

参赛队员姓名： 杨云屹 罗海艺

中学： 重庆市育才中学

省份： 重庆市

国家/地区： 中国大陆

指导老师姓名： 张程鑫

指导教师单位： 重庆市育才中学

论文题目： 气泡水中的物体沉浮现象：开放气-

固耦合系统的动力学行为研究

2024 S.-T. Yu High School Science Award
仅用于2024年成渝中学科学奖论文公示

气泡水中的物体沉浮现象：开放气-固耦合系统的动力学行为研究

摘要

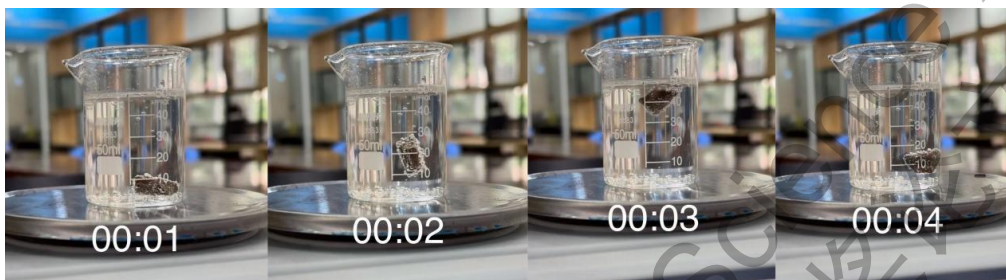


图 1 将巧克力放入气泡水中分别经过 1s, 2s, 3s, 4s 之后拍摄的图像。

将一密度略大于水的物体放入气泡水中，物体表面会聚集一层气泡。这些气泡一定条件下能使物体在液体中上浮。随后，随着附着在物体表面的气泡破裂，物体又开始下沉。该过程可以在气泡水中气体充足的条件下循环往复。这一有趣且广泛存在于不同体系的现象吸引了相当的研究兴趣。然而，此前的研究都着重于气泡本身的产生机制和周期性沉浮的仿真模拟，未将气泡生成的热力学过程纳入物体的动力学方程中进行系统的解析分析。本文从理论和实验方面综合研究了浸没物体伴随表面具有含时生长气泡时的运动行为以及这一热力学-力学过程的耦合方式。我们首先针对浸没物表面的气泡成核机制提出了一个简化模型。随后，基于球形浸没物与气泡复合系统的受力分析建立了物体平动与转动的动力学方程。在考虑到两种边界条件（物体在液体表面与在液体内）的差异后，我们得到了气泡生成和破裂对物体运动的具体影响因素。接着，我们搭建了定量实验装置，基于针对浸没球体运动规律的高分辨率观测，检验了理论模型的合理性。通过观察不同时段下浸没物体的运动状态，我们也明确了气泡生成速率对浸没物运动的影响。本文提出的模型可以对浸没物在液体中的运动进行统计学上的有效预测。我们给出的解析方程组具有计算上便捷快速的优势，为进一步研究气泡-固体复合系统的动力学与集体颗粒组在流体环境中的复杂现象提供了理论基础。

目录

1. 引言	4
2 理论分析	6
2.1 定性分析	6
2.1.1 对成核机制的定性分析	6
2.1.2 巧克力运动阶段讨论的影响因素	7
2.2 定量分析	8
2.2.1 成核率	8
2.2.2 小球的竖直方向运动	8
2.2.3 旋转	11
2.2.4 平动与转动的结合	15
3 定量实验与检验	17
3.1 实验装置	17
3.2 实验过程	18
3.2.1 巧克力材料到塑料小球的转变	18
3.2.2 利用树脂小球的成核率测定	19
3.2.3 树脂小球的平动运动情况	20
3.2.4 树脂小球的转动情况	21
3.3 表面材质对小球沉浮的影响	22
4 总结与展望	23
参考文献	24
致谢	25
附录	26
A1 测量不同的小球的直径和摄制运动图像的照片	26
A2 气泡大小的测定	27
A2 转动部分 MATLAB 求解代码	28
A3 综合平动与转动的 MATLAB 求解代码	31

1.引言

打开一罐汽水时，我们通常会听到“呲”的一声，并观察到绵密的气泡溢出。这是因为当压力迅速降低时，超饱和气泡会在容器内壁表面以及汽水内部形成与脱离，并因自身浮力上升到表面，将二氧化碳气体释放到环境中。气泡在汽水中的形成本质上是一种凝结核现象，而成核现象通常需要成核点位才可以发生：溶解的二氧化碳分子不断撞击这些点位，使得能量聚集，从而形成汽化中心。由上述现象可见，不同性质的成核点位会造成截然不同的成核现象。例如，将汽水倒进玻璃杯，凑近观察汽水中的气泡时，会发现它们大多聚集生长在容器的内表面处；而将更粗糙的手指伸入汽水中，气泡就迅速在整个手指表面聚集；如果将一颗微观上外壳是多孔表面的曼妥思糖扔进汽水中，我们会发现气泡将不受控制地大量冒出；而如果放入一块密度略大于水的巧克力，在其表面形成的气泡会使巧克力上浮。一些特定形状和表面积巧克力甚至会产生振荡运动，在水中上下沉浮数个小时。

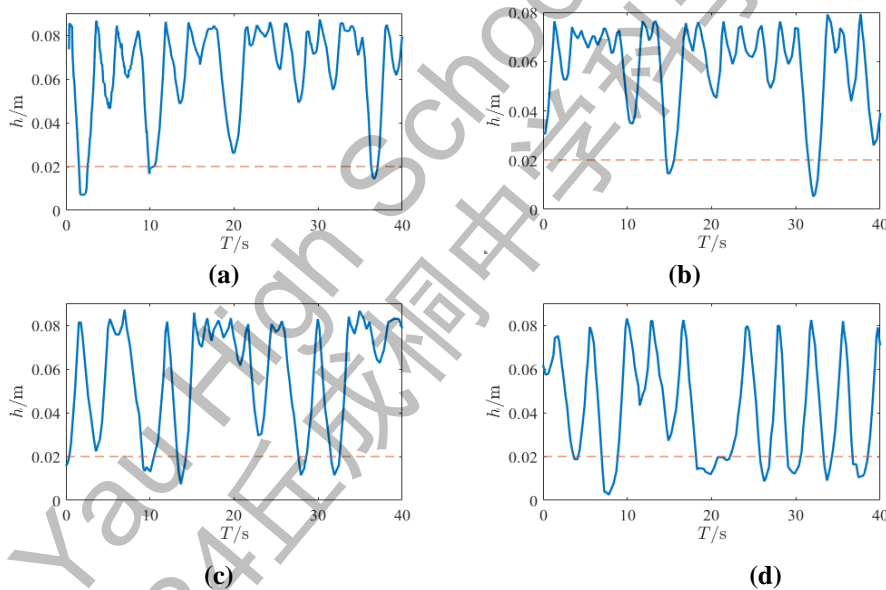


图 2 (a) 第 5 分钟巧克力在液体中的竖直方向上的位置随时间的变化。(b) 第 15 分钟巧克力在液体中的竖直方向上的位置随时间的变化。(c) 第 25 分钟巧克力在液体中的竖直方向上的位置随时间的变化。(d) 第 35 分钟巧克力在液体中的竖直方向上的位置随时间的变化。

我们在实验中将切割过的正方体巧克力放入刚刚打开的汽水内，并且录制 40 分钟的视频，如摘要中配图 1 所示。我们从初始时刻把巧克力放入汽水内，然后在 TRACKER 内将坐标轴原点定位到烧杯的底部，通过打点可以得到从 1-40 分钟的巧克力高度随时间的变化的数据，在各个时间段选取中间段的 40s 数据，例如：5 分钟至 5 分 40 秒；15 分钟至 15 分 40 秒，将这部分数据作为参考，将参考数据导入 MATLAB 中绘制出图像，并且，由于利用 TRACKER 探究运动过程时选取的点在巧克力球心处，而巧克力球心处在沉底时的高度往往与烧杯地面有一定距离，于是我们认为当巧克力小球的高度小于

0.02m 时, 我们视为巧克力小球沉底, 如图 2 所示。通过预实验的进一步分析可以看出两个较为明显的变化特征: (1)小球的运动时间周期随着时间的增长变得越来越长;(2)小球在 20 分钟前出现了较多次没有完全沉底而开始上浮的情况, 具体体现为: 图像只表现了在纵轴上半段的运动情况。这种有趣的周期性运动很容易被定性解释。被扔进汽水的巧克力作为超饱和溶液中的异质在汽水中起到了异质成核的作用, 使气泡在其表面快速形成。气泡的形成使巧克力和气泡的复合系统拥有小于水的平均密度, 进而受到向上的合力而上升。当其上升至汽水表面时, 气泡的破裂又导致巧克力-气泡这一复合系统受到的浮力减小, 进而下沉。同时, 巧克力表面产生了可供新气泡形成的空间, 使得新的气泡可以出现在巧克力上。在开始时, 气体的过饱和率高, 故气泡在溶液中产生的速率较大。气泡的快速增长使得巧克力在未沉底时就开始上升, 所以巧克力有较多次没有完全沉底就开始上浮的情况。上述过程往复即形成周期性运动。尽管我们可以理解这些成核现象以及其导致的运动学结果(如巧克力振荡)背后的原因, 但精细准确描述这一现象在很长一段时间内缺乏系统的研究。

2023 年 3 月, Spagnolie 等人研究了饱和流体中的物体的悬浮和动力学[1], 主要从数值模拟方面细致研究了物体的丰富运动行为。同年, A-Man Zhang 等人就气泡在液体中的产生及自身尺寸变化与运动推导了一般理论[2], 并且分析了多个气泡的相互作用系统的运动学。1959 年, Scriven 等人通过在纯材料和二元混合物材料的有核气泡生长的典型条件下, 得到了关于气泡生长方程的精确解总结了气泡生长动力学[3]。1978 年, R.S.J. Sparks 等人研究了在气泡在岩浆内部的生成与破裂[4], 岩浆气泡可以在一定程度上借鉴汽水的气泡。2018 年, Soto 等人精确控制了气泡聚并发生时的位置和时间, 通过划分不同阶段, 测量了演化和速度, 并且通过边界积分进行了数值模拟[5]。1988 年, Lubetkin 和 Blackwell 发现[6], 当过饱和气体从液体中释放出来时, 可以通过建模计算出从过饱和气体溶液中释放出来的气泡的数量。结果表明, 这个数与形成的核数密切相关, 这个发现就可以对成核理论进行定量检验。

总的来说, 在研究这一振荡的众多理论中, 过往的研究人员主要着手与定性分析后的数值模拟和仿真。尽管这些仿真结果与我们最初的定性分析相符并能给出符合试验结果的定量结果, 但疏于研究气泡生成的机制, 成核点位的运动学方程和这两者之间的关系。物理上来说, 本现象背后是一个热力学-力学复合体系, 其中热力学部分为气泡产生这一开放热力学体系, 而力学部分为气泡和其附着物体在变力作用下的运动状态。要想从理论上更细致的描述该体系并得到尽可能多的解析结果, 需要对体系的热力学和力学部分进行细致分析并得到耦合的热力学-力学动力学方程组。在本研究中, 我们在前人研究的基础上对异质和溶液性质对振荡运动学造成的影响进行精细分析, 在建立完整动力学方程的基础上, 引入实验中实际的边界条件与不同初值情况, 重点对周期性运动的丰

