛛（图 1-2），身长只有不到两厘米，却能织出直径 25 米的巨网，而这张巨网不仅非常牢固，而且可以维持将近一周的时间，期间撞上这张网的虫子基本上会被轻松捕获。此外，无论虫子撞在哪里，位于蛛网中央的蜘蛛可以快速响应，精准地抓到猎物。



图 1-1 普通蜘蛛网（拍摄于江苏海安上湖湖边）

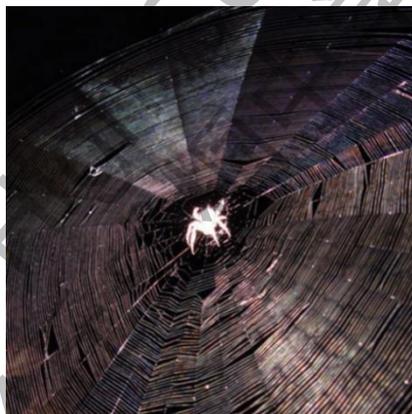


图 1-2 达尔文树皮蜘蛛（来自网络图片）

生物学家发现达尔文树皮蜘蛛的网非常巨大，而被捕捉的昆虫大多数体型极小且轻微，它们的撞击可以说是微不足道，可是达尔文树皮蜘蛛却能精确感知到昆虫的位置，这不得不说是令人惊叹的现象。

之前一些研究工作分析了蜘蛛网的结构力学特性和能量传递规律[1-5]，但是蜘蛛丝很脆弱，实验不易开展，为方便研究，我们能否利用橡皮筋搭建一个“蜘蛛网”？橡皮筋搭建的蜘蛛网有什么样的力学特性？它的振动有什么样的特点？为什么能否解释蜘蛛为何能够精准地感知到猎物？接下来我们来探究橡皮筋蜘蛛

蛛网的力学特征。

## 二、预实验

蜘蛛丝本质上是数微米粗细的蛋白质，其拉伸时的截面积变化趋势与橡皮筋相似。而蜘蛛丝过细，不便于研究，因此我们用橡皮筋模拟蜘蛛丝。

在实验中，经常需要对某一时刻的蜘蛛网进行受力分析。此时，记录形变量要比直接记录弹力更简单。因此，我们需要寻找弹力与形变量的关系。

我们还希望知道，在实际情况下，橡皮筋弹力与形变量的关系是否可以用单一的劲度系数  $k$  表示。一方面，橡皮筋有一定的弹性限度；另一方面，橡皮筋存在迟滞效应，且在长期使用时会老化，从而造成劲度系数的改变。我们进行实验对这几个方面进行探究。

### 2.1 实验方案

本实验用到的器材有：钩码，数根同一规格（原长约 5.8cm，记为  $L_0$ ）的全新的橡皮筋，铁架台，刻度尺。

如图 2-1 所示，将全新的橡皮筋挂在铁架台上，在下方逐个增加 50g 的钩码，增加至 6 个后再逐个减去至一个，分别测量橡皮筋底端对应的刻度尺刻度，取  $g=9.8\text{m/s}^2$ ，得到不同拉力下橡皮筋的形变量  $\Delta L$ 。多次实验取平均值后，画出橡皮筋的拉力-形变量图像，如图 2-2 所示。红色、蓝色点分别代表增加、减少钩码的过程中，拉力  $F$  与形变量  $\Delta L$  之间的关系。

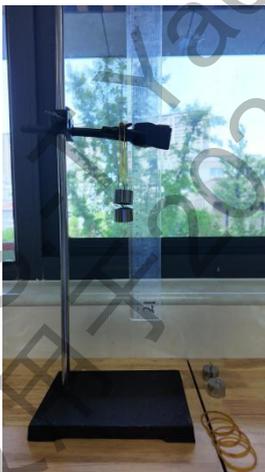


图 2-1

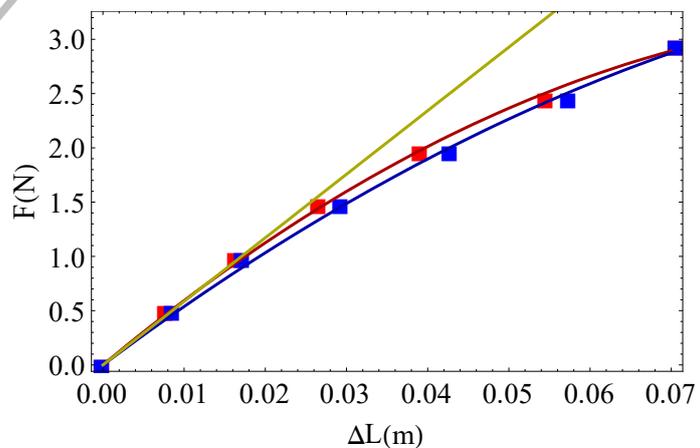


图 2-2

### 2.2 理论分析

可以看出，随着橡皮筋形变量增大，其单位 $\Delta L$ 变化对应的 $F$ 增量减小。同时，当 $F=0$ 时， $\Delta L=0$ 。我们尝试使用常数项为0的二次函数分别进行拟合，结果如图2-2中两条抛物线所示，其解析式为：

增大拉力过程中（红线）：

$$F = 62.25\Delta L - 298.9\Delta L^2 \quad (1)$$

减小拉力过程中（蓝线）：

$$F = 55.92\Delta L - 212.1\Delta L^2 \quad (2)$$

虽然这是一个开口向下的抛物线图像，但是可以想象，在过大的伸长量下，橡皮筋会断裂。在实验误差允许的范围内，这一图像与数据吻合得相当好。

我们也注意到，在形变量较小时，拉力与形变量近似成正比。对 $F=0, F=0.49\text{N}, F=0.98\text{N}$ 的数据点使用正比例函数拟合得到图2-2中黄色直线：

$$F = 58.55\Delta L \quad (3)$$

当 $F=0.98\text{N}$ 时， $\Delta L=0.0167\text{m}$ 。此时，(3)比(1)和(2)更贴近实验数据。

在接下来实际的实验中，单根橡皮筋的形变量一般不会超过2cm（不超过原长的1/3）。因此，在实验中，可以近似认为橡皮筋具有恒定的劲度系数，约为 $k=58.55\text{N/m}$ 。

