

参赛队员姓名：赵欣苒

中学：上海市民办平和学校

省份：上海

国家/地区：中国

指导教师姓名：袁丽华

指导教师单位：上海市民办平和学校

论文题目：从理论建模到实验验证：琴弓预紧力对小提琴音质影响的系统研究

# 从理论建模到实验验证：琴弓预紧力对小提琴音质影响的系统研究

赵欣苒

## 摘要

本研究通过理论建模、有限元分析和实验验证，全面分析了琴弓预紧力对小提琴发声特性的影响。首先，我们建立了琴弓初始形状的数学模型，探讨了不同施力方式对琴弓形变的影响。通过该模型，我们能够准确预测琴弓在实际演奏条件下的形状变化，并为后续实验提供理论依据。

在材料特性方面，我们采用多目标遗传算法，结合有限元分析，优化了琴弓木材的杨氏模量。通过实验数据的校准和验证，确定了在不同预紧力下琴弓的最佳材料参数，并揭示了杨氏模量与琴弓发声性能之间的关联。

实验部分着重分析了不同预紧力对小提琴音色和音准的影响。研究表明，预紧力的增加虽然对主频的影响较小，但显著改变了谐波的振幅和频率，从而影响了小提琴的音色。同时，过高或过低的预紧力会导致演奏过程中琴弓的可控性下降，影响演奏的稳定性。

展望未来，我们计划进一步研究不同类型琴弓在发声可重复性方面的表现，并探讨如何将本研究中获得的预紧力和材料模型与弓毛和弓弦的发声模型相结合。此外，我们还计划开发新的实验技术，实时监控弓弦的振动情况，并构建一个整合琴弓、弓弦与琴体动态相互作用的完整声学模型。通过这些研究，我们期望为小提琴的设计和演奏提供更科学的指导，并提升乐器的整体演奏性能。

**关键词：** 初始形状，材料特性，预紧力，音色，演奏可重复性

# 目录

第一章 引言	1
1.1. 小提琴声学原理	1
1.2. 研究背景	2
1.3. 经典研究回顾	2
1.4. 研究展望	3
第二章 琴弓初始形变的研究	4
第三章 力与位移的实验台的搭建	12
3.1. 实验装置	12
3.2. 装置组成	13
3.3. 数据采集	15
3.4. 实验准确性分析	16
第四章 用实验分析小提琴的机械性能	19
4.1. 琴弓杨氏模量的确定	19
4.2. 计算琴弓的预紧力	22
4.3. 模态分析	24
第五章 不同预紧力对小提琴音色的影响	26
5.1. 实验设计与数据采集	26
5.2. 数据处理与频谱分析	26
5.3. 主频与谐波的影响分析	27
5.4. 不同预紧力对琴声的影响	29
5.5. 可重复性分析	30
5.6. 结论	31
第六章 结论和展望	32
6.1. 主要结论	32
6.2. 主要创新点	32
6.3. 展望	33
参考文献	34
致谢	35

## 第一章 引言

小提琴以其独特的音色和丰富的情感表达，在音乐世界中展现了无与伦比的魅力。而这一切的背后，离不开一个至关重要的工具——琴弓。琴弓不仅仅是小提琴的配件，更是音乐家与乐器之间沟通的桥梁，通过它传递情感并诠释作曲家的意图。然而，在学习小提琴的过程中，如何精确控制琴弓与琴弦之间的相互作用，是所有演奏者必须面对的挑战。如何精准地控制琴弓施加在琴弦上的力量，从而使小提琴的音色达到最佳效果？这一问题引发了我的兴趣，并成为本研究的核心议题：琴弓的特性如何影响演奏时的音色控制，即小提琴的可拉性？

我们已知，当琴弓拉动琴弦时，会产生交替出现的粘连与摩擦的过程，从而促使琴弦振动。[1]当振动频率与琴弦的固有频率一致时，会产生显著的横向波动，这些波动进一步激发琴体的振动。由此可见，小提琴的发声与琴弓在琴弦上的粘连情况、摩擦力的大小及摩擦产生的振动频率等因素密切相关。因此，本研究旨在探讨琴弓与琴弦的物理特性，并总结小提琴的可拉性与音色之间的关系。

为了深入理解这一问题，首先必须理解小提琴产生声音的物理原理。简单来说，小提琴是一个木制的音箱，作为声学放大器，将琴弦的振动能量转化为琴体的振动（见图 1.1）。当琴体振动时，会引发周围空气分子的运动，导致空气压力变化，这种声波最终被我们的耳朵捕捉并解读为声音。[2]

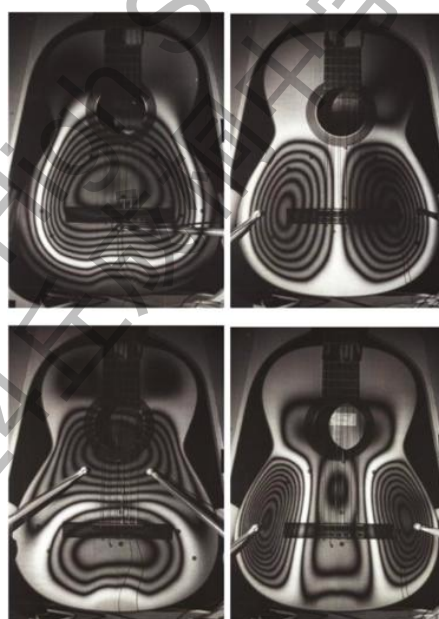


图 1.1: 琴体在不同频率下的振动形状

### 1.1. 小提琴声学原理

小提琴发声的关键在于琴弦的振动。那么，琴弦的振动是如何产生的呢？当琴弓在琴弦上滑动时，会产生粘连与摩擦的交替作用，从而引发琴弦的振动[3]。当振动频率与琴弦的固有频率匹配时，会产生显著的横向波动，这些波动进一步激发琴体的振动[4]。最终，这些复杂的波动通过琴体传递至空气中，形成我们所听到的声音。

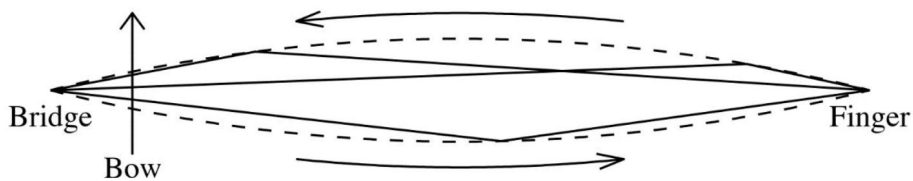


图 1.1.1: 小提琴琴弦的横波运动

## 1.2. 研究背景

小提琴的发声与琴弓在琴弦上的粘连情况、摩擦力的大小及其引发的振动频率密切相关。在本研究中，我们将分析琴弓和琴弦的物理特性，并总结演奏中的可拉性与小提琴音色之间的关系。

早期的研究已经对小提琴的发声原理进行了广泛探讨，认为小提琴的发声与琴弓在琴弦上的运动密切相关。琴弦振动的基本原理在于通过琴弓与琴弦之间的粘滑摩擦，产生自持续的振荡。这一过程可以用运动方程来描述，该方程包含三个部分：波动方程、非线性弯曲项和手指项。波动方程描述了琴弦的运动特性，非线性弯曲项反映了施加摩擦力的大小，手指项则反映了作用于单点上的粘性阻力。

## 1.3. 经典研究回顾

最早研究这一现象的是 Helmholtz [5]，他提出了被称为 Helmholtz 运动的模型。Helmholtz 运动是无阻尼弦自由运动的一个具体实例，其激励源是琴弓与琴弦间的粘滑摩擦力。Helmholtz 观察到，当小提琴琴弦振动时，瞬间形成 V 字型，两段直线的一端分别固定于指板上的手指和琴马的位置，另一端相交成 V 型顶角。当琴弓向上运动时，弓力等于静摩擦力，琴弦粘附在琴弓上，V 字型的顶角随着琴弓逆时针运动，到达琴马后会反弹。在特定时刻，当琴弓向上运动而琴弦向下运动时，若弓力低于静摩擦力，琴弓将无法粘附在琴弦上，导致滑落，进而开启下一个 Helmholtz 运动周期。

Raman [6] 通过实验测定了摩擦力，发现粘滞条件下弓弦上的摩擦力基本保持不变。他解释这一现象是由于琴弦的低阻尼性，使其不易失去能量。如果摩擦力发生变化，弦上会产生高振幅的共振响应，但在实际观察中未发现这种现象，从而验证了结论的正确性。

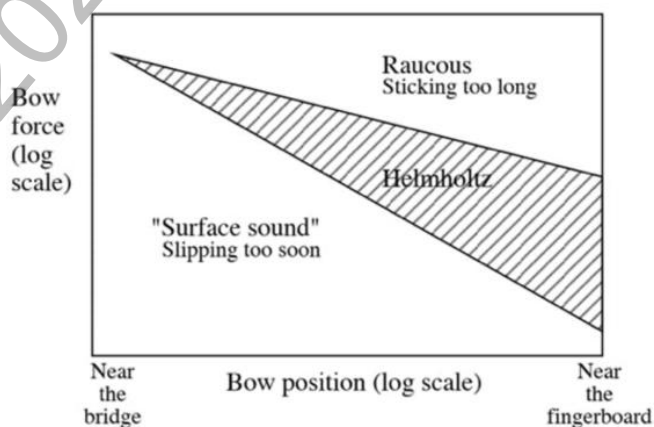


图 1.3.1: Schelleng 图示

Helmholtz 的研究为小提琴发声振动领域奠定了基础。随后, Schelleng[7]对琴弓在琴弦上的演奏位置进行了研究。他假设弦的运动被限制在一个平面内, 弓毛以恒定速度运动, 并且弓弦在单一点发生摩擦接触。当琴弓的拉力等于琴弦的静摩擦力时, 二者会粘在一起。摩擦力的方向随着琴弦相对于琴弓的滑动方向而变化: 通常琴弦相对于琴弓向后滑动。