富性进行了理论求解与解析分析。在实验方面，为了方便制作和定量分析，确保实验的可重复性，我们使用与巧克力密度相仿的不同尺寸的树脂小球进行实验。

本文的具体安排如下：在第二节中，本文概括了小球振荡的运动模式，给出其作为一个异质导致气泡凝结核形成的机制以及其振荡行为的定性解释，并特别说明了气泡在液面边界处破裂的机制是基于巧克力受气泡浮力的力矩平衡的破缺。接着，本文从受力分析角度入手，建立了运动微分方程，解出了巧克力运动关于成核率和液面边界处条件造成的转动的具体平动与转动的热力学-力学耦合方程。最后我们使用龙格库塔法，借助MATLAB求解出振荡中难以求解的一系列基于不同初始条件的振荡方程的数值解，并将平动与转动的过程结合起来，实现了平动转动过程互相转换，气泡量和浸没物状态互相影响的复杂数值模拟。在第三节中，我们进行了定量实验研究，用建模辅助实际操作检验了理论模型的合理性。用理论结合程序模拟出来的运动图像与实验现象作对比，确定理论的正确性。最后，在第四节中，我们对我们的理论和实验研究进行总结，并展望该问题上可以进一步研究的内容。

2 理论分析

在进行该振荡现象的完整理论研究之前，我们先建立该问题分析的逻辑链。基于引言部分已经提及的该问题的初步分析，我们将给出理论问题的顺序和组成。首先，我们将对气泡产生这一热力学过程以及浸没物运动状态这一动力学过程进行细致定性分析，并明确定量分析的研究思路，即首先规定影响浸没物运动的因素为气泡成核率 λ ，将 λ 看成一贯穿浸没物运动始终的热力学性质， λ 不受其运动状态影响的连续性函数，再将容器底部和溶液表面作为边界条件与 λ 进行耦合。因此把复合运动过程分段为平动和转动两部分，平动部分主要由成核率 λ 控制，转动部分重点关注球体本身在边界处的旋转和气泡随机破裂以及在空白处再生成的部分。

2.1 定性分析

2.1.1 对成核机制的定性分析

气泡在一个物体表面的形成既与物体本身材质有关，又与溶液性质有关。具体来说，物体的粗糙程度影响气泡在其表面附着的接触角，同时也决定其单位面积成核点个数。另外，溶液中气体的溶解浓度与二氧化碳分子撞击异质的速率相关，也会影响气泡逃跑的容易程度。除此之外，溶液的温度和压强也对上述气泡的产生与溢出过程有综合的热力学影响。

传统的成核理论（Classical Nucleation Theory 下文简称为：CNT）核心结果是对成核速率的预测 λ ，以（事件数）/（体积·时间）为单位[7]。例如，速率 $\lambda = 1000\text{m}^{-3}\text{s}^{-1}$ 表明了过饱和蒸汽或溶液中，平均相当于 1 秒内 1000 个液滴在 1 立方米的体积中成核。CNT 的表达式指出了两个因素共同作用：第一部分与成核位点的数量有关，并且定义了一个和自由能密切相关的概率密度，并且如果自由能为正且很大，形成核的概率会较低，成核会较慢。第二部分是动态部分，与气体进入物质的速率有关。

CNT 的预测精细地将这些因素结合起来用于解释例如分子和纳米尺度上的微观成核过程。但与此同时，CNT 在理论验证过程中存在适用范围，具体而言，1) CNT 假设核内部为体积不可压缩液体，并使用宏观界面张力，忽略了小核的表面张力差异；2) 假设成核仅通过单粒子吸附/发射发生，未考虑气泡本身的合并和分裂；3) 对自由能变化极其敏感，模型需依赖实验数据校准，限制了理论验证。

尽管 CNT 理论成功地给出了诸多因素对微观成核过程的定量影响，但上述局限使得该理论无法精确并定量地解释有气泡成核参与的更为综合的物理过程。基于此，我们决定直接从直观实验现象开始，研究成核速率随时间改变量的变化，从而得出更加简便且适合研究宏观物体成核规律的理论。我们直观地观察到，浸没物在气泡水中的振荡随时间减缓，最终停止。浸没物本身的密度大于溶液，因此其振荡的速率反映了气泡提供的浮力变化率。振荡减缓说明浮力变化率随时间减缓。对实验打点视频进行定性分析，也可以发现成核率也随着时间减缓，符合 e 指数衰减过程的普遍特性。

2.1.2 巧克力运动阶段讨论的影响因素

仔细观察巧克力的一个振荡周期，会发现它由在底面静止，上浮，漂浮和下沉四个阶段组成。在静止和上浮阶段，巧克力的运动基本只取决于气泡形成的速率：底面静止时，气泡在巧克力表面不断形成，直至其提供的浮力大于巧克力的重力时巧克力开始上升。到达液面时，巧克力的上浮被迫终止。在触碰到液体表面时，尽管部分气泡因撞击而破裂，余下的气泡依旧可以提供足以平衡巧克力重力的浮力。因此，巧克力进入漂浮状态。在此状态中，一些在特定位置脱离或破裂的气泡会打破巧克力所受力矩的平衡，进而带动巧克力旋转，导致更多气泡破裂。最终，气泡浮力无法与巧克力所受重力平衡时，巧克力便会开始下沉。

2.2 定量分析

2.2.1 成核率

定义成核率 $\lambda = dN/S_t dt$ 为成核表面上，单位面积(S_t)单位时间内产生的气泡个数(N)。则气泡的增加满足

$$dN = \mu(S_t - S_0)dt \quad (1)$$

其中 S_t 是附着表面的总面积， $S_0 = kN$ 为已被占据的面积，这里假设在单位未占据面积上成核的概率均等且没有时间依赖，即 $d\mu/dt = 0$ ，进而我们得到气泡个数变化的微分方程为

$$\frac{dN}{dt} = \mu(S_t - kN) \quad (2)$$

上式两端的关于时间微分后，可以得到下列关系

$$S_t \frac{d\lambda}{dt} = -\mu k S_t \lambda \quad (3)$$

最终的成核率满足

$$\lambda = \lambda_0 \times \exp(-\mu k t) \quad (4)$$

式(4)即为成核率的定义式。因为成核率由诸多变量决定，直接利用宏观层面上可测定的物理参数来计算成核率较为困难。因此，本文基于实验拟合得到了树脂材质的成核率公式。

对于树脂材质，成核率为指数函数：

$$\lambda = 2.309 \times 10^5 \times \exp(1.62 \times 10^{-3} \times t) \quad (5)$$

在得到描述成核率的公式之后，便可利用它来计算小球受到的浮力与时间的关系。

2.2.2 小球的竖直方向运动

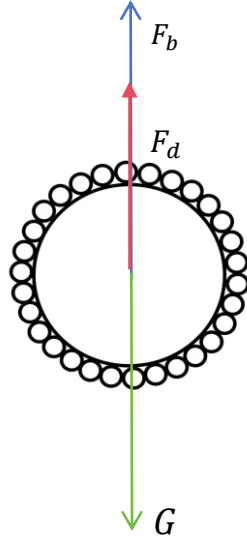


图 3 对悬浮小球的受力分析。

接下来讨论浸没在超饱和溶液中的小球运动的动力学。如图 3 所示，图中大的圆形空腔为所研究的浸没球体，球体表面的小圆圈为附着在浸没球体周围的气泡。首先考虑球体在超饱和液体中的平动。在超饱和液体中，球体受到的力分别可以表示为：

$$G = mg \quad (6)$$

$$F_b = \rho_w g V_{tot} = \rho_w g \left(\frac{4\pi R_c^3}{3} + N(t)\bar{V} \right) \quad (7)$$

$$F_d = 6\pi\eta r v = 6\pi\eta R_c \frac{dy}{dt} \quad (8)$$

假设向下（ y 方向）为正方向。根据牛顿第二定律，小球受到的合外力等于其质量和加速度的乘积。据此，由式(6)，式(7)，式(8)可得：

$$\left(\rho_c \frac{4\pi R_c^3}{3} \right) \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho_c g \frac{4\pi R_c^3}{3} - 6\pi\eta R_c \frac{dy}{dt} - \rho_w g \left(\frac{4\pi R_c^3}{3} + N(t)\bar{V} \right) \quad (9)$$

其中 ρ_c 为球的密度， ρ_w 为液体的密度， R_c 为球的半径， η 为汽水的粘滞系数， $N(t) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$ ，为从 t_1 时刻到 t_2 时刻产生的气泡个数， $\bar{V} \equiv V_{tot}/N$ 是气泡的平均体积。这里我们假设液体密度保持不变。定义水和小球的密度比 $\theta \equiv \rho_w/\rho_c$ ，通过代数变换，从式(9)可得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (1 - \theta)g - \frac{9\eta}{2R_c^2 \rho_c} \frac{dy}{dt} - \frac{3\theta g N(t)\bar{V}}{R_c} \quad (10)$$

通过求解该方程，代入常量：小球密度 $\rho_c = 1.2\text{g/cm}^3$ ，液体密度 $\rho_w = 1\text{g/cm}^3$ ，汽水的粘滞系数代入水在常温时的粘滞系数 $\eta = 1.1 \times 10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ ，小球半径 $R_c = 0.01\text{m}$ ，气泡半径 $R_b = 6 \times 10^{-4}\text{m}$ ，令初始速度和加速度均为 0，并且设放置深度 5cm 处为原点，可以画出如图 4 所示图像：

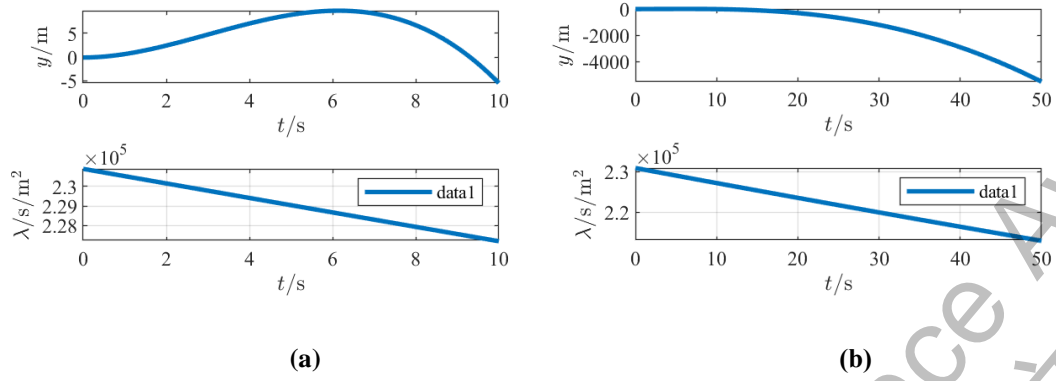


图 4 (a)小球数竖直方向运动位移随时间变化曲线前 10 秒。(b)小球数竖直方向运动位移随时间变化曲线前 50 秒。

可以看出，浸入物会在放入后因为自身重力短暂下沉一段时间，如图 4(a)。随着气泡的增加，一旦气泡量达到临界值，使得浸入物的速度和加速度达到 0 时（在公式中表达为 $d^2y/dt^2 = 0; dy/dt = 0$ ），浸入物的运动会反向，并开始逐渐上浮。基于上述条件，可以得到描述这一临界状态的式(10):

$$(1 - \theta)g = \frac{3\theta g N(t)\bar{V}}{R_c} \quad (11)$$

其运动会反向，并开始逐渐上浮。此时的反向时单位面积的气泡量是:

$$N_{threshold} = \frac{(1 - \theta)R_c}{3\theta\bar{V}} \quad (12)$$

由此公式还可以推出浸没物出现往复运动的条件：当以动力学推得的气泡个数与气泡个数本身的计算式 $N(t) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$ 相比较，如果 $(1 - \theta)R_c / (3\theta\bar{V}) > \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$ ，即

$$\theta < \frac{R_c g}{R_c g + 3g\bar{V} \times \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt} \quad (13)$$