另外，即便减小拉力到0.49N时，其对应的 $\Delta L$ 依然略大于增加拉力至0.49N时的。可以看出，橡皮筋在大范围的形变中发生了迟滞现象。实际实验中，单根橡皮筋受到的拉力较小，其因过度拉伸产生的迟滞可以忽略。

### 三、蜘蛛网的静力学研究

#### 3.1 径向拉力与中央节点处质量关系的研究

为了使用橡皮筋模拟蜘蛛网的动力学特征，我们搭建的蜘蛛网有着六条径向放射线和同心圆状的切向线。在这样的网中，所有线段的长度都是固定的，方便蜘蛛网的搭建。

现实中，蜘蛛网的放射线远多于六条，但是六向放射线下的结论可以推广到其他情况。同时，现实中蜘蛛网的切向线呈螺旋状而非同心圆状。但是，切向线非常密集，相邻两圈切向线间的距离很小，其受力状态与同心圆类似。同时，蜘蛛网的承重主要依赖放射线而非切向线[2]。因此，可以使用同心圆状切向线进行模拟。

我们使用橡皮筋（其劲度系数已在预实验中测得）、直径 5mm 的钥匙扣和直径 10mm 的钥匙扣制作蜘蛛网模型。其中，每根橡皮筋重量约 0.30g，每颗 5mm 钥匙扣重量约 0.17g。10mm 钥匙扣位于蜘蛛网边缘，不参与运动。当挂有钩码时，钩码质量远大于橡皮筋和钥匙扣的质量，因此橡皮筋和节点自重可以忽略不计。

如图 3-1 所示，以蜘蛛网中心为原点建立极坐标系，用 $(r,\theta)$ 表示各个节点的位置。如，(2,1)表示自内向外第二圈，距离所选起始点所在轴线逆时针一条轴线上的节点。

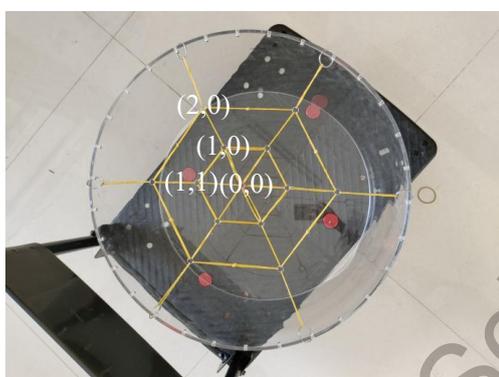


图 3-1 模拟蜘蛛网



图 3-2 实验装置图

整张蜘蛛网的直径约 50cm，每条直径上有 6 根橡皮筋，5 个 5mm 钥匙扣（其中(0,0)处的节点为所有方向共用），2 个 10mm 钥匙扣。在接下来的实验中，我们使用了 $F_1$ ， $F$ ， $\theta$ ， $L$  这些物理量： $F_1$ 表示蜘蛛网模型（0，0）节点上受到的拉力， $F$ 为连接在力传感器上的放射线承载的拉力， $\theta$ 表示一根放射线与水平方向所成夹角， $L$ 表示蜘蛛网模型初始状态一根放射线的长度。

本实验使用的器材：50g 钩码，力传感器，模拟蜘蛛网，如图 3-1 所示。我们改变(0,0)节点挂的钩码个数，用力传感器测出不同质量钩码下的放射线拉力值，装置如图 3-2。

我们将一根放射线连接到力传感器上，得到(0,0)节点上钩码数量不同时的拉力值，使用二次函数进行拟合，得到图 3-3。每根橡皮筋受力的示意图如图 3-4 所示。

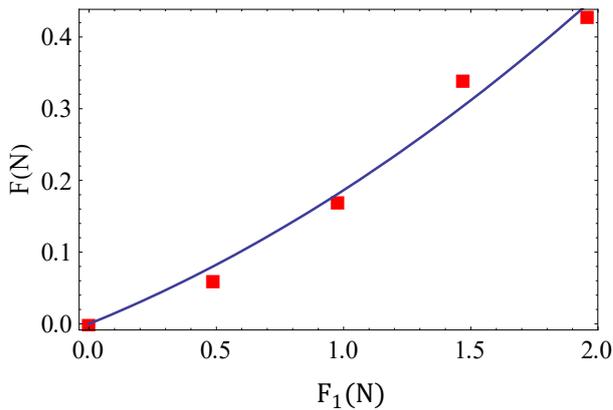


图 3-3

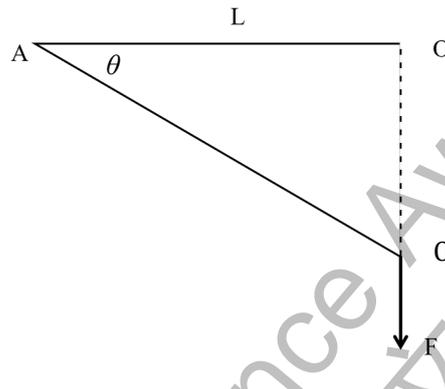


图 3-4

### 3.2 中央节点下降高度与中央物体重量关系的探究

为后续进行研究的方便，首先分析某根橡皮筋的弹力与高度变化的关系，其中涉及  $H$ ,  $L$ ,  $k$ ,  $F_y$ ,  $F$ ,  $F_{y0}$  这些物理量。其中  $H$  为质点较原位置竖直方向的位移， $L$  为橡皮筋的原长， $k$  为橡皮筋的劲度系数， $F$  为单根放射线上的力， $F_y$  为单根竖直方向的分力， $F_{y0}$  为六根橡皮筋竖直方向上的合力。

由示意图可以得到

$$F_y = \frac{k(\sqrt{H^2+L^2}-L)H}{\sqrt{H^2+L^2}} = kH\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H}{L}\right)^2+1}}\right) \quad (4)$$