Friedlander[8]则研究了琴弓速度和摩擦力之间的关系。如下图所示, 横坐标为琴弓的滑动速度, 纵坐标为摩擦系数。图中的直线代表琴弦在有边界条件下的波动方程, 曲线代表摩擦力, 交点则代表同时满足波动方程和摩擦力曲线的值, 这些值生成两个输出波的下一个值并被储存起来。Friedlander 的研究总结道, 当摩擦力在一定范围内增加时, 琴弓会尽可能长时间滑动; 当摩擦力在该范围内有效时, 琴弓则尽可能长时间保持粘附状态。

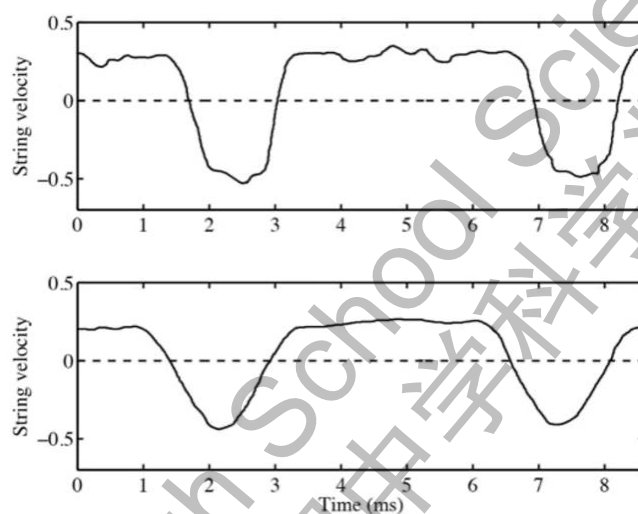


图 1.4: 实际生活中的弓速波形图

Cremer[9]进一步研究了弓力和琴弦圆滑性之间的关系。他发现, 弓力越低, 琴弓速度的波形越圆滑, 从而产生含有更少能量的高次谐波的声音。在实际情况中, 琴弓的速度通常变化平滑, 因为波形的形状随着弓力的变化而变化。当弓速在一定范围内变化时, 琴弓会尽可能长时间滑动或粘附, 这导致了所谓的滞后效应, 即相对于自由弦的自然周期, 运动周期被延长。由于松香在摩擦力中也有滞后效应, 如果将松香计入摩擦力模型, 该模型可能不再准确。这意味着, 琴弓与琴弦之间的摩擦力增加时, 需要更大的弓力来增强粘滞程度。

#### 1.4. 研究展望

目前, 针对琴弓自身特性对小提琴发声影响的研究仍然较少。本研究将重点探讨琴弓的可拉性与音色之间的关系。第二章将通过有限元分析、理论建模和实验分析的方法探讨琴弓的初始形状如何形成; 第三章将搭建力和位移的测试设备以研究琴弓的刚度; 第四章将采用有限元设计优化和逆向工程的方法分析琴弓木材的物理特性; 然后通过实验分析和有限元仿真研究弓尾螺丝拧紧圈数与弓毛预紧力的关系; 于此同时, 我们通过有限元分析研究不同预紧力下琴弓的一阶模态和振动频率; 第五章将探讨在不同预紧力下, 小提琴音色的可重复性是否增强, 以及不同琴弓对音色可重复性的影响; 最后一章将总结研究结果并展望未来研究方向。

## 第二章 琴弓初始形变的研究

小提琴演奏家普遍认为，琴弓的形状对其发声有着重要影响[10]。因此，研究琴弓的初始形变如何形成，是理解其声学特性的重要一步。根据文献，不同厂商在制造琴弓时所采用的加力方式不同，这导致琴弓的初始形状和预紧力存在差异。本文将探讨在不同力的加载方式下琴弓的响应，以及不同预紧力对琴弓形状的影响。

在制作琴弓的过程中，制作者通过调整弓的弧度来锁定内部应力。调整弧度后，他们通常假设琴弓在拉动时弓杆是竖立的，并且受力均匀。因此，制作者会在相反方向施加同等的力，使琴弓恢复直线状态。让琴弓弯曲的施力方式主要有三种：镜像、耦合和拉伸。

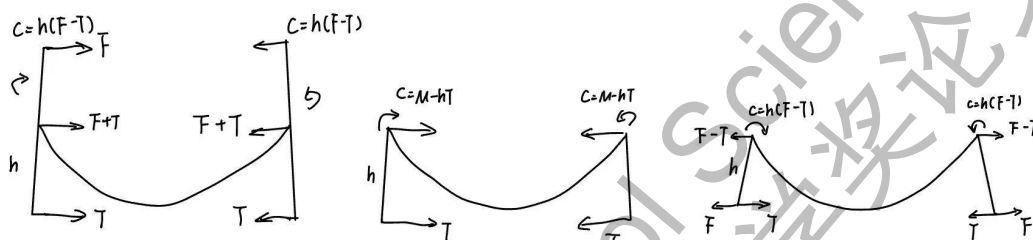


图 2.1: 镜像、耦合、拉伸三种施力方式示意图

图 2.1 展示了这三种施力方式的示意图。镜像方式（图 2.1a）是指将一根笔直的弓正常拧紧后倒置，以更好地展现曲线；耦合方式（图 2.1b）是在弓的两端施加大小相等、方向相反的力；拉伸方式（图 2.1c）则是在弓的两端施加向外的力，且力的方向与弓毛的张力相反。

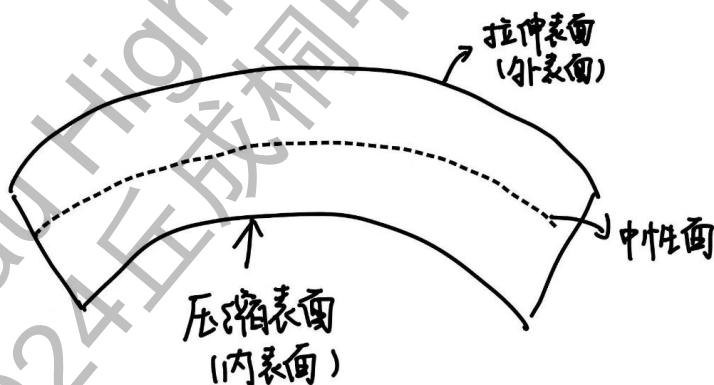


图 2.2: 弯曲杆子示意图

假设有一根弯曲的杆子，它有一个被拉伸的外表面、一个被压缩的内表面，以及一个介于两者之间的中性面（图 2.2）。若中性长度为  $L$ ，曲率半径为  $R$ ，则从中性面某一距离  $y$  处的应变为：

$$\varepsilon = \frac{(R+y)}{R-1} \quad (1)$$

由于相同  $\Delta \theta$  的弧长与半径成比例，因此：

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \quad (2)$$

此时：

$$L = R\Delta\theta \quad (3)$$

因此，y 处的应力为：

$$\sigma = \frac{E y}{R} \quad (4)$$

在坐标(x, y)和面积  $dA = dx dy$  的杆的每个无穷小横截面上：

$$d_F = \sigma d_A = \frac{E y}{R} \cdot d_A \quad (5)$$

在横截面上的力矩为：

$$d_M = y \cdot d_F \quad (6)$$

因此：

$$d_M = \frac{E y^2 d_A}{R} \quad (7)$$

对横截面进行积分：

$$M = \int \frac{E}{R} y^2 dx dy = \frac{EI}{R} \quad (8)$$

基于曲率的定义：

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

当挠度足够小时：

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (10)$$

因此：

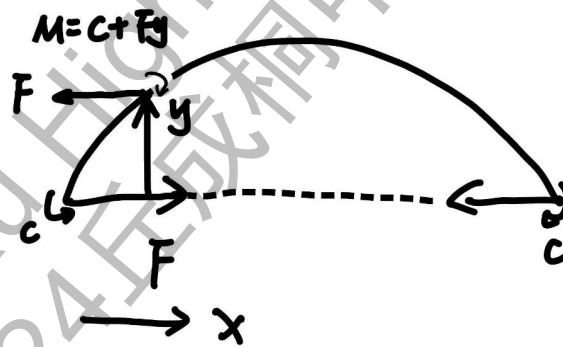


图 2.3：琴弓受力分析图

在制作琴弓时，弓杆的受力分析如图 2.3 所示。假设弓杆在某一点受力，施力方式的不同将导致不同的形变曲线。在镜像、耦合和拉伸三种方式下，弓杆的挠度会有所不同。由于位移必须对称且两端为零，因此这三种方式对琴弓形状的影响存在差异。假设弓杆在某一点受力，通过力矩平衡方程：

$$M = C + F \times y \quad (11)$$

代入公式后可得：

$$-C + Fy = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (12)$$

假设：



$$k^2 = \frac{F}{EI} \quad (13)$$

因此:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -\frac{C}{EI} \quad (14)$$