则气泡生成产生的浮力变化永远无法克服浸没物自身的重力。反之，只要浸没物的密度大于水，它就有一定机会产生一定时间的振荡运动。

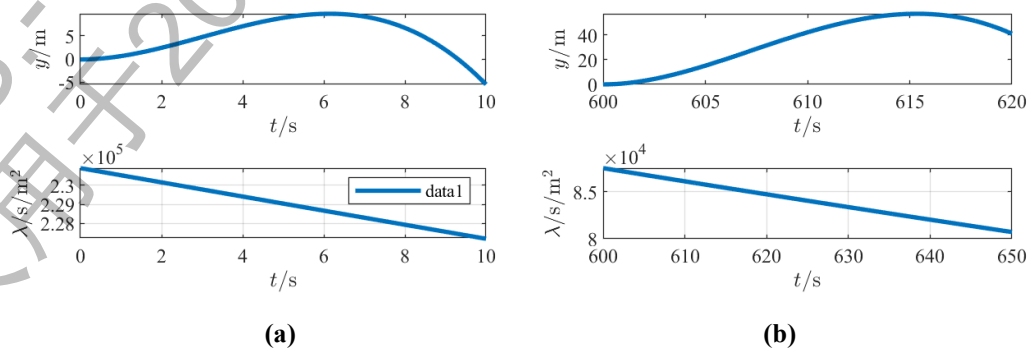


图 5 (a)小球在 $t=0s$ 时放入时的运动情况。(b)小球在 $t=600s$ 时放入后的运动情况。

成核率随时间的改变也在很大程度上影响小球在气泡水中的运动。如果在刚打开一罐汽水时将小球放入，如图 5(a),因为成核率约为 $\lambda = 2.31 \times 10^5 \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ 左右，它将再放入后第 6 秒左右很快因为气泡的迅速附着而转向上浮。但如果等待十分钟再将小球放入气泡水，如图 5(b)，气泡将在放入后第 15 秒左右才能达到使小球再次上升的数量。

2.2.3 旋转

如图 4，如果不受到除浮力，重力和粘滞阻力以外的力的干扰，气泡本身的破裂速度并不会影响浸没物在较短的时间内一直上浮，但由于液体高度有限，液面会阻止浸没物继续上升。

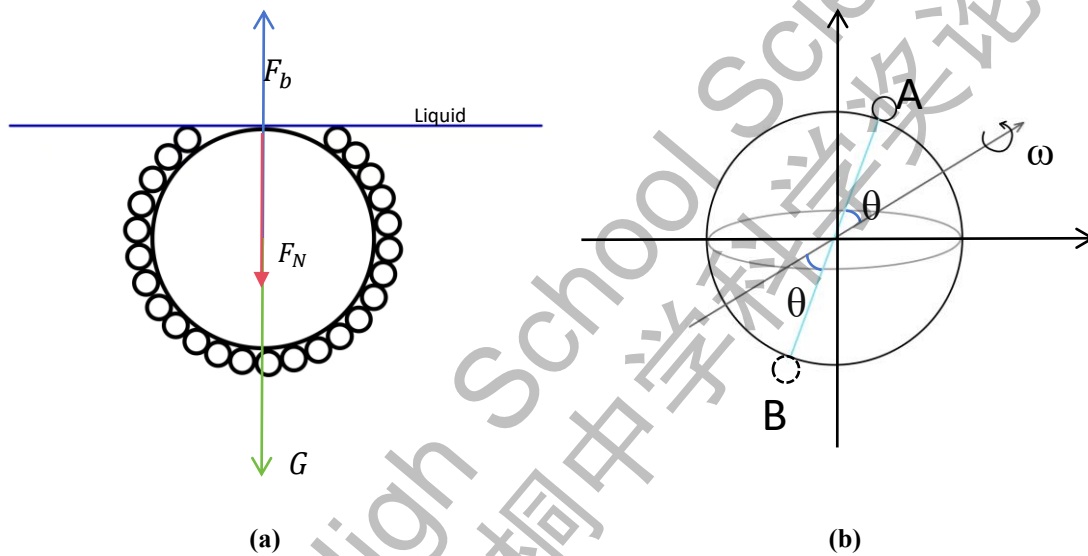


图 6 (a)液面处对小球的受力分析。(b)小球产生转动的示意图。

如图 6(a)，此时浸没物体受力：重力 G ，浮力 F_b 。附着的气泡碰到液面时会产生破裂，并在一定几率下打破力矩平衡，产生旋转。接下来的小节将详细讨论这种对称性破缺产生的气泡连锁破裂反应。如果不考虑气泡破裂产生的反冲力，理想情况下，可以将一个气泡的破裂等效于它对称于球体直径位置的一个额外的气泡生成，而垂直于该平面的过圆心的轴就是小球的转轴。如图 6(b)，设 A 处为气泡破裂的位置，则 B 处是等效的力矩产生位置设该气泡所在位置是 θ ，则其破裂后体系受到的转动力矩就是

$$\tau_b = -f_b R_c \cos \theta \quad (14)$$

其中， $f_b = F_b/N = \rho_w g \bar{V}$ 是单个气泡产生的浮力。小球开始转动的机制往往是因为漂浮时底部气泡上升碰到了小球，或者上面某个气泡破裂所产生的微扰导致的力矩平衡破缺。该微扰决定小球的初始角速度，因为微扰位置的不同，可能决定小球是振荡之后留在表面还是旋转着下沉。经过观察和计算，在漂浮过程中小球顶部始终因为液面张力而不会露出液面，所以气泡将从最顶端开始破裂，并带动其他的气泡也开始破裂，此过程中小球顶端一直与液面接触但不露出，直到气泡破裂到一定个数后，因为提供浮力的气泡体

积下降而下沉。分别用长和宽所占角度除以每个气泡占的角度 $\tan\theta_b = 2R_b/(R_c + R_b)$ ，其中有关系： $R_b \ll R_c$ ，可以近似为： $\tan\theta_b \approx \theta_b = 2R_b/(R_c + R_b)$ ， θ_b 如图 7(a)所示。假设小球按同一转轴旋转，那么每旋转单位角度，接触到液面的一排气泡都将被带动破裂，形成一个近似长方形的空带，如图 7(b)。带的长度所占角度对应旋转破裂过程中扫过的弧长。

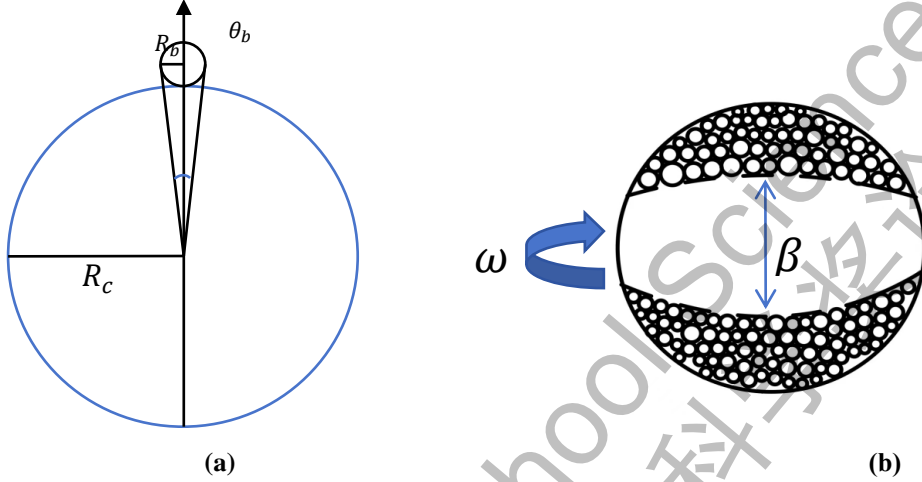


图 7 (a)一个气泡所占角度 θ_b 的示意图。(b)转动导致的近似长方形的空带的示意图。

向上取整，再相乘就可以得到破裂气泡的总个数。空带的宽所占角度通过几何关系得到

$$\beta = \left\lceil 2 \cos^{-1} \left(\frac{R_c}{R_c + R_b} \right) \right\rceil \quad (15)$$

对应气泡个数 $N_{width} = \beta/\theta_b$ 。

接下来讨论气泡的连锁破裂反应，通过转动力学具体计算破裂扫过的角位移。由微扰带动气泡破裂产生的总力矩可以写作

$$\begin{aligned} \tau_{break} &= -F_{de} R_c \cos \theta_0 + \sum_{i=0}^{N_{break}} -F_b R_c \cos \left(\frac{\pi}{2} + i\theta_b \right) \\ &= -F_{de} R_c \cos \theta_0 + \sum_{i=0}^{N_{break}} F_b R_c \sin(i\theta_b) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 N_{break} 是破裂的个数， F_{de} 是在小球受到微扰的力， θ_0 为这个力和水平面的夹角。

那么，我们可以通过计算 $\ddot{\theta}_{break} = \tau_{break}/I_c$ 得到角加速度，从而积分得到角速度

$$\omega_{break} = \dot{\theta}_{break} = \int_0^t \ddot{\theta}_{break} dt \quad (17)$$

再次积分后得到由角速度导致的转动角度，从而得到破裂个数

$$N_{break} = \left\lceil \frac{1}{\theta_b} \int_0^t \omega_{break} dt \right\rceil \quad (18)$$

其中 I_c 是球的转动惯量 $I_c = 2M_c R_c^2/5$

我们还需要考虑气泡重新生成所带来的回转力矩。这些回转力矩对于浸没物的来回振荡是十分重要的。于是定义 S_a (可以成核的面积 available area)为没有气泡覆盖的表面积 $S_a = N_{break} \cdot S_b - N_{new} \cdot S_b$,

其中 $N_{new} = \left[\int_0^t \lambda dt \cdot \int_0^t dS_a(t') dt' \right]$, 为 t 秒以内总共新生的气泡个数

所以

$$S_a = \frac{N_{break} \cdot S_b}{1 + \int_0^t \lambda dt \cdot S_b} \quad (19)$$

新的气泡只能在 S_a 上依照时间顺序生成, 它们提供的力矩为

$$\tau_{new} = \sum_{j=0}^{N_{new}} F_b R_c \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - j\theta_b\right) = \sum_{j=0}^{N_{new}} F_b R_c \sin(\theta - j\theta_b) \quad (20)$$

那么, 净的瞬时角加速度就是合力矩除以球的转动惯量

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_{break} + \tau_{new}}{I_c} = \frac{-F_b \left(\cos \theta - \sum_{i=0}^{N_{break}} \sin(i\theta_b) + \sum_{j=0}^{N_{new}} \sin(\theta - j\theta_b) \right)}{\frac{2}{5} M_c R_c} \quad (21)$$

总的气泡破裂量为 $N_{tot} = (N_{new} - N_{break}) \cdot N_{width}$

有了浸没物的转动动力学方程, 就可以解释观察到的一系列现象。我们观察到, 在到达液体表面后, 浸没物在有些时候会在表面来回轻微转动, 最后归于平静, 继续漂浮, 有些时候则会较为剧烈地转动, 进而开始下沉, 但下沉的深度也深浅不一。这是微扰产生的位置不同造成的。假设力矩平衡破裂的位置为 θ_0 , 根据(14)式, $|\tau_b|$ 最大时 $\theta_0 = 0$ 或 $\theta_0 = \pi$, 产生的力矩最大, 为 $5.137 \times 10^{-9} \text{N} \cdot \text{m}$ 。因此在球体赤道处破裂的气泡带来的转动效果最明显, 在球冠顶部和底部附近破裂的气泡则只会使浸没物产生轻微的振荡。我们还观察到, 转动在达到一定幅度时会导致浸没物上的气泡无法支撑其继续漂浮, 这便是因为 $(N_{new} - N_{break}) \cdot N_{width} = N_{tot} \geq N_{thresh}$, 其中 N_{thresh} 为小球下沉时的最大气泡数量。