由二项式定理有  $\left[\left(\frac{H}{L}\right)^2+1\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{L}\right)^2 + \frac{3}{16}\left(\frac{H}{L}\right)^4 + \dots$ 。注意到  $\frac{H}{L}$  较小，我们将  $\frac{H}{L}$  视作一个小量，忽略四阶以上小量，并带回 (4) 式中可得

$$F_y \approx \frac{kH^3}{2L^2} \quad (5)$$

同理有

$$F = k(\sqrt{H^2+L^2}-L) \approx \frac{kH^2}{2L} \quad (6)$$

在接下来的讨论中，将采用此种方法简化计算。在我们的简化模型中，中心点连有六根长橡皮筋，每根长橡皮筋由三根橡皮筋串联组成，因此  $k_1 = \frac{1}{3}k$ ,

$$F_{y0} = \frac{3k_1H^3}{L^2} = \frac{kH^3}{L^2} \quad (7)$$

代入  $k=25\text{N/m}$  (在此试验中，橡皮筋已有明显老化，此处重新测得  $k$  值)， $L=0.225\text{m}$ ,

用数学软件作图。从图 3-5 可以看出，理论与实验基本符合。

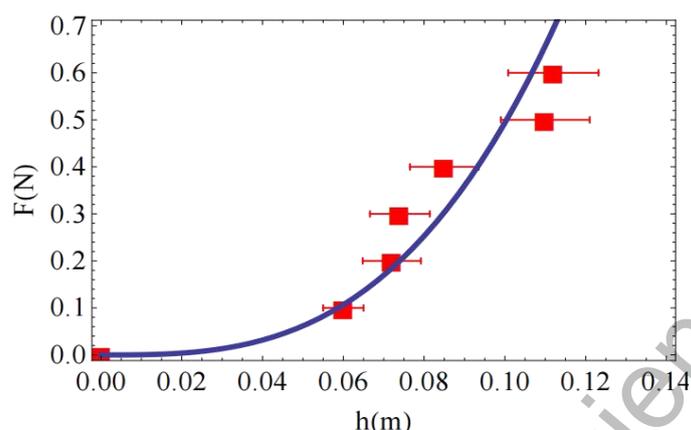


图 3-5  $F-h$  的数据及拟合图像

#### 四、蜘蛛网的小振动研究

蜘蛛网受到猎物撞击后会发生振动，为简化问题，我们先研究中心点的微小振动。我们在中央节点挂上一个钩码，用手按住中心节点，施加微小压力，然后快速撤去，记录振动情况。根据对称性，我们只要用力传感器测得某一根径向线上的拉力，就可以得到所有径向线的拉力。而根据径向线的拉力大小变化，可以测得振动周期。这样，就可以避免用高速相机拍摄的麻烦，而且在进行分析的时候，也可以直接从力传感器上读出图像，从而直接得出周期。

##### 4.1 实验

为模拟猎物撞击蜘蛛网中央时网的的振动情况，我们把钩码挂在中央节点，用手让其先下降一段距离，然后快速松手使它振动，期间使用力传感器记录下拉力的变化，如图 4-1 与图 4-2。



图 4-1 实验装置及操作图

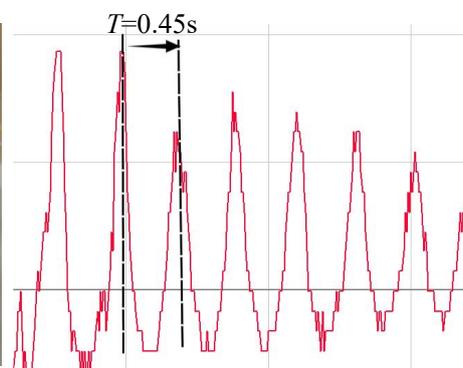


图 4-2 使用力传感器得到的图像

图 4-2 为力传感器采集到的数据，我们取波峰与波峰之间的时间，就可以得到周期值，如中两条竖直虚线之间的值就表示一个周期，通过观察具体数值发现周期的平均值  $T=0.45\text{s}$ 。

#### 4.2 对中心点振动的理论分析

当蜘蛛网中心处发生微小振动时，我们将中心看作质点，并研究微小振动时的周期。对质点进行受力分析，有：

$$m \frac{d^2H}{dt^2} = mg - \frac{kH^3}{L^2} \quad (8)$$

其中初始条件取  $H(0) = 0, \dot{H}(0) = 0$ 。由于我们使用力传感器获得数据，使用(6)式将  $H-t$  的图像转化成  $F-t$  的图像，如图 4-3。

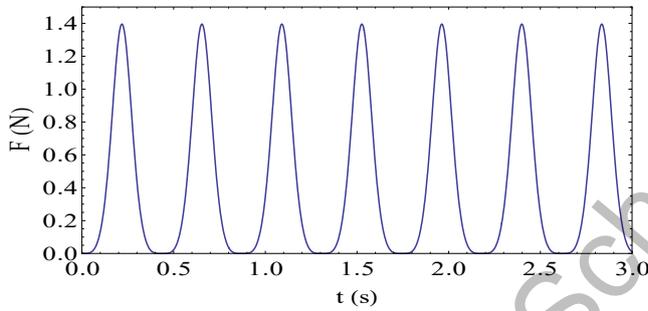


图 4-3  $F-t$  图像

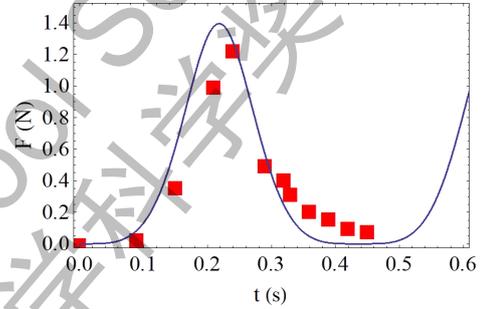


图 4-4 实际数据拟合比较图像

这是一个周期函数，我们可以利用一维势能曲线求其周期。首先，在实验中， $H$  最大为  $0.06\text{m}$ ，为小振动，用  $U$  表示系统的总势能， $E$  为总能量，标定  $H=0$  时重力势能为 0，因为物体则有

$$U = \frac{kH^4}{4L^2} - mgH \quad (9)$$

当物体处于一个稳定平衡点时，回复力为 0，此时动能最大，总势能最小，总势能的导数为 0。

$$\dot{U} = \frac{kH^3}{L^2} - mg = 0 \quad (10)$$

在平衡点附近，即  $\Delta H = H - H_0$  附近将  $U$  展开成泰勒级数：

$$U = U(H_0) + \dot{U}(H_0)\Delta H + \frac{1}{2}\ddot{U}(H_0)(\Delta H)^2 + \dots$$