在不同的施力方式下, 如镜像、耦合和拉伸, 挠度会有所不同。由于位移必须对称且两端为零, 因此边界条件为:  $x(0)=x(1)=0$   $x(0) = x(1) = 0$   $x(0)=x(1)=0$ 。假设  $y = A \cdot \sin(kx) \cdot \sin(k(1-x))$ , 则三种情况下均为:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{C}{EI} \quad (15)$$

所以:

$$y_{\frac{1}{2}} = -\frac{C}{F} \cdot \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \cdot \left[ \cos \frac{kl}{2} - x \right] \quad (16)$$

当  $k^2 = \frac{F}{EI}$  时可得:

$$y_{\frac{1}{2}} = -\frac{C}{F} \cdot \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \cdot \left[ \cos \frac{kl}{2} - x \right] \quad (17)$$

当  $kl/2 = \pi/2$  时,  $y_{\{1/2\}}$  趋近于无穷。这对应的力为:

$$(F_{\text{Euler}} = \frac{EI \pi^2}{l^2}) \quad (18)$$

这表示具有两端铰接支撑的直杆在不屈曲情况下所能承受的最大压缩载荷。

对于镜像情况, 代入  $k^2 = \frac{F}{EI}$  时:

$$y_{\frac{1}{2}} = -\frac{C}{F} \cdot \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \cdot \left[ \cos \frac{kl}{2} - x \right] \quad (19)$$

假设  $x = 1/2$ ,  $y = 0.5h$ , 则:

$$k = -\cos^{-1} \left( \frac{4}{3l} \right) \quad (20)$$

代入公式后得:

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{C}{F} \cdot \frac{1}{\cos \frac{-\cos^{-1} \left( \frac{4}{3l} \right) l}{2}} \cdot \left[ \cos \frac{-\cos^{-1} \left( \frac{4}{3l} \right) l}{2} - x \right] \quad (21)$$

在耦合情况下, 根据:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{C}{EI} \quad (22)$$

假设  $x = 1/2$ ,  $y = 0.5h$ , 则:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4h}{l^2} \quad (23)$$

在拉伸情况下, 代入  $k^2 = \frac{F}{EI}$  时:

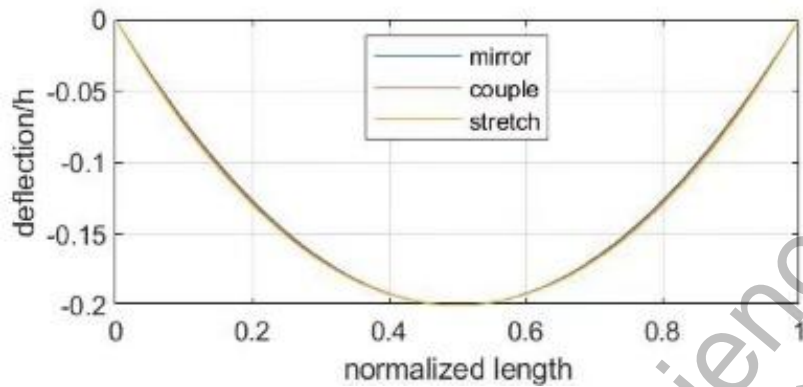
$$y_{\frac{1}{2}} = -\frac{C}{F} \cdot \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \cdot \left[ \cos \frac{kl}{2} - x \right] \quad (24)$$

假设  $x = 1/2$ ,  $y = 0.5h$ , 则:

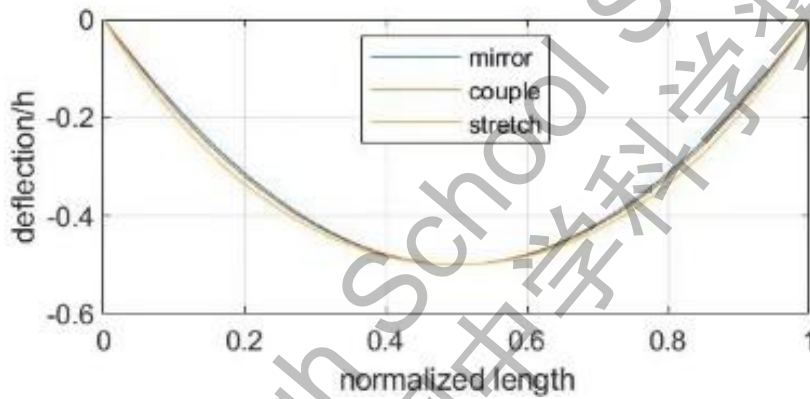
$$k = -\frac{2}{l} \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \quad (25)$$

将结果代回公式得：

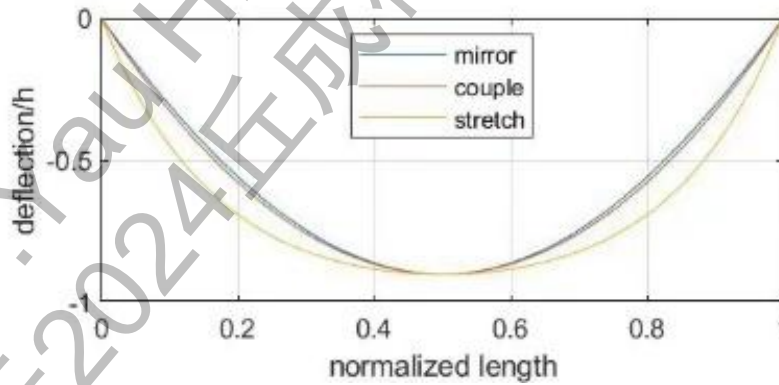
$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{F} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[ \frac{3}{2} - x \right] \quad (26)$$



(a) 20%的弓的高度



(b) 50%的弓的高度



(c) 90%的弓的高度

图 2.4: 在不同的最大位移下，弓的形状的变化

图 2.4 反映了三种施力方式在不同最大位移下造成的弓的轮廓弧度。对于较小偏转，三种弯曲轮廓的差异不大。然而，在最大位移较大的情况下，拉伸轮廓略大于其他两种。随着中点挠度的增加，弓形的中部轮廓趋于平坦。由于弓的最大位移不会超过其高度，这要求弓的两端具备更大的曲率。实际情况下，琴弓的最大位移仅为其高度的 20%，因此三种施力方式对琴弓形状的影响差异不大。

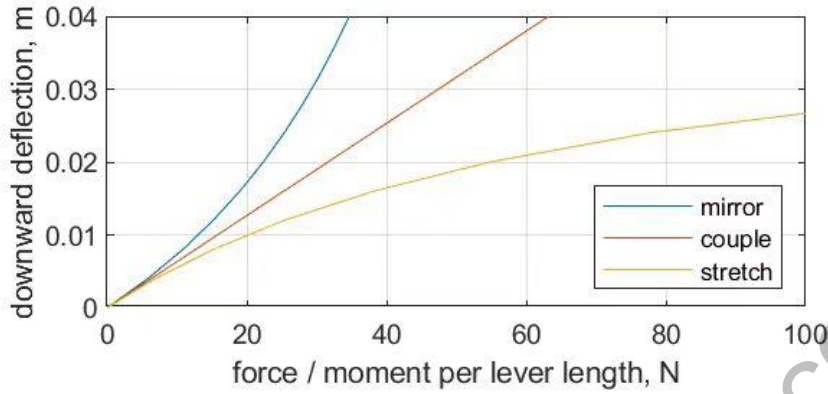


图 2.5: 弓的最大形变随着不同的力或力矩之间的变化关系

图 2.5 展示了弓的最大形变随不同力或力矩的变化关系。在相同力的作用下，镜像情况的形变最大，拉伸最小，耦合居中。镜像和拉伸的非线性是由于纵向力放大了形变，而力加载在已形变结构上导致位移响应有所变化。为了制作中等强度的琴弓，制作者需调节弓杆上的力矩和弓根与弓头之间的拉伸力组合。文献指出，琴弓受到的力约为 60N，这一力大小既不能过小，也不能过大，否则无法确保琴弓在拉直时的稳定性。



图 2.6: 琴弓和尺子的照片

为了比较实际弓的弯曲形状与理论模型的差异，我们通过图像处理技术进行了研究。首先使用手机拍摄了没有弓毛的琴弓及尺子的照片（图 2.6）。通过手机软件进行边缘检测后，我们使用 Sobel 算子提取琴弓和尺子的轮廓，并将其置于白色背景上，以便在 MATLAB 中进行识别。Sobel 算子是一种基于像素点灰度加权差异的经典图像边缘检测算法，能够有效识别图像中的边缘结构。通过应用 Sobel 算子，我们能够更加精确地进行琴弓的三维建模。

尺子在图片中起到了比例尺的作用。在 MATLAB 中，1 毫米的长度被转换为 3.382 个像素点。我们选择了 50 个点来拟合琴弓的上边缘曲线，并使用三次多项式对曲线进行拟合：