通过运动学方程我们很难得到具体的解析解, 因此在 MATLAB 中使用龙格库塔法联立后以得到精确的角速度, 角加速度和角位移关于时间的数值解图像。气泡净破裂量关于时间的函数 N_{broken} 在不同的初始微扰下的图像

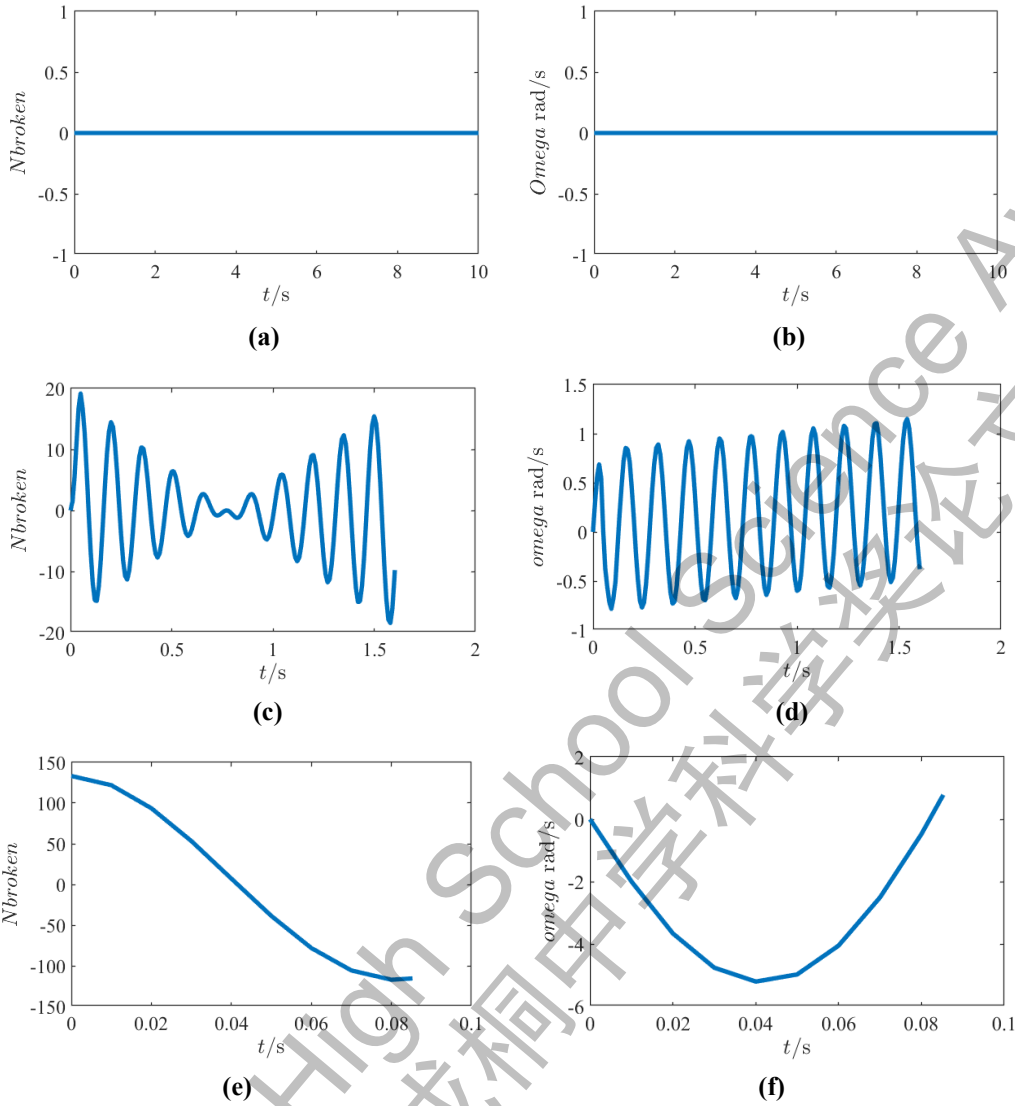


图 8 代入不同初始条件求解式(21)后得到的气泡破裂量和角速度随时间变化的关系。规定 N_{broken} 正方向为气泡的破裂数量增加方向, ω 正方向为顺时针。在本图中, 我们采取的参数为: 小球密度 $\rho_c = 1.2\text{g/cm}^3$, 小球半径 $R_c = 0.01\text{m}$, 气泡半径 $R_b = 0.0006\text{m}$ 。通过式(13)计算出 $\theta_b = 2R_b / (R_c + R_b) = 0.21^\circ$, $N_{width} = 25$ 。

假设微扰为一个气泡破裂时产生的力矩, 那么如图 8(a), 图 8(b)所示, 当微扰产生位置正好与水平穿过球心的轴成 90 度夹角时, 小球的力矩平衡不会破缺, 因此气泡的净破裂量 N_{broken} 以及小球的角速度一直为 0。如图 8(c), 图 8(d)所示, 当微扰产生位置与水平穿过球心的轴成 0 度, 也就是正好处于小球的赤道时, 小球会产生振荡, 气泡每秒的净破裂量也会产生周期性增减, 直到在 $t = 1.6\text{s}$ 左右总破裂量积分为 0, 气泡重新布满小球表面。因为此处假设的微扰极小, 因此在理想情况下, 就算一个气泡在其力矩最大的位置破裂也无法造成小球下降。但在现实中可以合理假设小球力矩平衡破缺时破裂的气泡总量大于一个, 并且角速度和旋转角度因为触碰到液面产生的冲力而具有一定的微小初始

值。如图 8(e),图 8(f)所示, 当将初始角位移设为 8° , 气泡的破裂量会在一瞬间飙升到 133 个左右, 小球会直接开始下沉, 符合我们观察到的一系列极端情况。

2.2.4 平动与转动的结合

在只考虑平动时我们将气泡附着总量定义为成核率在时间和面积上的积分, 现将平动与转动进行结合, 在悬浮状态中仍然采用 $N(t) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$, 在边界处考虑转动对气泡个数造成的影响, 与只考虑转动或平动时有所区别的是, 当小球与液面相撞时, 气泡可能并没有布满小球表面, 因此可附着气泡的面积 S_a 不仅等于因旋转扫除的面积, 还需要加上上升时在积攒气泡过程中未被占据的面积。因此可列式为:

$$\begin{aligned} S_a &= S_{total} - N_{new}S_b + N_{break} \cdot S_b \\ &= S_{total} - \left(\int_0^t \lambda(t) dt \cdot S_a - N_{break} \right) S_b \\ &= \frac{S_{total} + N_{break}S_b}{1 + \int_0^t \lambda(t) dt S_b} \end{aligned} \quad (22)$$

这里的 S_{total} 是小球的总表面积, 由于新的气泡只在 S_a 上生成, 因此

$$\begin{aligned} N_{new} &= \int_0^t \lambda(t) dt \cdot S_a \\ &= \int_0^t \lambda(t) dt \frac{S_{total} + N_{break}S_b}{1 + \int_0^t \lambda(t) dt S_b} \end{aligned} \quad (23)$$

带入总气泡破裂量的公式

$$N_{tot} = (N_{break} - N_{new}) \cdot N_{width} \quad (24)$$

代入式(23)后

$$N_{tot} = N_{width} \int_0^t \lambda(t) dt \left(\frac{N_{break} (1 + \int_0^t \lambda(t) dt S_b - S_b) - S_{total}}{1 + \int_0^t \lambda(t) dt S_b} \right) \quad (25)$$

而平动公式中控制浮力变化的总气泡附着量就等于布满时的最大气泡量减去总破裂气泡量

$$N_{net} = \frac{4\pi R_c^2}{S_b} - N_{tot} \quad (26)$$

代入式(25)后

$$N_{net} = \frac{4\pi R_c^2}{S_b} - N_{width} \int_0^t \lambda(t) dt \left(\frac{N_{break} (1 + \int_0^t \lambda(t) dt S_b - S_b) - S_{total}}{1 + \int_0^t \lambda(t) dt S_b} \right) \quad (27)$$

放入程序中后得到这样的图像:

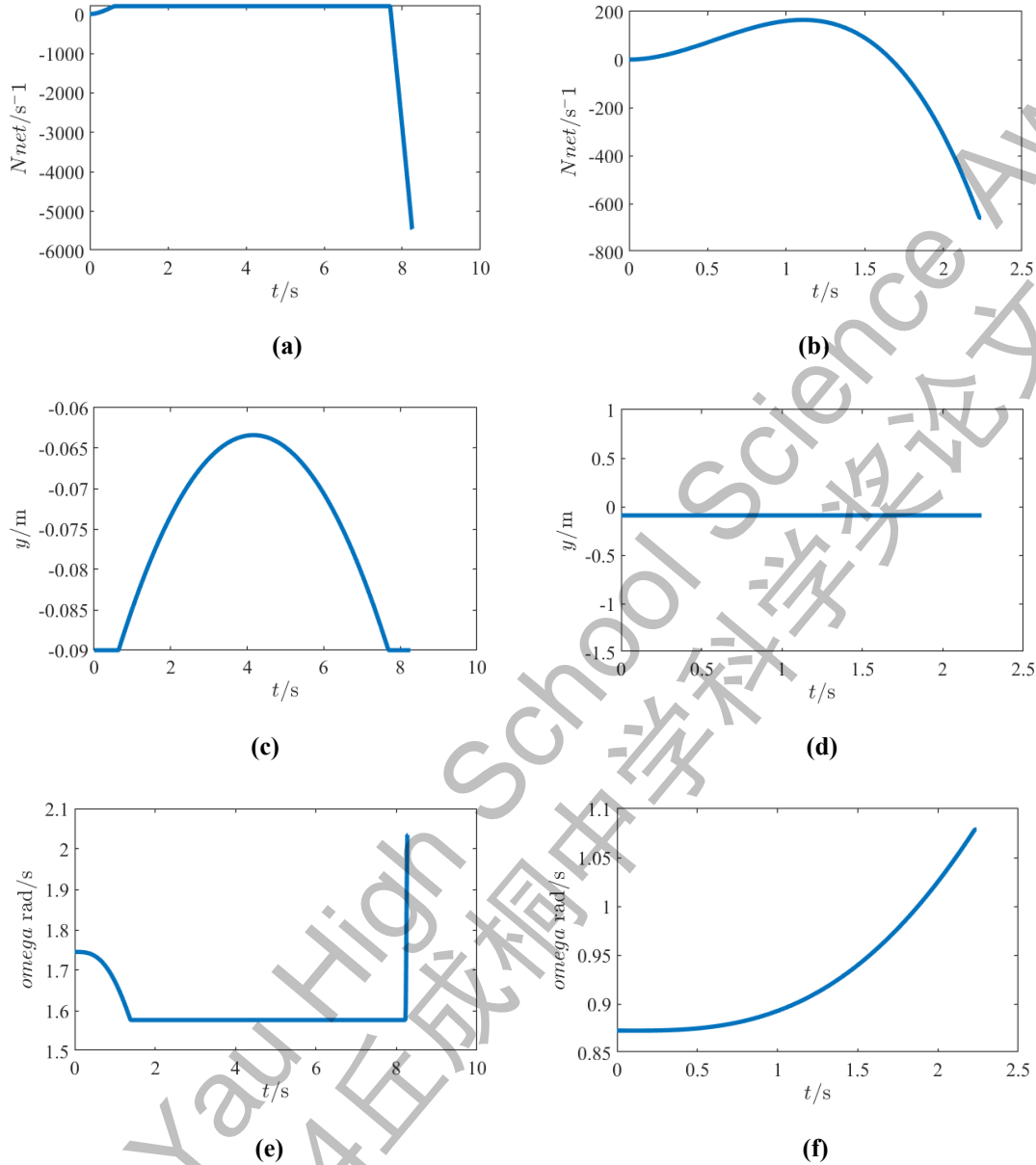


图 9 求解得到的将平动与转动结合的方程式(27)的图像。在本图中,我们采取的参数为:小球密度 $\rho_c = 1.2\text{g/cm}^3$,小球半径 $R_c = 0.01\text{m}$,气泡半径 $R_b = 0.0006\text{m}$,初始气泡量设为1000个。通过式 13 计算出 $\theta_b = 2R_b/(R_c + R_b) = 0.21^\circ$, $N_{width} = 25$ 。其中图(a),图(c),图(e)展示了初始角加速度为 10rad/s^2 ;图(b),图(d),图(f)展示了初始角加速度为 1rad/s^2 。