对于小振动，我们将忽略三阶及以上各项。由于我们将原点设为平衡点，实际情况质点极轻，所以  $H_0 = 0, U(H_0) \approx 0, \Delta H = H$ 。于是势能写作：

$$U = \frac{1}{2} \ddot{U}(H_0) H^2 \quad (11)$$

于是

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - \frac{1}{2} \ddot{U}(H_0) H^2 \quad (12)$$

由周期运动的对称性，有

$$\frac{dH}{\sqrt{1 - \frac{\ddot{U}(H_0) H^2}{2E}}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} dt \quad (13)$$

令

$$\sqrt{\frac{\ddot{U}(H_0)}{2E}} H^2 = \sin \varphi$$

则

$$d\varphi = \sqrt{\frac{\ddot{U}(H_0)}{m}} dt \quad (14)$$

对其积分，有

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \sqrt{\frac{\ddot{U}(H_0)}{m}} \int_0^t dt \quad (15)$$

可得

$$H = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \left( \sqrt{\frac{\ddot{U}(H_0)}{m}} t + \varphi_0 \right) \quad (16)$$

因此

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\ddot{U}(H_0)}} \quad (17)$$

代入得出周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m^3}{k}} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (18)$$

带入数据  $k=25\text{N/m}$ ,  $L=0.225\text{m}$ ,  $g=9.8\text{m/s}^2$ , 计算得出  $T = 0.48\text{s}$ , 与实验值  $T=0.45\text{s}$ , 基本符合。

## 五、对蜘蛛网振动放大的研究

蜘蛛网拥有独特的力学结构，在这种结构中，位于中心点的蜘蛛可以感知在网上任何地点的微小振动。以下将从理论和实验角度分析原因。

### 5.1 竖直方向的振动放大实验

我们分成了两种假设进行实验：1.网上不挂钩码；2.分别在网中央节点处和(2, 0)节点挂上钩码，以假设小虫子和蜘蛛。以下是本实验使用的器材：50g 钩码，500fps 高速索尼相机；模拟蜘蛛网，如图 5-1 和图 5-2。

我们做振动实验时，向节点(2,0)施加压力，迅速撤去后使用高速相机拍摄中央处节点和边缘处节点的振动。之后，我们将高帧率视频导入 Tracker 软件进行逐帧分析（图 5-3）[6]。