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + d \quad (27)$$



图 2.7: 拟合曲线和琴弓

图 2.7 展示了拟合曲线与琴弓边缘曲线的基本吻合情况。

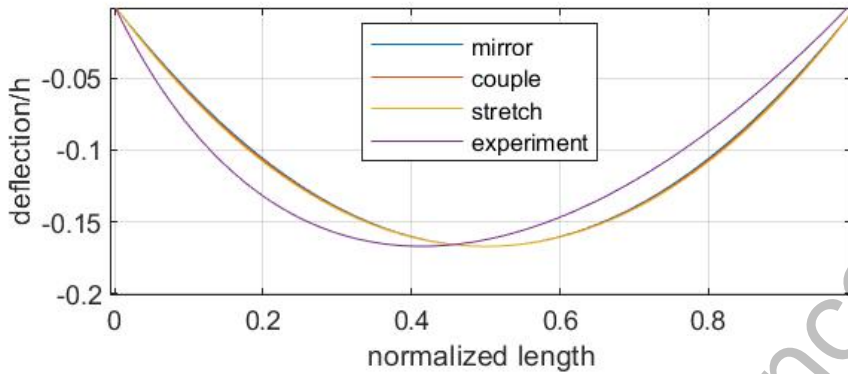


图 2.8: 实际弓的弯曲和理论推导模型的比较图

图 2.8 显示了实际弓的初始弯曲形状与理想模型的对比。可以看出，实际弓的弯曲较理论模型更偏向一侧。悬臂梁的弯曲公式为：

$$\delta = \frac{ML^2}{2EL} \quad (28)$$

其中， $I$  为惯性矩，可表达为：

$$I = 4\pi r^2 \quad (29)$$

琴弓的弯曲刚度与其横截面形状有关。由于琴弓为变截面结构，沿弓的长度方向弯曲刚度不一致，导致弓弯曲时会向一侧偏移。为了验证这一点，我们进行了有限元屈曲分析。在进行屈曲分析前，需要测量弓的截面形状。我们使用游标卡尺沿弓的长度方向测量截面直径，并发现弓的截面可能为椭圆形，因此分别在水平方向和竖直方向上测量了三次并取平均值。图 2.9 展示了不同截面位置的水平方向和竖直方向的直径大小。

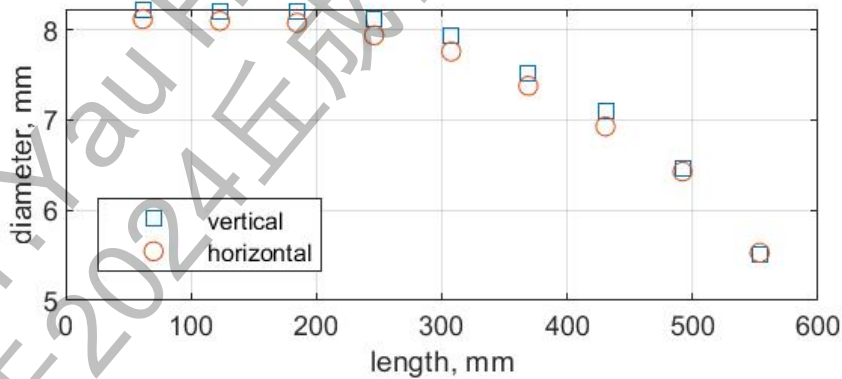


图 2.9: 弓杆上不同位置上水平方向和竖直方向的截面直径大小

测量结果显示，每个位置上水平方向和竖直方向的直径大小相近，因此可以假设弓的截面为圆形。在建模琴弓时，我们首先将琴弓的弓杆部分设计成圆柱体，再根据测量的直径更改模型中的截面直径。参考实际中的琴弓形状，我们将较细的一端设为弓尖部分，并用长方体模拟弓头，将较粗的一端设为弓根部分，并用长方体模拟弓尾（图 2.10）。



图 2.10: 琴弓的简化 3D 模型

在有限元材料定义时，我们选择木材作为材料，因为琴弓弓杆通常由木材制成。木材的密度为 700 千克每立方米，杨氏模量为 22GPa，泊松比为 0.4。在添加边界条件时，假设琴弓的弓尖和弓根是刚性的，不会发生形变。考虑到实际使用中，弓根部分被手握住，因此设为固定，而弓尖部分设为受力点。具体边界条件如图 2.11 所示。

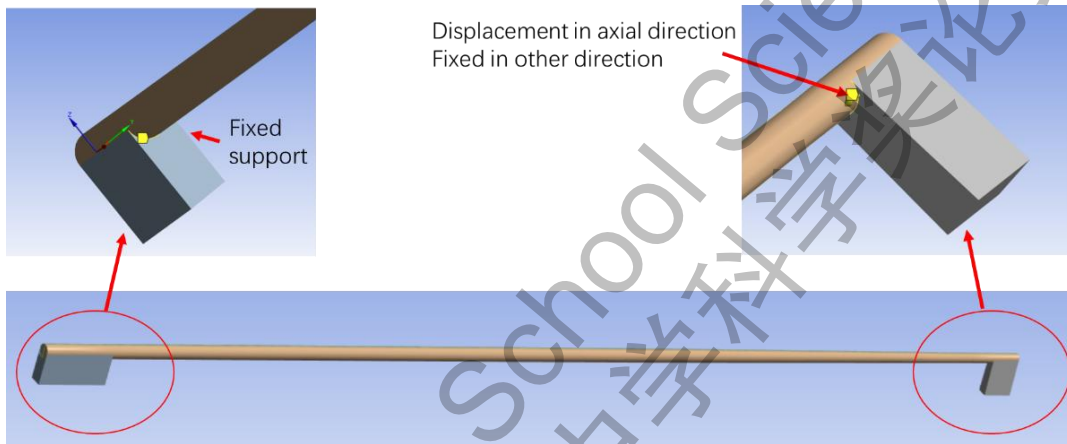


图 2.11: 有限元分析的边界条件

由于有限元仿真的精度受单元数影响，为减少误差，我们进行了网格收敛性分析。通过调整网格尺寸，我们发现，当网格尺寸较小时，拟合的准确性更高，但计算成本也相应增加。图 2.12 展示了三种不同网格尺寸对网格收敛研究的影响。

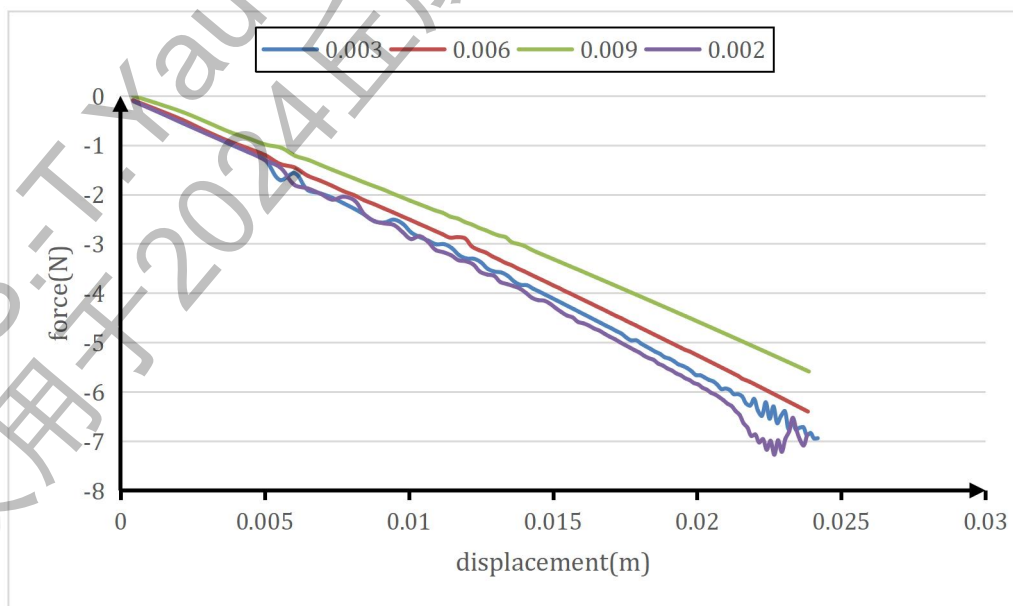


图 2.12: 三种不同网格尺寸对网格收敛研究的影响

图 2.13 展示了有限元分析、理论模型和实验结果的对比。可以看出，有限元分析和实验结果比理论模型的曲线中点偏左，说明在考虑弓杆为变截面时，曲线中点会向左偏移。三条曲线的趋势相近，但有限元分析的曲线在靠近弓右侧时比理论和实验曲线略低，可能是由于有限元分析中考虑了材料的杨氏模量和密度，而理论和实验结果未考虑这些因素。此外，理论模型未考虑弓头和弓尾的影响，而建模中考虑了这一点，这也导致了模型与实际弓结构之间的误差。为更好地验证形变轮廓，还需进一步测试和测量木材的物理特性。