图 9 中 N_{net} 表示单位时间内在半径为 0.01m 的小球上生成的气泡个数, y 表示小球的竖直方向位置, ω 表示小球旋转的角速度。图 9(a),图 9(c),图 9(e)分别代表初始角速度为 10rad/s 时的生成个数,竖直位置和角速度,图 9(b),图 9(d),图 9(f)分别代表初始角速度为 1rad/s 时的生成个数,竖直位置和角速度。程序设置的初始气泡数量如式 12 所示的 $N_{threshold}$,正好可以支撑小球悬浮,当小球上的气泡数量再次达到此值时停止计算,观察此时每秒气泡破生成的变化率的正负可以得出接下来小球的沉浮。

可以看出，当微扰较大时，小球会直接脱离液面开始下沉，单位时间内气泡总增量保持为小球表面积上单位时间内的成核率，新形成的气泡产生回转力矩，使小球角速度减小。与此同时小球变加速上升直至再次碰到表面。碰撞瞬间小球的角速度因为新生成和新破裂气泡造成的力矩不平衡而产生突变，造成大量气泡破裂，产生新的力矩，小球将又开始下沉。而对于微扰较小的情况，初始气泡量足以让小球留在液体表面，气泡的生成速率大于破裂速率，因此小球表在轻微转动后面将很快重新被气泡布满。但由于新的气泡生成时的力矩会使小球持续转动，导致更多气泡破裂，加速小球的转动，从而使气泡数量达到初始值，并再次开始下沉。

该模拟程序目前也有一些我们正在改进的不足之处：第一，我们忽略了一些精细的计算，如小球悬浮过程中新生成气泡带来的角速度变化，而将该力矩变化集中呈现在了小球重新触及液面时的净角加速度带来的气泡量变化上。这样做一是为了节省算力，二是因为在转动部分的模拟程序中已经精细给出了小球旋转角度，角速度和角加速度在不同情况下的数值解。第二，程序也没有模拟小球在容器底部时旋转导致的气泡破裂，而是在限制了小球的竖直方向运动的同时使其表面的气泡量只受成核率控制，直至气泡量达到 $N_{threshold}$ ，足以再次托举小球上升。这样做是因为我们并未细致研究不同边界条件（类似研究关于玻璃与水面因为材质不同导致的边界条件变化，或者是研究在某个状态下是否稳定平衡）给小球的转动带来的不同影响，于是为了简化程序，我们忽略了小球在容器底部时的气泡破裂。

3 定量实验与检验

3.1 实验装置

如图，我们使用了底半径 $r = 3.5\text{cm}$ ，容积为300mL的烧杯，并将其中汽水液面的高度控制在9cm，并用30帧/s的Ipad pro内置摄像头记录了半径为5mm，质量为0.6g的树脂小球的平动和转动行为。



(a)



(b)

图 10 (a)利用游标卡尺精确测量不同小球的半径。(b)利用固定机位录制视频以得到不同数据测定了小球的竖直方向位置和转动角度。

对于小球的平动行为，我们直接追踪小球的球心位置。对于小球的转动行为，我们在小球上用马克笔进行了如图 10(a)的标记，每隔 1 帧用量角器测量其与过球心水平直径之间的夹角，从而计算出小球转动的角度和角速度。当然此方法忽略了录像时转轴不完全与视线平行导致的测量误差，在此后的研究中我们会继续改良角度和角速度的测量方法。(其他测量图像见附录)

3.2 实验过程

3.2.1 巧克力材料到塑料小球的转变

我们利用水浴法加热固体巧克力后，将已经融化的巧克力滴进模具，并在冰箱内冷却，从而得到了巧克力球，但是在后续实验中我们发现：

- (1) 因为巧克力固体不只有一种分子排布，在不同温度的状态下融化后凝固会产生不同的状态，这些不同的分子排布在实验上会导致巧克力不成型，或者因为巧克力表面性质不同，气泡不在巧克力球体表面上生成。可可脂的熔点很低，且微溶于水，所以巧克力在水中沉浮时，表面性质可能会发生变化。
- (2) 因为巧克力球的大小较小，在制备巧克力球时通常在中间有难以消除的气孔，从而导致巧克力小球的质心偏移。
- (3) 巧克力小球的模具不是一个完全的球，而是一个球台，也会导致质心偏移。

基于上述原因，我们需要找到一个替代巧克力的材料以完成后续的定量实验。在先前论文[1]中，Spagnolie 等人运用了 PLA 塑料小球去替代巧克力去测定成核率 λ 。以此为启

发，我们探索了替代巧克力的密度相近的材料，最终利用了和巧克力密度相近的树脂材料进行以下试验。（下文中从 3.2.2 至 3.2.4 均利用半径为1cm，质量为17.22g，密度为 $\rho_c = 1.218\text{g/cm}^3$ 的软树脂进行定量实验。）

3.2.2 利用树脂小球的成核率测定

为了通过实验归纳气泡在树脂材质上的成核率随时间变化的函数，我们从汽水倒入烧杯开始计时，将一个半径为5mm的树脂小球每隔 30 秒放入气泡水一次，待其上升后取出，并记录其从放入到刚刚停止下沉的时间差。如下图 11 所示：

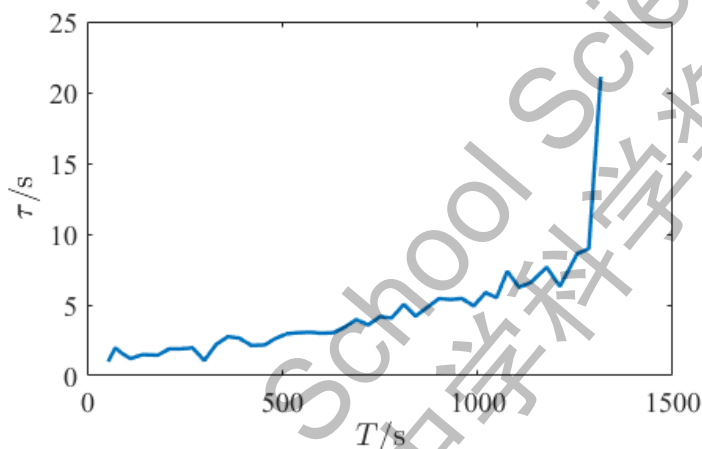


图 11 树脂小球从下沉到开始上浮需要的时间间隔 τ 随汽水放置时间 T 的变化图像。

我们通过该图像可以得到定性规律：小球从下沉到上浮期间所需的时间有整体上升趋势。而由于从下沉到上浮瞬间的特殊性，即在该时间差内气泡数量正好使浸没物受到的浮力等于其重力，于是我们利用受力平衡可以定量分析成核率的值。此方法相对于一些其他的测量宏观物体表面成核率的方法（如测量小球接触到液体表面时的露出水面的表面积[1]）的优越性在于从下降到开始上升的临界时间点相较于露出水面的表面积更好测量，且不需要考虑冲量带来的误差因素。

先讨论具体的测定成核率方法。由于该小球质量，表面积已知，则可以根据式(10)得到 $[N(t)/4\pi R^2]$ 的具体值。又知道气泡数从 0 增加到 $N(t)$ 的时间 Δt 已知，我们可以通过近似

$$\lambda = \frac{N(t)}{4\pi R^2 \Delta t} \quad (28)$$

拟合出成核率的曲线。因为小球的半径为 $R_c = 5 \times 10^{-3}\text{m}$ ，所以可以求得这个小球的表面积为 $S_c = 4\pi R_c^2 = 3.14 \times 10^{-4}\text{m}^2$ ，体积为 $V_c = 4\pi R_c^3/3 = 5.24 \times 10^{-7}\text{m}^3$ 。又因

为小球质量为 $m_c = 6 \times 10^{-4} \text{kg}$ ，所以其密度已知，为 $\rho_c = m_c/V_c = 1145.92 \text{kg/m}^3$ 。因 $\theta \equiv \rho_w/\rho_c = 0.873$ 。小球反向时单位面积上的气泡个数应当为

$$N(t) = (1 - \theta)R_c/3\theta\bar{V} = 2.68 \times 10^5 \text{ m}^{-2} \quad (29)$$

（代入小球本身的表面积，在小球上的气泡约 84 个）。根据成核率 $\lambda = N(t)/\Delta t$ ，利用 MATLAB 拟合工具箱进行拟合过后，我们发现成核率呈指数形式递减，其拟合公式为 $R = a \cdot \exp(bt)$ ，其中 $a = 2.309 \times 10^5$ ， $b = -1.62 \times 10^{-3}$ 。采用方差 $SE = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - R_{\text{fitted}})^2}$ 为误差值后，我们以蓝色圆圈将拟合结果绘制在图 12 中。

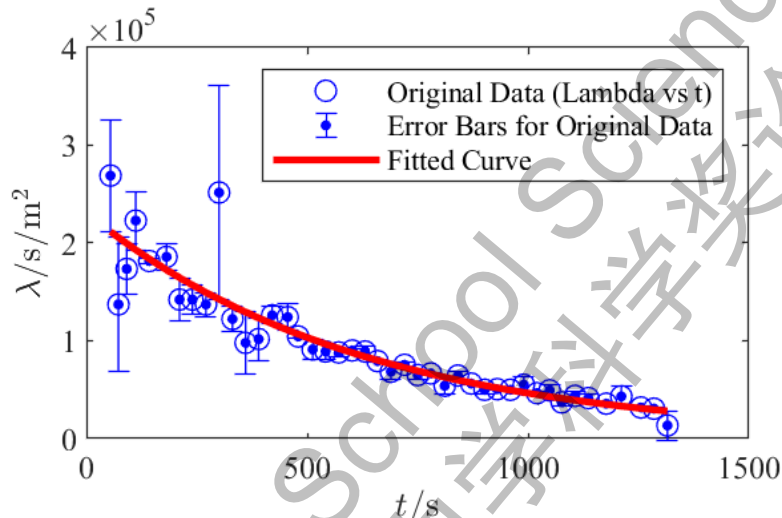


图 12 拟合曲线和实验数据的对比图像。

拟合函数的决定系数 R^2 等于 0.83471，接近于 1，说明拟合图像解释了超过 83% 的数据点，具有很高的拟合程度。

3.2.3 树脂小球的平动运动情况

根据小球在前 100s 的运动情况，我们绘制出了下面的树脂小球的运动情况（展示于图 13 和图 14）。我们对两幅图进行了较为明显的区分。图 13 是小球主要为“半沉浮”状态：因为成核率较大，小球会在下降途中转为上升，因而小球不会沉底。而图 14 主要为“全沉浮”状态：小球在运动到杯底后，没有立即上升。在经过了一段时间