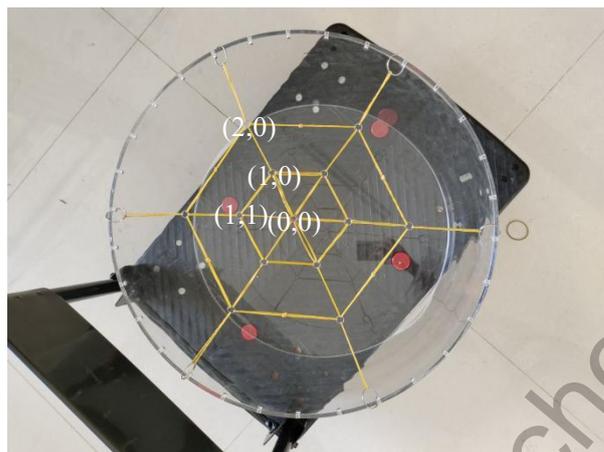


图 5-1 实验装置图



图 5-2 高速相机 XR100IV

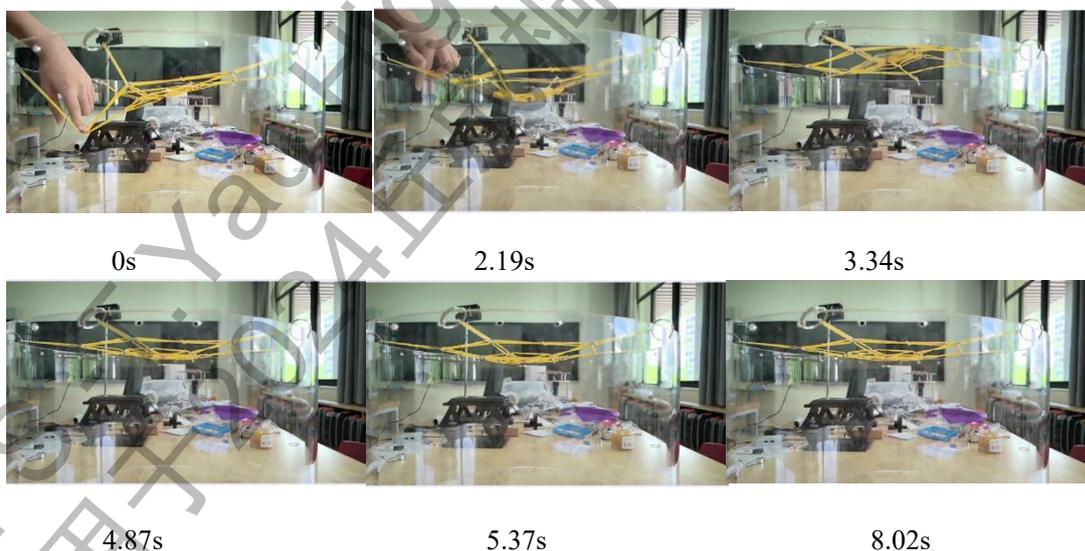


图 5-3

## 5.2 竖直方向实验分析

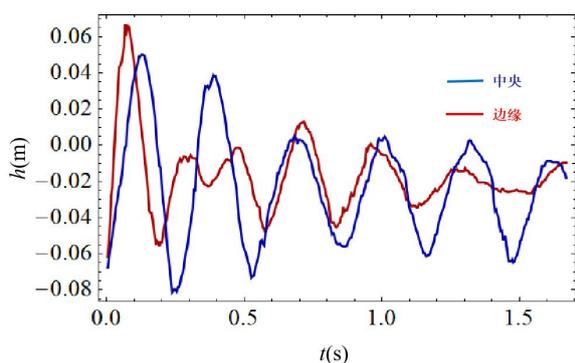


图 5-4 有负重时的振动

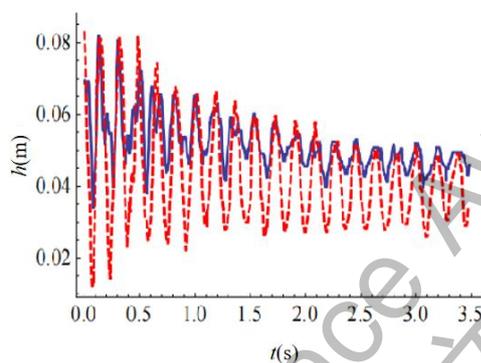


图 5-5 无负重时的振动

利用 Tracker 对振动进行分析，分别标记边缘处节点与中央处节点，再将塑料桶的上平面作为  $H=0$ ，竖直向上为正方向。采集数据，画出有负重时的  $h-t$  图像，如图 5-4 所示，其中蓝色线表示中央节点(0,0)处的振动，红色线表示边缘节点(3,0)处的振动。同样分析无负重时的情形，可以得到图 5-5，红线为中央节点处振动，蓝线为边缘处节点振动。

由图像可以得到，(0,0)节点处的振动幅度明显大于(2,0)节点处，且在开始时(2,0)节点的振动明显与(0,0)节点的振动不同步，但是当振动稳定之后，两者几乎是同步的。我们认为这可能是由于(2,0)节点的振动传递给了(0,0)节点，带动了中央节点的振动，造成(0,0)节点落后于(2,0)节点的振动。但是一段时间的振动过后，(3,0)钩码最初所带有的能量已经几乎完全分散到整个系统当中，此时的振动就可以看作横波，因此到了相对稳定的阶段时，由于(2,0)节点处和(0,0)节点处的振动相差  $2\pi$  的整数倍，导致它们振动同步。

此外，我们还发现，由两个图像都可以看出，(0,0)节点处的振幅总是要比(2,0)节点处振幅大得多，我们推测这可能因为(2,0)节点处的振动能量会汇聚到(0,0)节点处。

### 5.3 理论分析

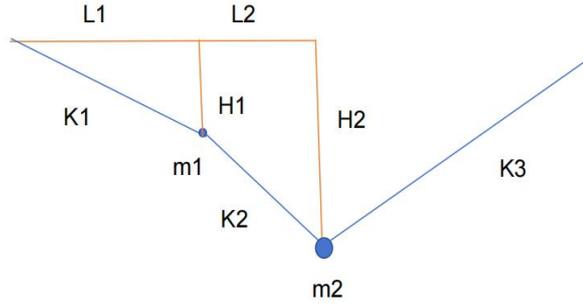


图 5-6 分析示意图

首先我们研究悬挂两个物体的橡皮筋。以竖直向下为正方向，忽略水平方向的位移， $H_1$ 和 $H_2$ 分别为质量为 $m_1$ ， $m_2$ 的两个物体的位移， $k_1$ 为两根橡皮筋串联后的劲度系数， $k_2$ 为一根橡皮筋的劲度系数， $k_3$ 为三根橡皮筋串联的劲度系数。

如图 5-6 所示，对 $m_1$ 进行受力分析，由我们在与实验部分得到的近似公式可得，竖直方向的力只与两质点的相对高度有关，因此可得橡皮筋对物体的拉力的竖直分力为：

$$\begin{cases} F_{k1} = -\frac{k_1 H_1^3}{2L_1^2} \\ F_{k2} = \frac{k_2 (H_2 - H_1)^3}{2L_2^2} \\ F_{k3} = 5 \frac{k_3 H_2^3}{2(L_1 + L_2)^2} \end{cases} \quad (19)$$

根据对蜘蛛捕食时的分析，发现蜘蛛捕食的过程十分短暂，在这个短暂过程中我们忽略空气阻力对振动的影响，可得：

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 H_1}{dt^2} = m_1 g + \frac{k_2 (H_2 - H_1)^3}{2L_2^2} - \frac{k_1 H_1^3}{2L_1^2} \\ m_2 \frac{d^2 H_2}{dt^2} = m_2 g - \frac{k_2 (H_2 - H_1)^3}{2L_2^2} - 5 \frac{k_3 H_2^3}{2(L_1 + L_2)^2} \end{cases}$$

整理为

$$\begin{cases} \frac{d^2 H_1}{dt^2} = g + \frac{k_2 (H_2 - H_1)^3}{2m_1 L_2^2} - \frac{k_1 H_1^3}{2m_1 L_1^2} \\ \frac{d^2 H_2}{dt^2} = g - \frac{k_2 (H_2 - H_1)^3}{2m_2 L_2^2} - 5 \frac{k_3 H_2^3}{2m_2 (L_1 + L_2)^2} \end{cases} \quad (20)$$