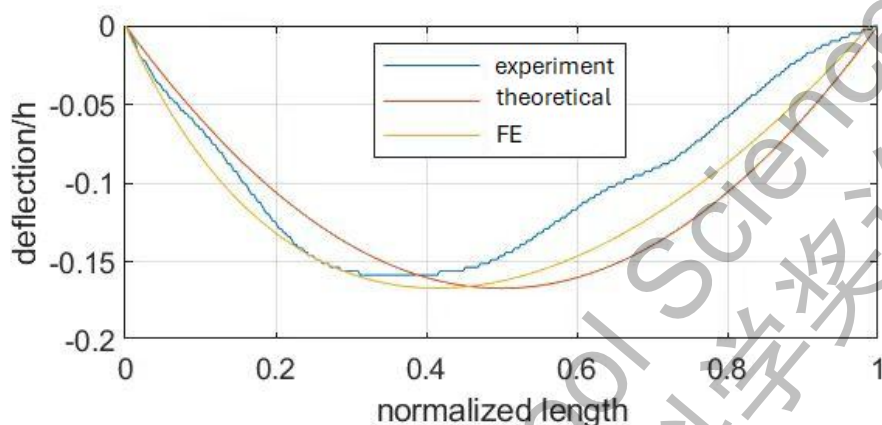


图 2.13: 有限元分析、理论和实验所获得的数据对比

本章主要对琴弓的相关理论进行了分析，包括琴弓初始形变的形成原因、不同施力方式下琴弓的响应以及不同预紧力对琴弓形状的影响，为测定琴弓的可拉性的实验提供了理论基础。



### 第三章 力与位移的实验台的搭建

基于前述理论与推导，琴弓的材料特性以及弓毛的张力需要通过实验进一步验证和测定。本章将详细介绍实验所需的器材、实验装置的搭建过程，以及实验结果和准确性分析。

#### 3.1. 实验装置

初始实验装置分为两个部分：一是用于固定琴弓尾部的装置，二是用于加载力的平台。加载力和位移的平台配有不同的连接器，以连接具体的装置。在位移传感器的放置上，设计了专用连接器，并留出延伸部分以便C形夹可以将其固定。同时，为了放置琴弓，本实验设计了一个平台来固定琴弓的尾部。所有仪器都需置于平整的桌面上。该装置的整体设计如图 3.1.1 所示。

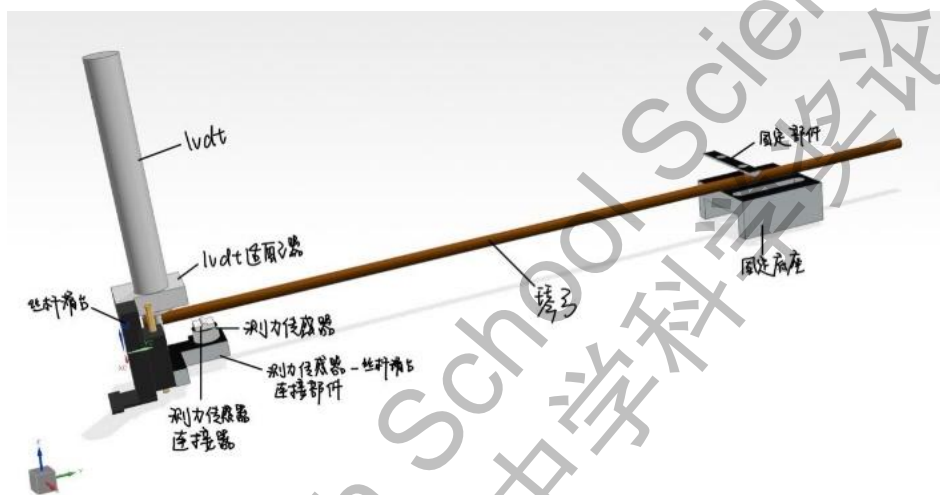


图 3.1.1: 左侧为加载力和位移的平台，右侧为固定琴弓尾部的装置，棕色部件为模拟的琴弓

由于初期设计中，位移传感器的稳定性较差，因此我们单独设计了一个位移传感器支架，以提高其稳定性。由于位移传感器的支架，所以连接件也做了相应的修改。最终的实验装置设计如图 3.1.2 所示。



图 3.1.2: 最终的实验装置图

在信号采集部分，力传感器和位移传感器均采用应变片技术进行信号传递，并接入惠斯通电桥以放大信号。处理后的信号通过模拟数字转换卡（ADQ 卡）转换为数字形式，并连接至笔记本电

脑，从而在电脑上实时获取位移和力的信号数据。连接装置如图 3.1.2 所示。

### 3.2. 装置组成

为了精确测量琴弓在点接触时施加的力，本实验采用了 LSDT-I (V)-SL 型测力传感器，其量程为 10kg，精度为 0.3% F.S.，完全符合实验的需求，如图 3.2.1 所示。



图 3.2.1: 测力传感器示意图

为了连接测力传感器，实验设计了一个特制的连接器，如图 3.2.2 所示。该连接器由塑料制成，设计成弧形以确保琴弓与测力传感器之间的点接触更加稳定。

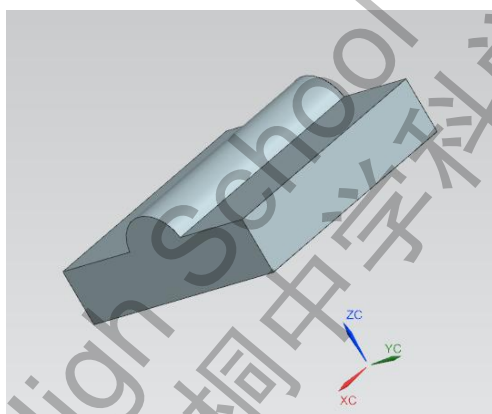


图 3.2.2: 测力传感器连接器

测力传感器还需要与丝杆滑台相连。为此，本实验设计了一个 L 型连接部件（见图 3.2.3）。这个部件采用金属材质，以确保足够的刚度，避免因自身形变影响实验测量的准确性。

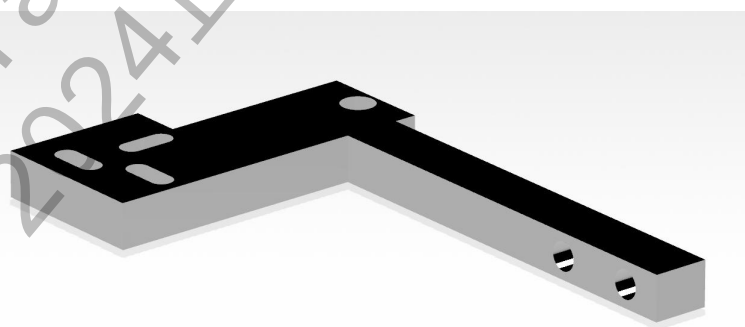


图 3.2.3: 悬臂结构连接器

在位移控制方面，本实验使用了 LWZ25-L70 型丝杆滑台。滑台的设计确保了在实验过程中能够精确控制琴弓的位移，同时其前端设计的螺丝孔可以通过螺丝与连接器牢固连接，如图 3.2.4 所示。





图 3.2.4: 丝杆滑台

为收集位移数据，本实验采用了 KTM-50mm 型位移传感器（见图 3.2.5），并设计了一个专用支架（见图 3.2.6），以确保传感器的稳固性和数据采集的连续性。选择位移传感器而非使用丝杆滑台上的刻度尺进行记录，是因为位移传感器能够提供更为连续的读数，尤其是在琴弓刚度可能高度非线性的情况下，1mm 的位移变化可能导致刚度的显著变化。



图 3.2.5: 位移传感器

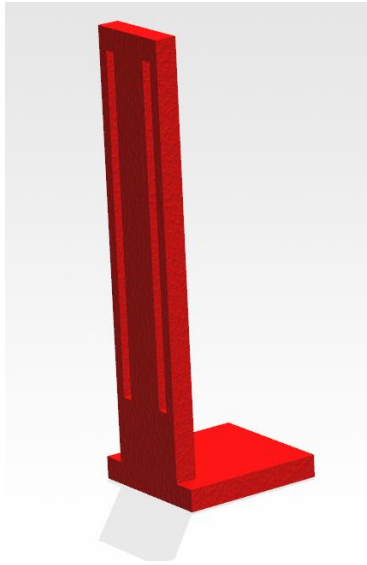


图 3.2.6: 位移传感器支架

为了确保琴弓在实验过程中的稳固性，本实验设计了专用的琴弓固定底座及固定装置。固定装置被设计成半圆形，以模拟手与琴弓的接触点，从而真实再现实际演奏中的力学条件，如图 3.2.7 和图 3.2.8 所示。

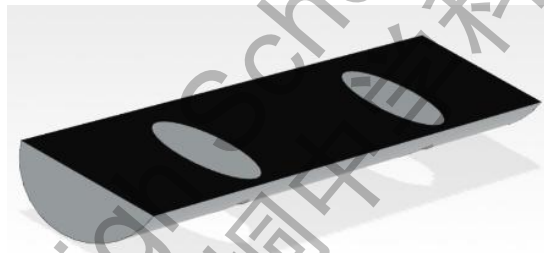


图 3.2.7: 琴弓固定装置

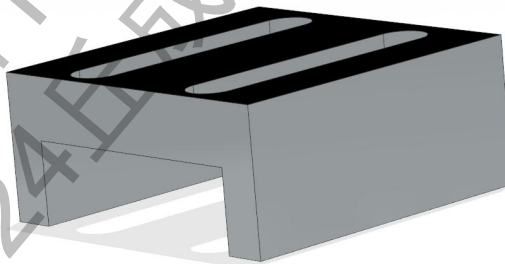


图 3.2.8: 琴弓固定底座

### 3.3. 数据采集

实验装置中使用的力传感器和位移传感器均通过电压信号进行数据收集。力传感器的灵敏度范围为 0-10V 转换为 0-200N，位移传感器的灵敏度范围为 0-10V 转换为 0-50mm。在信号收集过程中，我们使用了应变片技术，但由于应变片产生的电压变化较小，采用了惠斯通电桥进行电压放大。随后，通过 MCC 卡将放大的电压信号转换为数字信号，并导入电脑进行数据读取。下图展示了典型的力和位移的时间信号。