后，由于气泡体积增大，小球上浮，并且下沉-上浮的行为非常规律。

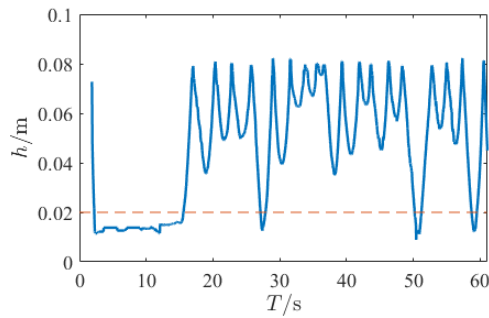


图 13 树脂小球高度随时间的半沉浮变化。

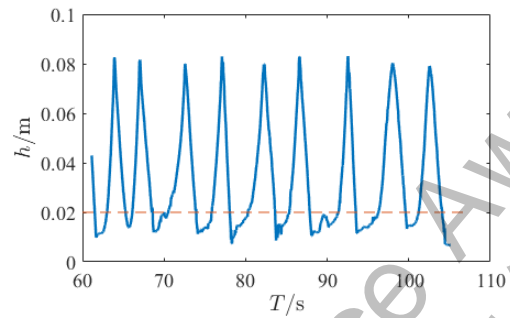
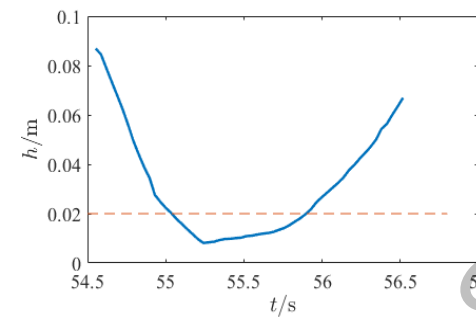
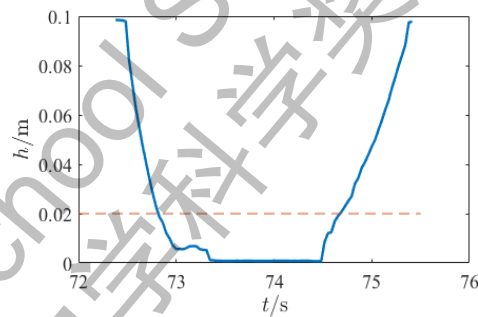


图 14 树脂小球高度随时间的全沉浮变化。

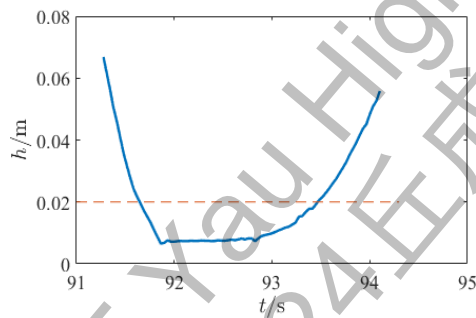
当我们关注到树脂小球的单次沉浮时，如图 15 所示，在小球静止放入气泡水中时，其运动轨迹为先下降后上升，并且随着时间的推移，小球从下沉到上浮的时间间隔越来越长。时间间隔的增长也说明了关于成核率推断的合理性。



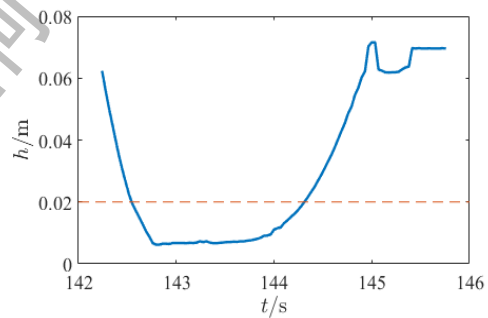
(a)



(b)



(c)



(d)

图 15 (a) 第 55 秒上下小球单次沉浮的高度 h 随时间 t 变化的图像。(b) 第 72 秒上下小球单次沉浮的高度 h 随时间 t 变化的图像。(c) 第 91 秒上下小球单次沉浮的高度 h 随时间 t 变化的图像。(d) 第 142 秒上下小球单次沉浮的高度 h 随时间 t 变化的图像。

3.2.4 树脂小球的转动情况

对于小球在液体表面时的转动，我们挑选了至少在液体表面旋转半圈并且水平移动不明显的情况，并且将 TRACKER 内的坐标轴原点设置在这个小球的球心，通过打每一帧在这个球上标注的固定点，可以得到角度图 16(a)(b)和角速度图 16(c)(d)关于时间的函数：

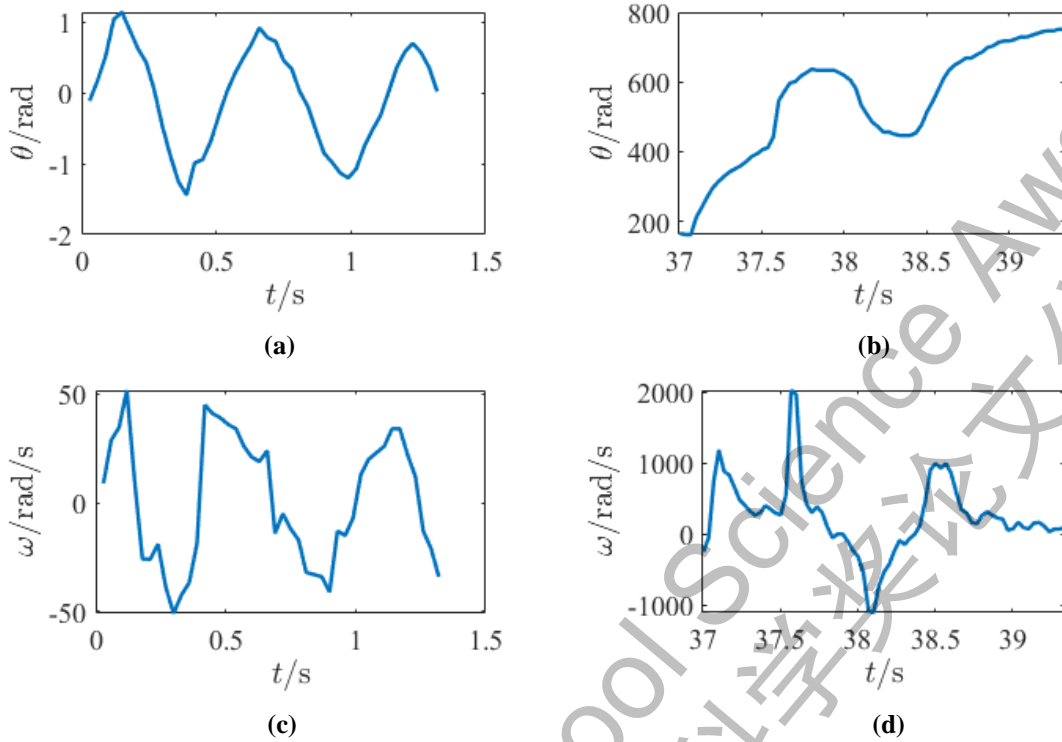
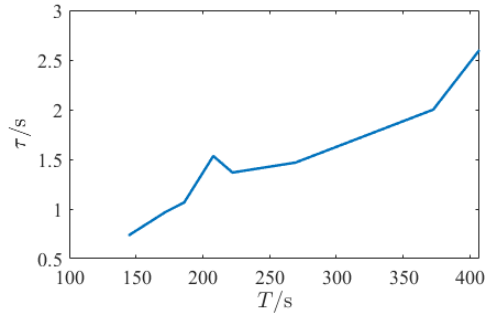


图 16 (a)(b) 展示了在同一次实验中，同一个小球在两个随机的初始转动角度下的转动角度随时间的变化关系。(c)(d) 展示了在同一次实验中，同一个小球在两个随机的初始转动角度下的转动角速度随时间的变化关系。

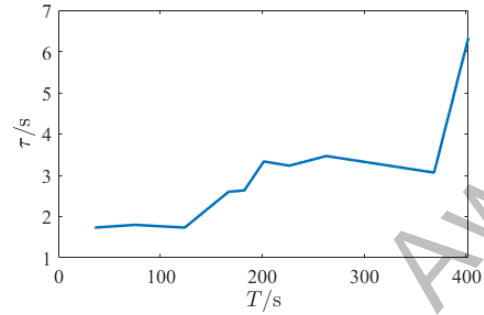
不难发现，在两个小球产生转动的时间段内，其转动的角度和角速度分别进行了不同程度的增高与降低而并非一个单调函数，这恰好证明了上文数值解的关于净破裂量的微分方程中对于旋转时的巧克力角度和角速度的预测，即一个有周期的函数。说明了上文的预测的合理性。

3.3 表面材质对小球沉浮的影响

利用不同半径和不同材质的树脂小球，可以验证理论中对于小球半径和小球材质的不同对成核率的影响，图 17 为利用不同半径小球和不同材料小球的控制变量实验得出来的数据：



(a)



(b)

图 17(a)半径为 0.5cm, $\rho_c = 1.218\text{g/cm}^3$ 的软树脂小球下沉到上浮需要的时间间隔 τ 随汽水放置时间 T 的变化图像。(b)半径为 1cm, $\rho_c = 1.157\text{g/cm}^3$ 的韧性树脂下沉到上浮需要的时间间隔 τ 随汽水放置时间 T 的变化图像。

从图像中可以得出,

(a)相同材质下, 半径较小的球需要较少时间达到上浮状态, 从而得到从下沉到上浮的时间间隔与半径成反比关系。

(b)相同半径下, 不同的材质因其表面原因, 从下沉到上浮的时间间隔会有较大差异。

4 总结与展望

本文探究球在汽水中运动的性质和其影响因素, 包括了对于球本身在汽水内部的下沉以及上浮影响因素和球在液面时的旋转带来的浮力变化, 确定可测得常数例如球体表面积等, 定义气泡成核率 λ 分析了平动和转动的动力学过程。对于平动部分, 本文主要定义了密度比 θ 以方便表示巧克力下沉和上浮的条件, 得到了相关的平动动力学方程。对于转动部分, 本文以一个气泡破裂为例子得到了气泡破裂导致的力矩变化, 从而影响到巧克力的角加速度的动力学方程, 并通过计算常数 θ_b 和 β , 得到了对应的气泡带所占宽度; 然后, 本文探究了连续气泡破裂, 通过表示破裂气泡产生的力矩求和而得出的角加速度, 考虑重新生成需要带来的回转力矩后, 可以得到净瞬时角加速度的表达式, 代入 MATLAB 内得到关于角速度, 角加速度, 角位移的精确图像。

在实验中, 本文用树脂小球替换巧克力球进行更为可控的定量研究。实验发现树脂小球与巧克力的沉浮有相似规律, 且可重复性更高。我们完成了对成核率 λ 的测量, 以及小球运动、转动规律的定量视频打点分析, 结果与理论部分符合良好。

本文主要探究巧克力以及其相似物品在气泡水内的运动行为, 忽略了例如温度梯度可能造成的气泡大小影响, 气泡本身的融合性质等我们认为不那么重要的影响因素, 并给出了一个理论和实验自洽的方程, 利用实验复现了在理论中的预测。但由于这一问题所具备的复杂性, 本文的研究还不足以描述整个系统运动的所有特征, 包括对于临近液面时液体对小球的表面张力影响, 以及气泡在形成过程中的半径变化, 掉落和合并问题,