初始条件取  $H_2(0) = 0.07, \dot{H}_2(0) = 0, H_1(0) = 0.03, \dot{H}_1(0) = 0$

将 $H_1$ ， $H_2$ 转化为关于 $t$ 的函数并绘图，如图 5-7，与实际数据图 5-8 基本一致。这说明理论基本符合事实，可以用于进一步分析。

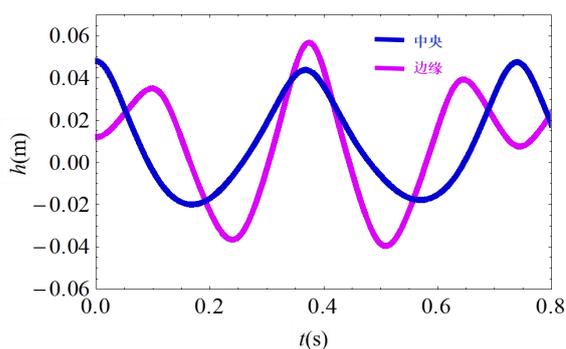


图 5-7 理论图像

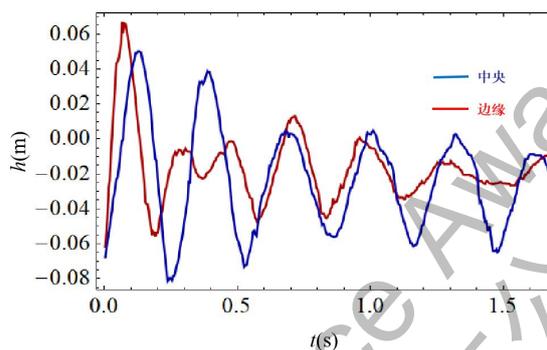


图 5-8 实际数据图像

可以看出，中心振动 $H_1$ （蓝色）更加稳定，且振幅周期性大于偏心振动 $H_2$ （红色），当撞击很小时，这保证了蜘蛛能够迅速感知到物体。

## 6. 水平方向的振动

### 6.1 实验

现实中，猎物不一定以竖直方向撞上蜘蛛网，也有可能从侧面撞击蜘蛛网。接下来，我们初步考虑水平方向振动的影响。

如图 5-8 所示，用手水平拨动某个节点 A，在蜘蛛网边缘节点 A 处切向制造微小位移，使用高速相机拍摄。将得到的视频导入 Tracker 进行分析，处理后得到 A 点在切向上的振动图像如图 5-9 所示。可以看出，在切向上，A 点作类似阻尼振动。

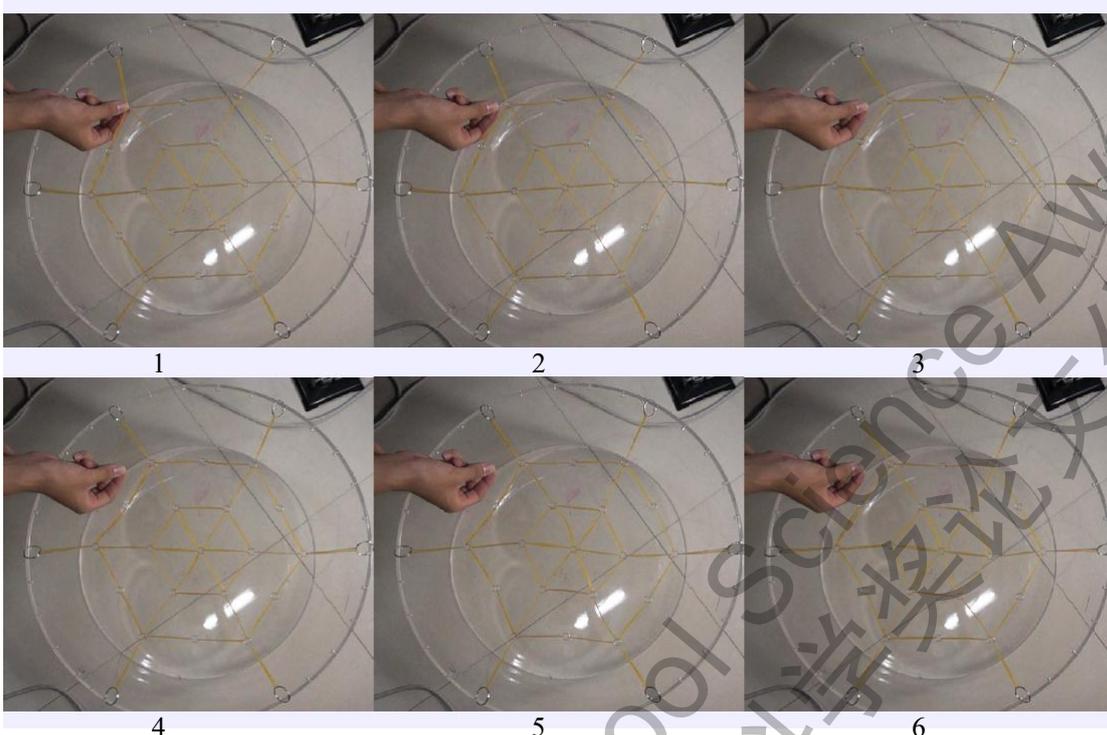


图 5-8

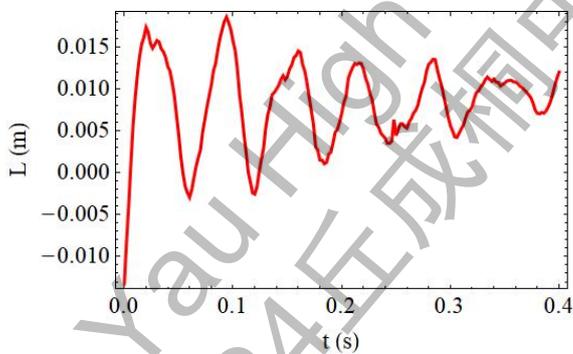


图 5-9

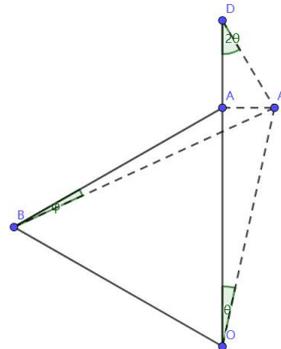


图 5-10

## 6.2 理论分析

蜘蛛网上节点众多，对每个节点进行分析较为困难。我们简化模型，研究 A 在某一时刻的加速度，仅保留与 A 直接相连的橡皮筋，如图 5-10 所示。以 A 所在半径为极轴，则  $A(2,0)$ ， $O(0,0)$ ， $B(2,1)$ ， $D(3,0)$ 。 $AB=OA=OB=2AD=L$ 。