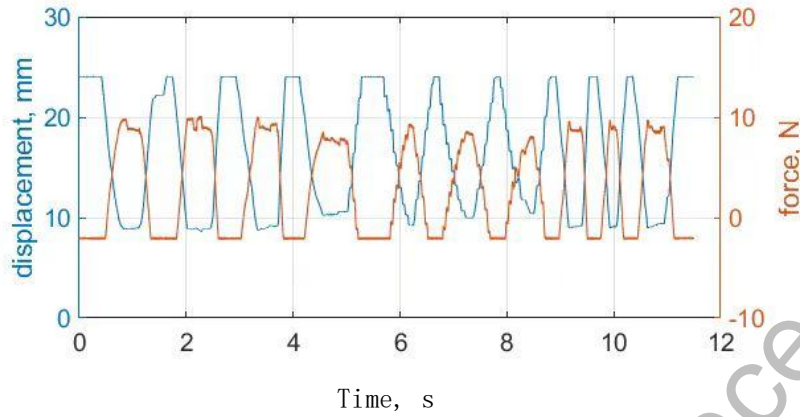
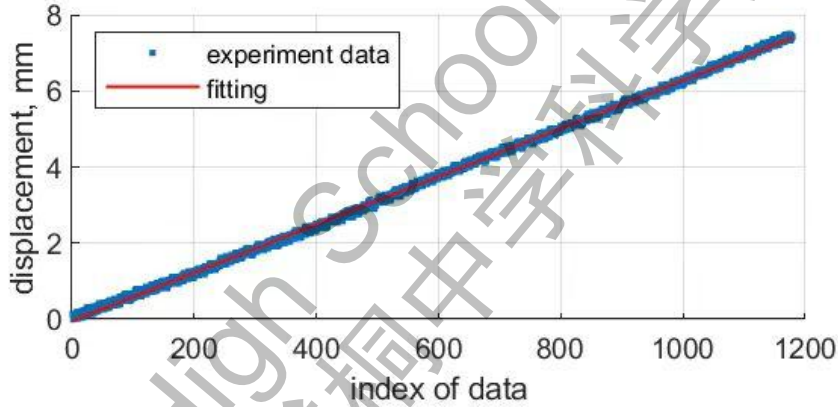
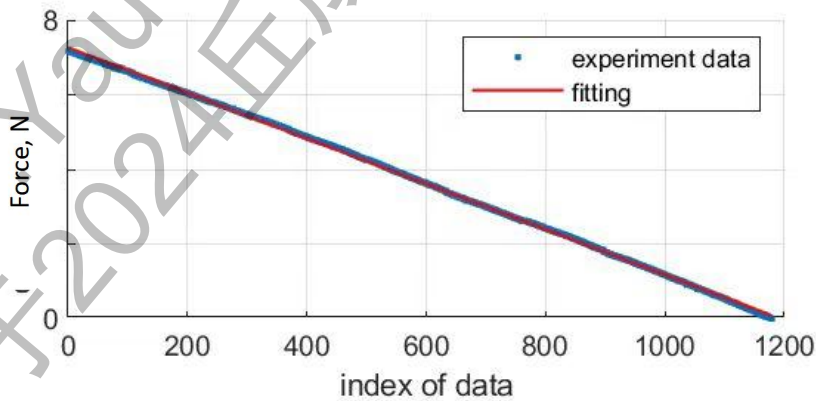


图 3.3.1: 典型的力和位移的时间信号

从图 3.3.1 可以看出，力和位移信号中存在一定的阶梯状波动，这是由于加载不均匀所导致的。为了移除信号中的干扰，我们对所有信号进行了线性拟合，并通过拟合直线的斜率来确定位移对应的力值。经过 10 次加载和卸载循环后，计算出力的平均值，以作为实验结果的参考。



(a)



(b)

图 3.3.2: 力和位移信号的直线拟合

### 3.4. 实验准确性分析

为了验证实验结果的准确性，我们通过有限元分析对实验进行了校验。实验中使用了一块不

锈钢板模拟琴弓的受力情况。该不锈钢板的尺寸为长 392mm，宽 20mm，高 3mm。实验中，不锈钢板的固定位置约在 344mm 处，因此导入的几何结构长度为 344mm。然后，我们将几何结构导入 Ansys 进行静态结构分析，以计算其受力和位移。该结构的材料属性如下表所示：

表 3.4 金属结构的材料属性

密度	$7850\text{kgm}^{-3}$
杨氏模量	230GPa
泊松比	0.3

在有限元分析中，固定支撑面设置为实验中不锈钢板固定的位置。力传感器距离固定端 30mm，因此位移加载点设置在距离固定端 30mm 处。

在网格设置上，我们对网格尺寸进行了多次调整，以确保计算结果的准确性。结果显示，不同网格尺寸下的挠度曲线整体趋势相似，但细节上存在差异。当网格尺寸较小时，计算的准确性更高。

在分析过程中，将不锈钢板的  $y-z$  平面固定，并在  $z$  方向和  $x$  方向分别施加 0.003 米的位移，导致钢板发生形变，如图 3.4.1 所示。

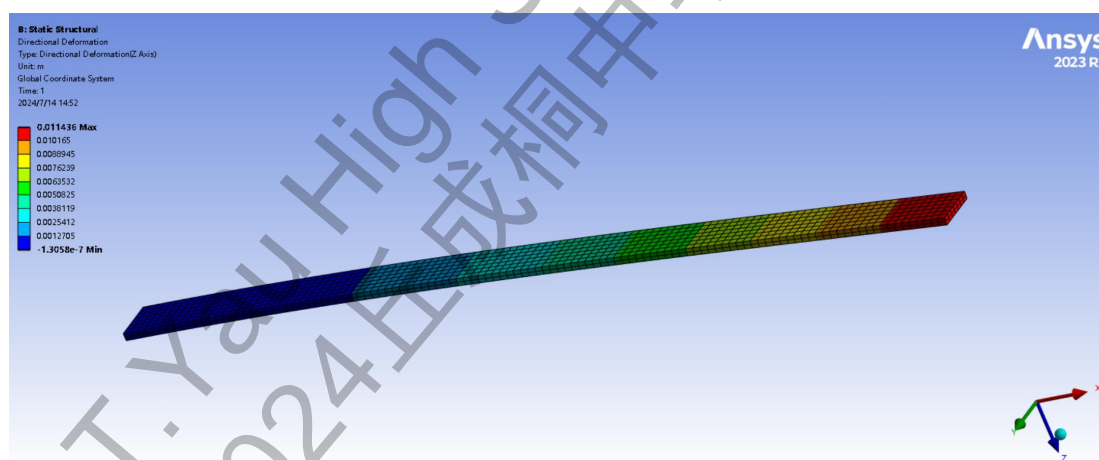


图 3.4.1：不锈钢板形变图

根据上图的分析结果，绘制了挠度曲线图（图 3.4.2）。图中横坐标为位移，纵坐标为琴弓在  $z$  方向上受到的力。可以看出，不同网格尺寸下的挠度曲线整体相似，但存在细微差别。当网格尺寸为 0.006 米时，挠度曲线斜率稍大，而 0.002 米和 0.003 米时的挠度曲线非常接近。