不同材料的成核率测定等。今后将继续关注对于本文暂未提及的次要影响因素，并继续完善本文对于开放气-固耦合系统运动的研究。

参考文献

- [1] Spagnolie, S.E., Christianson, S. and Grote, C. Levitation and dynamics of bodies in supersaturated fluids. *Nat. Commun.* **15**, 3910 (2024).
- [2] Zhang, A-Man, Shi-Min Li, Pu Cui, Shuaitong Li and Yunlong Liu. A unified theory for bubble dynamics. *Physics of Fluids* **35**, 033323 (2023)
- [3] Scriven, L. E. On the dynamics of phase growth. *Chem. Eng. Sci.* **10**, 1 (1959).
- [4] Sparks, R. S. J. The dynamics of bubble formation and growth in magmas: a review and analysis. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* **3**, 1 (1978).
- [5] Soto, Á. M., Maddalena, T., Fraters, A., Van Der Meer, D. and Lohse, D. Coalescence of diffusively growing gas bubbles. *J. Fluid Mech.* **846**, 143 (2018).
- [6] Lubetkin, S. and Blackwell, M. The nucleation of bubbles in supersaturated solutions. *J. Colloid Inter. Sci.* **126**, 610 (1988)
- [7] Sear, R. P. Nucleation: theory and applications to protein solutions and colloidal suspensions. *J. Phys.: Condens. Matter.* **19**, 3 (2007)

致谢

从开题到如今即将结题，近半年时光转瞬即逝。本文从选题到完成研究过程的分工如下：杨云屹在本次研究的初始时期提出了对于实验现象的一种解释与计算方法，并完成了所有实验数据处理与绘图，主导了以巧克力，不同树脂等材料的小球为观测对象的定量实验，并在后期承担了论文的部分修改工作。罗海艺在本次研究中在理论部分完成了对于小球在汽水中的成核率和平转动理论推导，撰写了所有的数值模拟程序，并提出了一种新的测定气泡成核率的方法；在实验中她对不同形状与材质的浸没物进行了建模和制作，并利用它们协助进行了关于成核率测定，平动，转动速率测定以及平转动结合的频率测定的定性，定量实验；在论文部分她完成了第一，二部分的撰写。

在本文接近尾声时，我们诚挚地向所有给予我们帮助的人士致以谢意。首先，我们要感谢我们的指导老师张程鑫老师。当我们发现了巧克力在汽水中的不规则运动时，张老师十分支持我们对于这个新奇现象进行更加细致的研究。得益于老师深厚的理论功底与扎实的动手能力，我们在这次科学研究中学习到了很多。从在烧杯内放置直尺以消除汽水和烧杯的畸变效应，到建议我们使用不同的材料以更好的说明理论的正确性，张老师孜孜不倦地指导我们，让我们学习到了系统性的科学研究方法，为我们将来的学习道路奠定了坚实的基础。

最后，我们要感谢我们的父母为我们的研究提供的支持——正是因为他们的资金支持，我们才有机会能够购买不同半径和材料的小球以得到多组实验数据；正是因为他们的支持与鼓励，我们才能顺利地完成本次研究与本文的撰写。

结尾之际，也感谢重庆育才中学的全体老师们与同学们对我们的关心与鼓励。正是因为大家的支持，我们才能坚持下去，以高标准完成本次研究。

附录

A1 测量不同的小球的直径和摄制运动图像的照片

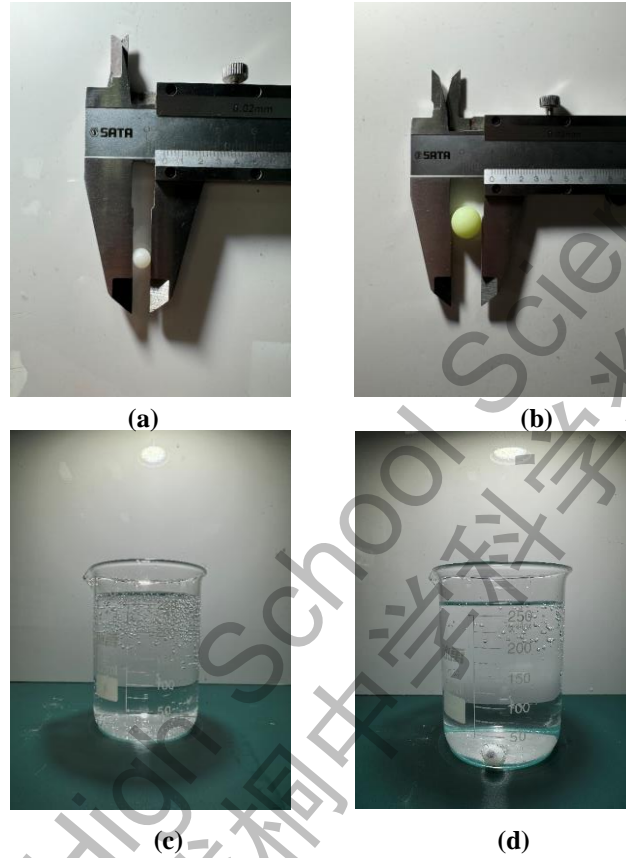


图 18(a)测量小软树脂球的直径(b)测量韧性树脂球的直径(c)固定的汽水高度(d)运用带记号的小球测量其角度变化

A2 气泡大小的测定

为了测定气泡大小，并且考虑到弧形烧杯壁以及水的放大率问题，我们选择了利用直尺上的刻度作为定标杆，测量在直尺上不同的气泡半径以得到一个气泡半径的平均值，再利用气泡半径平均值可以得到一个气泡的平均体积。

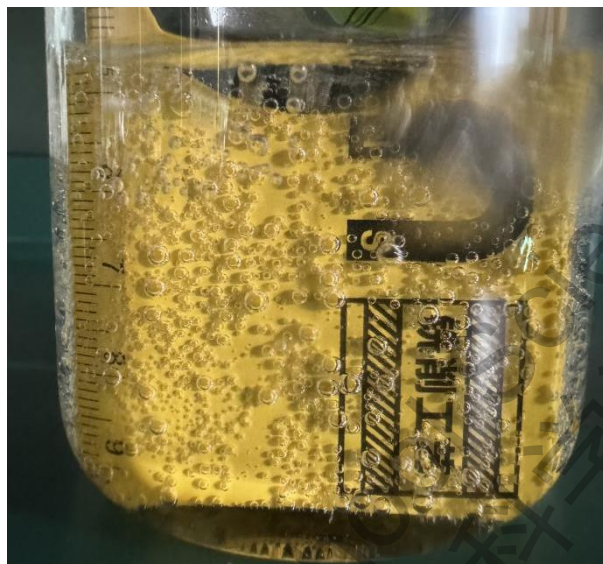


图 19 通过固定直尺测量气泡平均半径。

我们一共测量了 20 个气泡的半径，分别如图所示

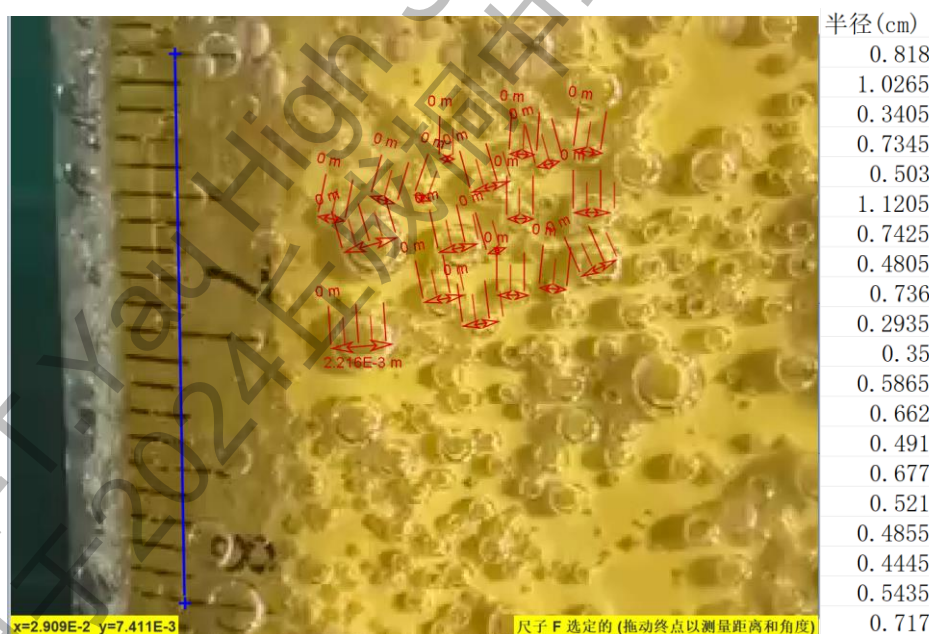


图 20 将尺子放入气泡水中的半径测量结果。

求其平均值约等为 $R_b = 6 \times 10^{-3} \text{m}$ ，计算出气泡平均体积 $\bar{V} = \frac{4\pi R_b^3}{3} = 9 \times 10^{-7} \text{m}^3$ 。

A2 转动部分 MATLAB 求解代码

```
clc;
clear;
close all;

% 定义常量
Mc = 0.001; % 巧克力的重量, KG
Rc = 0.005; % 一个巧克力的半径
Rb = 0.0005;
theta0 = 0.1; % 第一个气泡破裂的角度
thetab = 0.06; % 一个气泡所占角度
Sb = Rb^2; % 一个气泡的占地面积
Ic = (2/5) * Mc * Rc^2; % 巧克力转动惯量
s = 1; % 假设一个常数 s
n = 4; % 气泡带的宽度
rouC = 1.2; % 巧克力浓度
rouw = 1; % 水的密度
S0 = 1.66;
Smc = 0.002;
Tr = 2172; % 36.2min=这么多秒
chi = 2.5;
lambda0 = 58.4;
Vb = 4*pi*Rb^3/3;
g = 9.81;
Fb = Vb * g; % 一个泡泡的力, N
Tb1 = -Fb * cosd(theta0) * Rc; % 第一个气泡的力矩

% 将参数封装到结构体中
params.Tb1 = Tb1;
params.Ic = Ic;
params.Fb = Fb;
params.thetab = thetab;
params.Sb = Sb;
params.s = s;
params.theta0 = theta0;
params.n = n;
params.Rc = Rc;
params.rouC = rouC;
params.rouw = rouw;
params.g = g;

% 计算 Nthresh 并添加到 params 结构体中
```

```

params.Nthresh = 84;

% 定义时间范围和初始条件
tspan = 0:0.01:10;
Theta0 = [0; 0; 0; 0; 1; 1; 0]; % 初始条件: Theta(1)到 Theta(6)都初始化为 0
% 1.Nbreak 带来的 theta break
% 2.Nbreak 带来的角速度
% 3.Nnew 带来的 Thetanew
% 4.Nnew 带来的角速度
% 5.总的角位移
% 6.总的角速度

Rt = @(t) 2.309E5 * exp(-0.001617 * t);
Rt_int = cumtrapz(tspan, Rt(tspan)); % 计算 Rt 从 0 到 t 的积分

% 设置绝对和相对求解精度
options = odeset('RelTol', 1e-9, 'AbsTol', 1e-12, 'Events', @(t, Theta) events(t, Theta, params));

% 使用 ode45 求解微分方程
[t, Theta] = ode45(@(t, Theta) f(t, Theta, params, Rt_int, tspan), tspan, Theta0, options);

% 确保 t 和 Rt_int 的大小一致
Rt_interp = interp1(tspan, Rt_int, t);
Nnet = Theta(:, 5) / thetab .* (1 - Rt_interp .* Sb / thetab ./ (1 + Rt_interp .* Sb));

% 检查计算结果
disp('t:');
disp(t);
disp('Theta:');
disp(Theta);
disp('Rt_interp:');
disp(Rt_interp);
disp('Nnet:');
disp(Nnet);

% 绘制图形
figure;
hold on;
plot(t, Theta(:, 7), 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Nnet');
xlabel('Time (s)');
ylabel('Nnet (个)');
title('Nnet vs. Time');
legend;
grid on;