现将 A 沿切向拉至 A' 处，记  $AA'=x$ ， $x \ll OA$ 。此时，A 点受到的拉力  $F$  可以表示为：

$$\vec{F} = \frac{k}{2}(OA' - 2L_0) \frac{\overline{A'O}}{A'O} + 2 \times \frac{k}{2}(BA' - 2L_0) \frac{\overline{A'B}}{A'B} + k(DA' - L_0) \frac{\overline{D'O}}{D'O} \quad (21)$$

此处，长度为 2 根橡皮筋的 BA 上的拉力使用的劲度系数为  $k$ 。这是因为，实际上，与 BA 相对称的橡皮筋相对平衡时所产生的拉力同步减小了。在小角近似下，这一拉力减小量近似与 BA 拉力增量相同。

在切线方向上，回复力为：

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{k}{2}(OA'-2L_0)\sin\theta + k(DA'L_0)\sin 2\theta + k(BA'-BA)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \\ &= k\left(\frac{2L}{\cos\theta}-2L_0\right)\sin\theta + k\left(\frac{L}{\cos 2\theta}-L_0\right)\sin 2\theta + k(BA'-BA)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \end{aligned}$$

由于  $AA'\ll OA$ ， $\theta\ll 1$ ， $\varphi\ll 1$ ，故切向拉力可近似为：

$$\begin{aligned} F_t &= k(L-L_0)\sin\theta + k(L-L_0)\sin 2\theta + k(BA'-BA)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \\ &= F_0\sin\theta + F_0\sin 2\theta + k(BA'-BA)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) \end{aligned} \quad (22)$$

由几何关系得，在  $\theta\ll 1$ ， $\varphi\ll 1$  下，有  $\varphi = \frac{\theta}{2}$ ，则：

$$\begin{aligned} F_t &= F_0\sin\theta + F_0\sin 2\theta + k(BA'-BA)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 3F_0\sin\theta + k\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{4}\right)AA' \\ &= 3F_0\sin\theta + \frac{\sqrt{3}k}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sin\theta}{4}\right)AA' \\ &= \frac{3AA'}{2L}F_0 + \frac{\sqrt{3}k}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{AA'}{8L}\right)AA' \\ &= \frac{3AA'}{2L}F_0 + \frac{\sqrt{3}k}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{AA'}{8L}\right)AA' \end{aligned}$$

由于  $AA'\ll OA$ ，故忽略二阶小量有：

$$F_t = \left(\frac{3k}{4} + \frac{3F_0}{2L}\right)AA' \quad (23)$$

A 点应在平衡位置附近作简谐运动。在实际情况中，形变量很小时，(2,-1) 节点并不松弛，对 A 点有反向拉力，抵消部分回复力，但我们此处仍然按简谐运动考虑。该简谐振动的劲度系数为：

$$k_1 = \frac{3k}{4} + \frac{3F_0}{2L} = 62.90\text{N/m}$$

我们认为，振动时，随之振动的部分包含振动节点和与其相连的 AO AB AD 及与 AB 关于 AO 对称的橡皮筋。其中，AO、AD 上不同位置的振幅分别与到中心、边缘节点的距离成正比，可认为只应计算一半的惯性质量。由此得到，振动部分的质量约为 2.275g。从而得到振动周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} = 0.03779\text{s}$$

注意到，此周期要小于测量结果。实际上， $k$  的计算非常复杂。振动在橡皮筋中的传播速度限制和未考虑到的橡皮筋的影响都会导致回复力的变化，A 点并非作严格的简谐运动。此处仅作粗略估算。

在实验中，无论边缘的振幅大小，中心部分的位移都很小。这是因为，不同轴线上的振动相互抵消。这就意味着，对于趴在网中央守株待兔的蜘蛛而言，探测猎物更多依靠网在垂直方向的振动。

## 七、总结与展望

本研究首先回顾了自然界蜘蛛网的结构特征，并在实验室中搭建了蜘蛛网模型，模拟了蜘蛛网受到静压力与蜘蛛网振动的场景，并对这两种场景进行了分析，研究了蜘蛛网在不同受力情况下的动力学状态。

我们通过模拟蜘蛛网受到静止压力的情况，得出结论：随着压力值增大，蜘蛛网放射线的弹力也随之增大。接着，分别模拟了蜘蛛网负重和不负重时边缘受到压力而振动的情况。

在蜘蛛网垂直方向振动的研究中，我们基本阐明了蜘蛛捕食信号的传导，得出了二体谐振过程中能量分布的规律。首次发现并解决了蜘蛛网对微小振动的放大问题。同时，我们探究了蜘蛛网水平方向的振动，发现蜘蛛并不依靠水平方向振动感知猎物。

研究有助于对一些极微小的振动的记录——利用蜘蛛网的模型可以将很多无法感知到的微小振动进行采集放大。此外，这也有助于研究蜘蛛的生活习性和捕猎方式。

参考文献:

- [1] Aoyanagi, Yuko, and Ko Okumura. "Simple model for the mechanics of spider webs." *Physical review letters* 104.3 (2010): 038102.
- [2] Qin, Zhao, et al. "Structural optimization of 3D-printed synthetic spider webs for high strength." *Nature communications* 6.1 (2015): 7038.
- [3] Soler, Alejandro, and Ramón Zaera. "The secondary frame in spider orb webs: the detail that makes the difference." *Scientific reports* 6.1 (2016): 31265.
- [4] Sensenig, Andrew T., et al. "Spider orb webs rely on radial threads to absorb prey kinetic energy." *Journal of the Royal Society Interface* 9.73 (2012): 1880-1891.
- [5] Choi, Hyo Seok, and Kyung Suk Lee. "Probing Mechanical Properties of a Spider Web Using a Simple Rubber Band Model." *The Physics Teacher* 62.4 (2024): 246-249.
- [6] Tracker 是一款通过分析视频中物体运动来提取相关物理信息的软件，官网 <http://tracker.physlrts.org>

## 研究日志

2024.03

本小组在老师指导下寻找研究方向。最初，我们对降落伞很感兴趣，希望研究降落伞的稳定性的相关问题。在查阅资料后，我们尝试进行相关实验和理论分析。但是，户外环境的空气扰动严重影响着降落伞的运动，我们难以得到实验数据。我们的空气动力学知识也不足以对数据进行具体分析。我们最终放弃了这个课题。