当实验中的钢板与有限元模型的挠度曲线进行对比时，实验结果与模型曲线的斜率非常接近，说明实验装置的设计和数据采集具有较高的准确性（见图 3.4.3）。

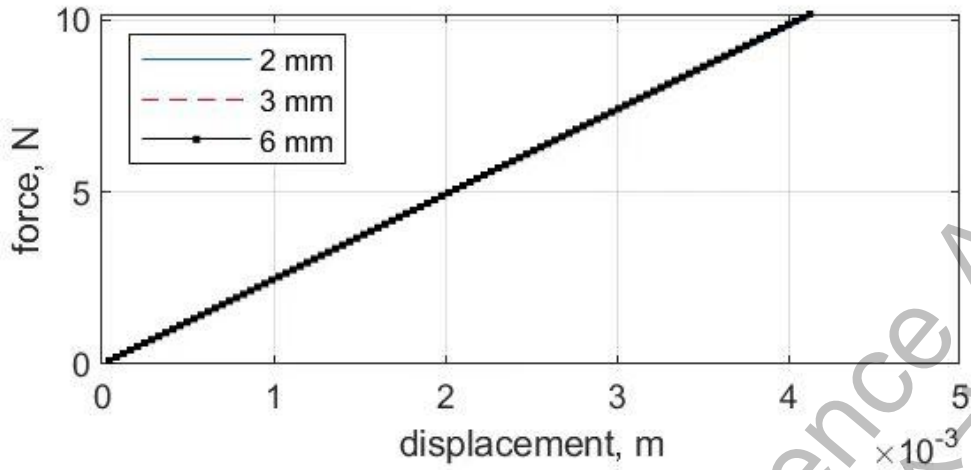


图 3.4.2: 挠度曲线图

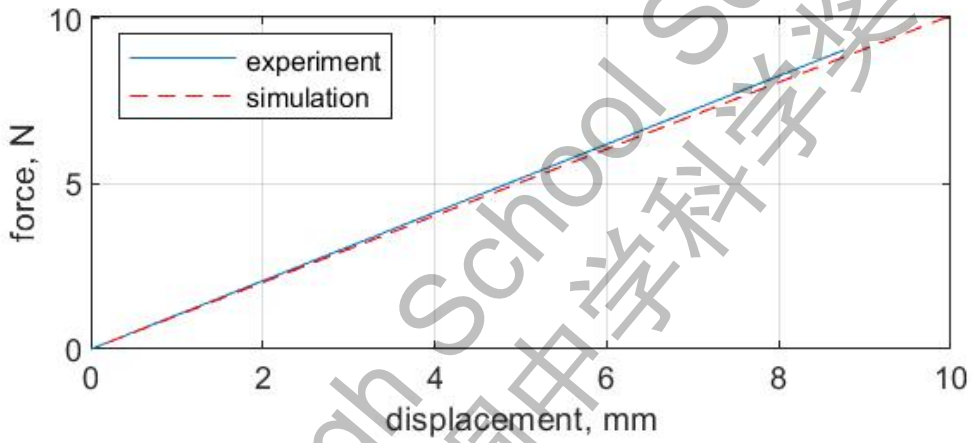


图 3.4.3: 网格尺寸为 3 毫米时有限元模型与实验的挠度曲线

本章对实验装置的搭建过程进行了详细描述，并通过有限元分析验证了实验的准确性。这为后续实验提供了坚实的基础，并为进一步研究琴弓的力学特性提供了可靠的实验平台。

## 第四章 用实验分析小提琴的机械性能

在上一章中，我们搭建了力和位移的实验测量平台，但琴弓所用木材的杨氏模量以及施加的预紧力仍不明确。在本章中，我们通过有限元分析反推木材的杨氏模量，并计算琴弓的预紧力，以更好地理解琴弓的机械性能。

### 4.1. 琴弓杨氏模量的确定

在第三章中提到，琴弓在特定位置具有内表面和外表面，这可能意味着琴弓存在不同的杨氏模量。在本节中，我们利用琴弓内表面的有限元分析进行静态结构分析，以优化并反推琴弓的材料特性。通过实验获得的挠度曲线，我们可以给定一个位移，并求出相应的最大力。在有限元分析中，通过不断尝试不同的泊松比、杨氏模量和密度，最终得出一个组合，使有限元分析得到的挠度曲线与实验结果一致，从而推导出杨氏模量。首先，我们使用内表面的数据求得杨氏模量，再用外表面的数据进行验证。

通过对琴弓的静态结构研究，本实验成功确定了琴弓材料的杨氏模量。首先，我们建立了设计参数，包括弓杆材料的密度和杨氏模量。然后，将在 NX 软件中建模的无预紧力琴弓模型导入 Ansys 平台进行静态分析。

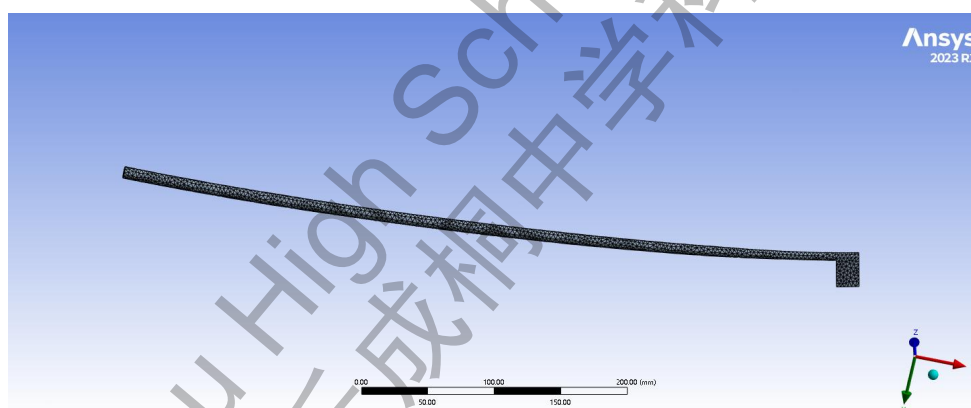


图 4.1.1: 有限元分析中的琴弓网格划分

图 4.1.1 展示了有限元分析中琴弓的网格划分，网格尺寸为 3 毫米。该尺寸根据第三章中的网格收敛研究确定。

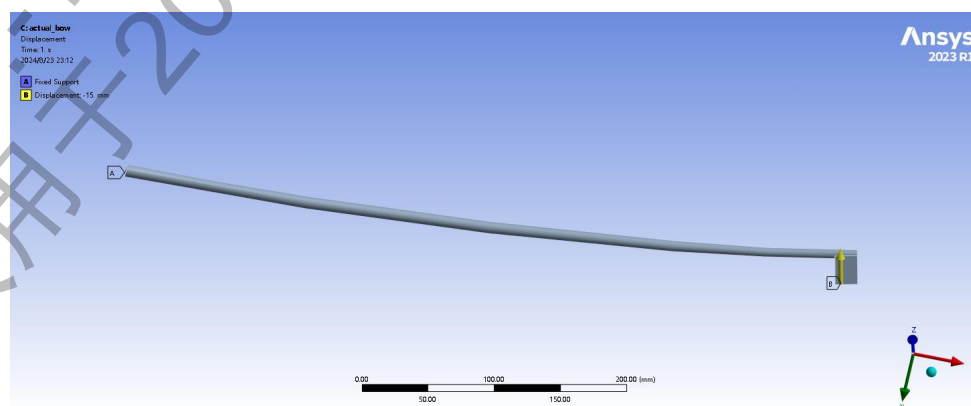


图 4.1.2: 有限元分析中的琴弓边界条件



如图 4.1.2 所示，琴弓根部添加了固定支撑，弓尖添加了位移。由于琴弓并非严格沿坐标轴建模，因此我们选取弓尖侧面中心作为局部坐标系的原点，弓尖的竖直边和横向边分别为 y 轴和 x 轴。为了优化琴弓材料特性，我们使用内表面的数据进行分析，并施加竖直向上的位移来模拟实验中琴弓的实际受力情况。

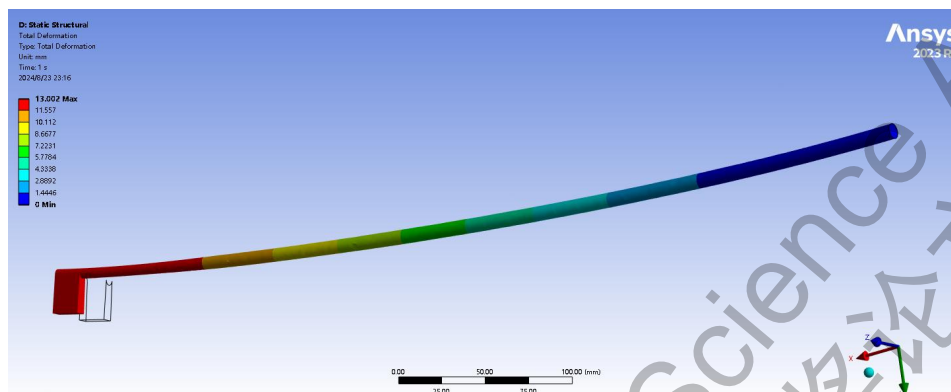


图 4.1.3: 有限元分析中琴弓的形变

为了加速获得结果，我们借助 Ansys 平台并采用多目标遗传算法（MOGA）迅速调整参数。算法选择了十组不同的杨氏模量和泊松比，在 13 毫米的位移下，根据力的接近实际情况进行排序。通过交叉和突变操作生成新的杨氏模量和密度矩阵，MOGA 算法通过迭代选择、交叉、突变和替换等步骤，直至满足终止条件，如达到指定的迭代次数或找到目标反作用力。