```

hold off;

```
function dThdt = f(t, Theta, params, Rt_int, tspan)
```

```
Tb1 = params.Tb1;
```

```
Ic = params.Ic;
```

```
Fb = params.Fb;
```

```
thetab = params.thetab;
```

```
Sb = params.Sb;
```

```
s = params.s;
```

```
theta0 = params.theta0;
```

```
n = params.n;
```

```
Rc = params.Rc;
```

```
rouC = params.rouC;
```

```
rouw = params.rouw;
```

```
% 插值计算 Rt_int
```

```
R_integral = interp1(tspan, Rt_int, t, 'linear', 'extrap');
```

```
dThdt = zeros(7, 1);
```

```
dThdt(1) = Theta(2);
```

```
dThdt(2) = Tb1 * n / Ic + Fb * n / Ic * (sind((Theta(5) + thetab) / 2) * sind(Theta(5) / 2) /  
sind(thetab / 2));
```

```
dThdt(3) = Theta(4);
```

```
dThdt(4) = Fb / Ic * n * (-cosd(-thetab / 2 * (R_integral .* (Sb * (Theta(1) / Ic) / (1 +  
R_integral * Sb)))) - thetab + Theta(5)) / ...  
(2 * sind(-thetab / s));
```

```
dThdt(5) = Theta(6);
```

```
dThdt(7) = Theta(5) / thetab * (1 - R_integral * Sb / thetab ./ (1 + R_integral * Sb));
```

```
if Theta(7) < 0
```

```
    dThdt(6) = 0;
```

```
else
```

```
    dThdt(6) = dThdt(2) + dThdt(4);
```

```
end
```

```
end
```

```
function [value, isterminal, direction] = events(~, Theta, params)
```

```
Nthresh = params.Nthresh;
```

```
% 定义事件函数
```

```
Ntot = Theta(7);
```

```
value = [Ntot - Nthresh; Ntot]; % 当 Ntot 达到 Nthresh 或者小于 0 时触发事件
```

```
isterminal = [1; 1]; % 停止积分
```

```
direction = [0; -1]; % 触发方向为任意方向
```

```
end
```

A3 综合平动与转动的 MATLAB 求解代码

```
clc;
clear;
close all;

% 定义常量
Mc = 0.001; % 巧克力的重量, KG
Rc = 0.005; % 一个巧克力的半径
Rb = 0.0005;
theta0 = 0.1; % 第一个气泡破裂的角度
thetab = 0.06; % 一个气泡所占角度
Sb = Rb^2; % 一个气泡的占地面积
Ic = (2/5) * Mc * Rc^2; % 巧克力转动惯量
s = 1; % 假设一个常数 s
n = 4; % 气泡带的宽度
rouc = 1.2; % 巧克力浓度
rouw = 1; % 水的密度
% S0 = 1.66;
% Smc = 0.002;
Tr = 2172; % 36.2min=这么多秒
% chi = 2.5;
% lambda0 = 58.4;
Vb = 4*pi*Rb^3/3;
g = 9.81;
Fb = Vb * g; % 一个泡泡的力, N
Tb1 = -Fb * cosd(theta0) * Rc*5; % 第一个气泡的力矩 (微扰大概的大小)
phi = rouw / rouc;
eta = 1.1E-3; % 粘滞系数
max = 4*pi*Rc^2/Sb;
% 将参数封装到结构体中
params.Tb1 = Tb1;
params.Ic = Ic;
params.Fb = Fb;
params.thetab = thetab;
params.Sb = Sb;
params.s = s;
params.theta0 = theta0;
params.n = n;
params.Rc = Rc;
params.rouc = rouc;
params.rouw = rouw;
params.g = g;
params.phi = phi;
```

```

params.eta = eta;
params.Vb = Vb;
params.Nthresh = 84;
params.max = max;

% 定义初始条件
tspan = 0:0.01:30; % 初始时间范围
Theta0 = [0; 0; 0; 0; 0; 100; 0; -0.09; 0; 0; 0];
% 1.Nbreak 带来的 theta break
% 2.Nbreak 带来的角速度
% 3.Nnew 带来的 Thetanew
% 4.Nnew 带来的角速度
% 5.总的角位移
% 6.总的角速度
% 7.总的破裂量

% 定义 Rt 函数
Rt = @(t) 2.309E5 * exp(-0.001617 * t);
Rt_integral = cumtrapz(tspan, Rt(tspan)); % 计算 Rt 从 0 到 t 的积分

% 初始化 Theta 和 Nnet 变量
% Theta = Theta0;
% Nnet = [];

% 检查是否有足够的数据进行绘图
% 设置绝对和相对求解精度
options = odeset('RelTol', 1e-9, 'AbsTol', 1e-12);
% 使用 ode45 求解微分方程
[t, Theta] = ode45(@(t, Theta) f(t, Theta, params), tspan, Theta0, options);

%%
%判断是否 Theta(:,7)积分是否小于 0
Theta7 = Theta(:,7);
D = zeros(1,1000);
for i = 1:1000
D(i+1) = D(i)+Theta7(i);
end
position = find(D < 0, 1);

```

```

% 不判断
% position = length(tspan);
%%

% 绘图
figure;

plot(tspan(1:position), Theta(1:position,7), 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Nnet');
xlabel('$t$/s','interpreter','latex')
ylabel('$Nnet \ \mathrm{s}^{-1}$','interpreter','latex')
set(gca, 'FontSize',9,'FontName','Times New Roman')
set(gcf,'unit','centimeters','position',[10,10,8.5,8.5/1.618])
hold on;

plot(tspan(1:position), Theta(1:position, 8), 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'y');
xlabel('$t$/s','interpreter','latex')
ylabel('$y$/m','interpreter','latex')
set(gca, 'FontSize',9,'FontName','Times New Roman')
set(gcf,'unit','centimeters','position',[10,10,8.5,8.5/1.618])
hold on;

plot(tspan(1:position), Theta(1:position, 6)*pi/180, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'y');
xlabel('$t$/s','interpreter','latex')
ylabel('$\omega$ rad/s','interpreter','latex')
set(gca, 'FontSize',9,'FontName','Times New Roman')
set(gcf,'unit','centimeters','position',[10,10,8.5,8.5/1.618])
hold on;
%%

%% 事件函数：检测 y(1) 何时达到 -0.09
% function [value, isterminal, direction] = event_y_reaches_threshold(~, y)
% value = y(1) + 0.09; % 事件条件
% isterminal = 1; % 事件发生时停止
% direction = 0; % 检测下降的方向,0 是两边都可以的意思
% end

% Theta 方程的微分方程
function dThdt = f(t, Theta, params)
Tb1 = params.Tb1;
Ic = params.Ic;

```



```

Fb = params.Fb;
thetab = params.thetab;
Sb = params.Sb;
Rc = params.Rc;
n = params.n;
s = params.s; % 使用 params.s 传递的 s 变量
Vb = params.Vb;

%% 将 Rt_integral1 转换为 t 的函数
% 方式 1
% tspan = 0:0.01:t;
% Rt = @(a) 2.309E5 * exp(-0.001617 * a);
% Rt_integral1 = max(cumtrapz(tspan, Rt(tspan)));
% 方式 2
Rt_integral1 = (-2.309E5/0.001617)*exp(-0.001617 * t)-(-2.309E5/0.001617)*exp(-0.001617 * 0);

%%
dThdt = zeros(11, 1); % 初始化

% Theta3 对应 Nnew 带来的角位移, Theta4 为角速度。气泡不管在液面还是液面以下都会不断
% 生成, 所以不需要条件判断
dThdt(3) = Theta(4);
dThdt(4) = Rt_integral1*(4*pi*Rc^2)*Vb*1000;
% Theta1 对应 Nbreak 产生的角位移, Theta2 对应其角速度
% 如果浸没物已经在液体顶端 (-0.09m, 取向向下为正), 才以转动的公式计算它, 否则设其为
% 0, 因为这是转动不会导致气泡破裂
dThdt(1) = Theta(2);
if Theta(8) < -0.09
dThdt(1) = 0;
dThdt(4) = squeeze(Fb*Rc / Ic * n * (-cosd(-thetab / 2 * (Rt_integral1 .* (Sb * (Theta(1) ./ Ic) ./ (1 +
Rt_integral1 * Sb)))) - thetab + Theta(5)) ./ ...
(2 * sind(-thetab ./ s)));
dThdt(7)=(dThdt(2)-dThdt(4))/thetab;
else
dThdt(7) = -Rt_integral1*(4*pi*Rc^2)*Vb*1000;
dThdt(2) = Tb1 .* n ./ Ic + Fb .* n *Rc./ Ic * (sind((Theta(5) + thetab) ./ 2) * sind(Theta(5) ./ 2) ./
sind(thetab ./ 2));
end

% Theta5 对应总的角位移, Theta6 对应净角速度, Theta7 是总的破裂的气泡数量 (Nbreak-
Nnew)
dThdt(10)=Theta(5);
dThdt(5) = Theta(6);
if Theta(8) <= -0.09

```

```

dThdt(7) = Theta(5) ./ thetab * (1 - Rt_integral1 * Sb ./ thetab ./ (1 + Rt_integral1 * Sb));
else
dThdt(7)= 0;
end
max = params.max;
Rt = 2.309E5 * exp(-0.001617 * t);
%如果说总破裂量小于等于 0, 说明气泡已经布满了, 那么新的气泡将不在生成, Nnew 带来的
角加速度 dThdt(4)也就为 0
%反之净角加速度等于破裂和生成加速度相加
dThdt(11)=Theta(7);
if Theta(11) <= 0
dThdt(3) = 0; % 气泡已经布满了
dThdt(7)=-dThdt(2)/thetab*Sb*Rt;
elseif Theta(11)<=200
dThdt(6) = -dThdt(2) - dThdt(4);
else
dThdt(5)=0;
end

phi = params.phi;
Rc = params.Rc;
eta = params.eta;
g = params.g;
Vb = params.Vb;
rouc = params.rouc;

% 使用 t 直接计算 Rt_integral
% Rt_integral = integral(@(t_var) Rt(t_var), 0, t);
%初始化
%Theta81 是竖直方向位移, 向下为正
%Theta92 书竖直方向速度, 向下为正
dThdt(8) = Theta(9);

%如果浸没物已经在液面了, 而且总破裂量少于 Threshold (超过这个量气泡提供的浮力将无法
支撑物体悬浮), 那么 y 保持不变
% 反之使用文中用到的公式计算
%如果说没有在液面(213 行始), 如果浸没物沉在底部且总气泡破裂量大于 threshold, 则纵向加
速度为 0
%反之按照公式计算 (1 - phi) * Rc / (3 * phi * Vb)
if Theta(8) <= -0.09 && Theta(7) < 200
dThdt(8) = 0;
elseif Theta(8) >=0 && Theta(7)> 200
dThdt(8)=0;
dThdt(11)=0;

```

else

$d\Theta/dt = (1 - \phi) * g - (5 * \eta / (2 * R_c^2 * \rho)) * \Theta - (2 * \phi * R_t_{integral1} * V_b * g) / R_c;$

end

end

2024 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2024丘成桐中学科学奖论文公示