2024.05

在老师的引导下，我们决定围绕蜘蛛网进行研究。起初，我们在搭建模型时，想要尽可能地模拟真实的蜘蛛网。但是，查询发现，真实的蜘蛛网放射线数量过多，且切向线呈螺线状，不便于搭建。于是，我们最终选择了六向放射线和同心圆切向线的方法，利用橡皮筋和钥匙扣搭建了蜘蛛网模型。

此后，我们广泛阅读了各类论文。我们了解到，蜘蛛网上的放射线往往会承担主要压力，而切向线则几乎不承力。这大大简化了我们的模型，使得分析成为可能。

2024.06

通过对蜘蛛捕食的影像的分析，我们推测得出蜘蛛捕食主要依靠网的振动。进一步搜集资料，我们发现蜘蛛的眼睛仅能感知光线明暗的变化，如果没有蜘蛛网独特的力学结构，蜘蛛将无法捕食。于是我们将对蜘蛛网振动的分析纳入了论文的一部分，并开始进行了研究。

2024.06

我们在理论分析的研究中遇到了很多困难，在中学阶段，我们熟悉经典牛顿力学，但在实际研究中，牛顿力学具有很多难解的方程。罗昊学长对我们进行了指导与帮助，并检查我们的公式。这段时间，我们进行了对建模的尝试，但多次都由于太过复杂而无法进行有效分析，这一点主要是由于我们在模型中尝试将切向线加入而导致的。

2024.07-08

在老师的建议下，我们计划采集一些自然界中的原版蜘蛛网来直接进行实验，这样不仅避免了模型构建时可能出现的误差，还可以一步到位，直接探究最真实的物理原理。但是，尽管我们冒着酷暑在操场寻找蜘蛛网，放射线和切向线清晰完整的标准蜘蛛网却不见踪影。当天下午，老师帮我们带回了一张完整的蜘蛛网，

但又因劲度系数过小，过于脆弱而难以进行实验。于是，我们决定继续以橡皮筋模型开展研究。

我们主要通过力传感器获取橡皮筋模型所承受的拉力数据，以及使用高速相机拍摄振动视频，并辅以 Tracker 进行运动分析。

2024 S.-T. Yau High School Science Award  
仅用于2024丘成桐中学科学奖论文公示

## 致谢

本项目源自我们对蜘蛛捕猎现象的背后的物理规律的好奇。查阅文献后发现，关于蜘蛛网的静力学承重分析在国外已有一些研究，但关于蜘蛛网的振动和蜘蛛感知猎物原理方面的研究却不是很详细，于是我们开始了有关的研究。

在此论文完成之际，我们诚挚感谢自始至终给予我们悉心指导的苏俊与王维国老师，他们无偿对我们实验设计、理论推导以及论文的措辞修改提供了巨大帮助。感谢家长的理解和支持。

我们三人在研究过程中求同存异，互相帮助，最终完成了研究工作。洪小凯负责了预实验，撰写了静力学的理论分析，进行了水平方向振动的研究，并负责论文的格式修改。时文博参与了竖直方向的振动实验，并对其进行了细致而深入的分析。赵玉浩撰写了摘要、目录、附录、致谢等部分的草稿，并参与了静力学和振动实验。三人共同完成了论文的撰写。

姓名: 时文博 性别: 男

学校: 江苏省海安高级中学 年级: 高二

简介: 各科全面发展, 曾多次获得一等学习标兵, 广泛学习各科竞赛知识, 对物理具有热情。想象力丰富, 喜欢阅读各类书籍, 有责任感和团队意识, 严于律己。

2022 年 获金钥匙科技竞赛江苏赛区一等奖

姓名: 洪小凯 性别: 男

学校: 江苏省海安高级中学 年级: 高二

简介: 各学科全面发展, 广泛学习物理、化学、生物、信息技术的相关知识。有较强的物理思维能力, 善于从现象中总结规律并进行分析。实验态度严谨, 能够积极完成重复性程序性工作。

2022 年 获金钥匙科技竞赛江苏赛区个人特等奖, 团体特等奖

2023 年 获金钥匙科技竞赛江苏赛区个人特等奖

姓名: 赵玉浩 性别: 男

学校: 江苏省海安高级中学 年级: 高二

简介: 各科平衡发展, 对物理有较大的热情, 求知欲旺盛, 乐观开朗, 不畏困难, 有担当意识和团队意识, 严格要求自我, 有较强的语言表达能力, 广泛学习生物、物理和信息竞赛知识。

2023 年 高中数学建模(应用)能力展示活动江苏赛区二等奖

## 指导老师陈述

江苏省海安高级中学坐落于江苏省海安市，是首批江苏省四星级普通高中，国家级示范高中，江苏省首批高品质示范高中建设立项学校，学校每年约 10-15 人录取清华大学和北京大学，大量优秀校友活跃于全球科技领域。

从 2015 年开始，我校 5 次参加丘成桐中学物理奖。参加丘赛的同学得到了早期的科研训练，培养了科研兴趣，大部分同学毕业后选择了物理专业，就读于清华大学、中国科学院大学，麻省理工学院等国内外名校。

我校设立了一个“物理微科研实验室”，不同于平时大课实验室，该实验室为参加丘赛、奥赛等同学量身打造，不是先买什么仪器再做什么，而是学生需要做什么再买什么器材，满足了实际需求。

因学生基本参加高考，参加丘成桐中学奖的同学无升学目的，学生是兴趣参加，自行组队，参与者成绩在全年级名列前茅，感兴趣，有想法，学有余力。一般是高一学生，从寒假开始，准备约大半年时间。学生先学习普通物理、微积分等基础知识，然后再寻找合适的研究课题，利用周末（每周末一次，每次大概 3 个小时），寒暑假累计约一个月。老师与学生讨论，指导学生制定实验方案，开展实验，数据测量与分析，讨论理论模型合理性。

指导老师苏俊和王维国均为本校物理教师，均无偿指导学生参加丘赛，没有机构参与。

苏俊 王维国  
江苏省海安高级中学  
2024 年 9 月 14 日