通过上述步骤优化得到的杨氏模量和密度如下表所示：

表 4.1 琴弓材料优化后的密度和杨氏模量

密度 $\rho$ ( $kgm^{-3}$ )	593.41
杨氏模量 E (GPa)	12.665

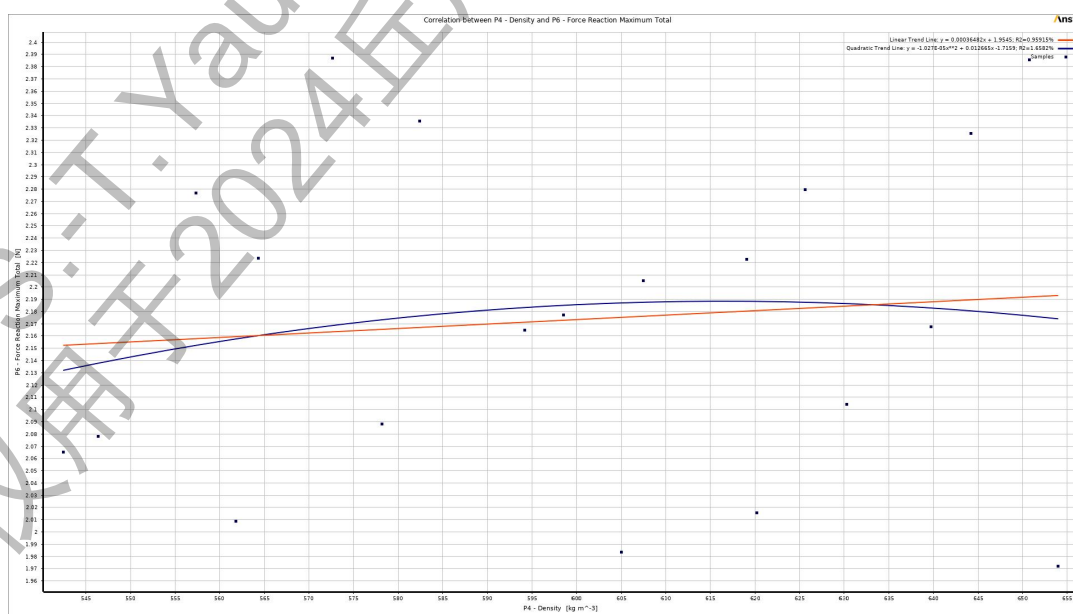


图 4.1.4: 密度与反作用力的关系

图 4.1.4 展示了密度与反作用力之间的关系。可以看出，密度与反作用力没有直接关系，因此优化密度并不是实验的重点。

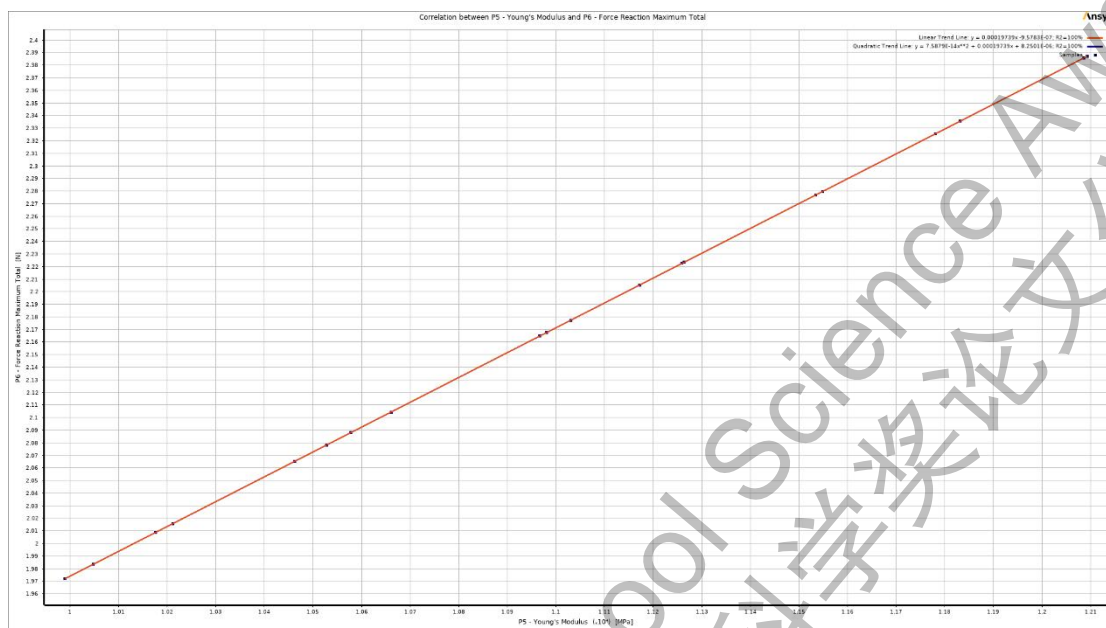


图 4.1.5: 杨氏模量与反作用力的关系

图 4.1.5 展示了杨氏模量与反作用力之间的关系。可以看出，杨氏模量与反作用力成正相关关系，说明杨氏模量直接影响反作用力，因此优化杨氏模量是实验的重点。

在优化材料特性之后，我们使用外表面（水平方向）的位移验证了杨氏模量。由于琴弓在坐标系中的位置并非完全水平或垂直，我们同样选取弓尖侧面中心作为局部坐标系的原点。

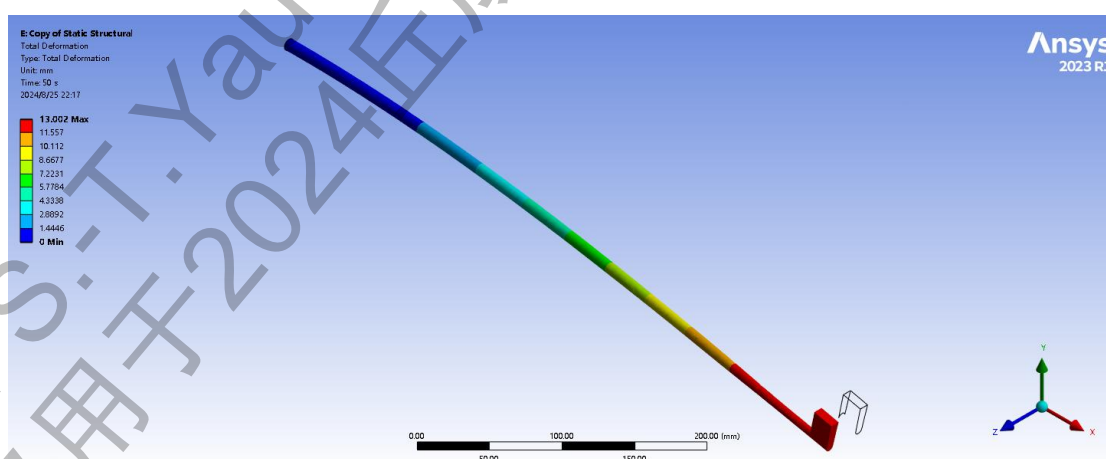


图 4.1.6: 有限元分析中用外表面验证琴弓的材料特性

根据数据求出的挠度曲线与实验结果对比如图 4.1.7 所示。



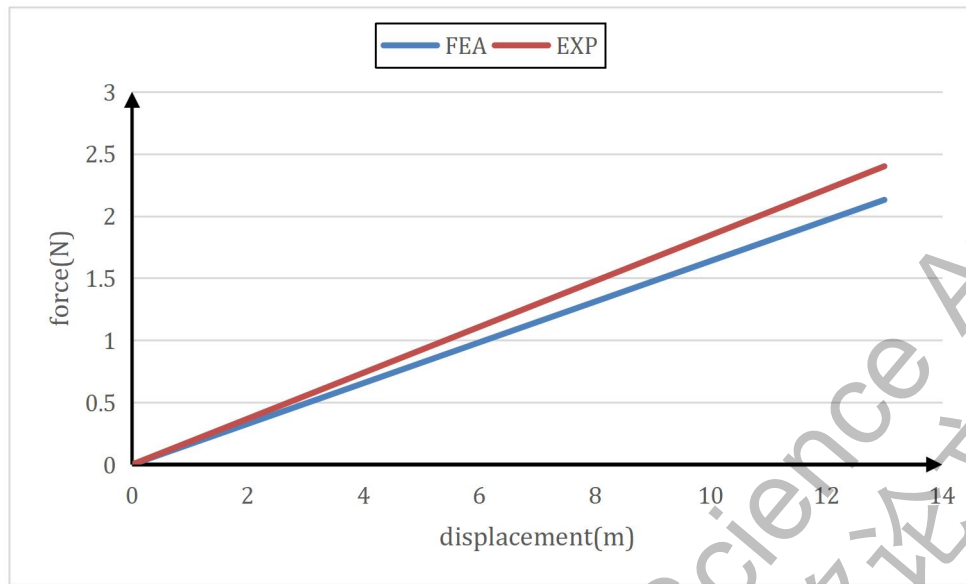


图 4.1.7: 有限元分析与实验的挠度曲线对比

从图 4.1.7 可以看出，实验结果与有限元分析结果略有不同，这可能是由于真实琴弓木材的杨氏模量存在不均匀性导致的误差。然而，误差约为 0.3N，这对实验结果的整体影响较小，总体上结果仍然比较准确。

#### 4.2. 计算琴弓的预紧力

为了测试琴弓的预紧力，我们拍摄了 8 张琴弓在不同松紧度下的照片，每一张照片对应琴弓拧紧一圈的情况。分别在琴弓上表面的曲线上取 50 个点进行拟合，拟合公式为  $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + d$ ，然后对其进行建模。



图 4.2.1: 无预紧力琴弓图像

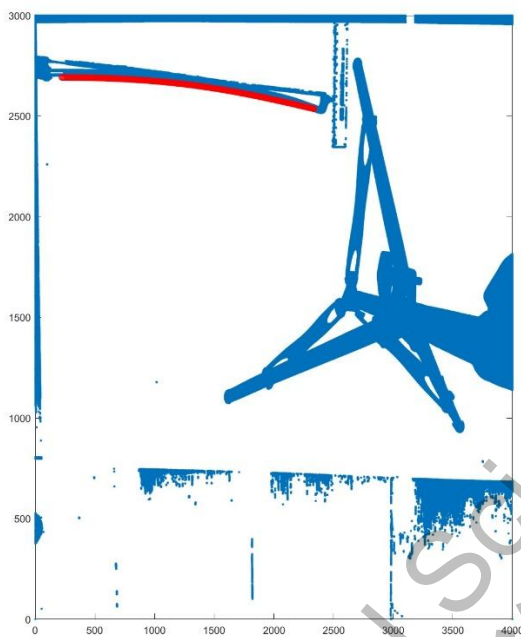


图 4.2.2: 取点示意图



图 4.2.3: 建模示意图

我们对无预紧力的琴弓进行了静态结构分析，通过比较琴弓位移形变中指定两点之间的距离变化，推导出预紧力。



图 4.2.4: 指定两点图示（红点标注的位置）

通过比较琴弓的最大形变，确定产生最大形变对应的加载时间，并据此计算出每一圈对应的预紧力。形变程度与预紧力对应关系如图 4.2.5 所示：

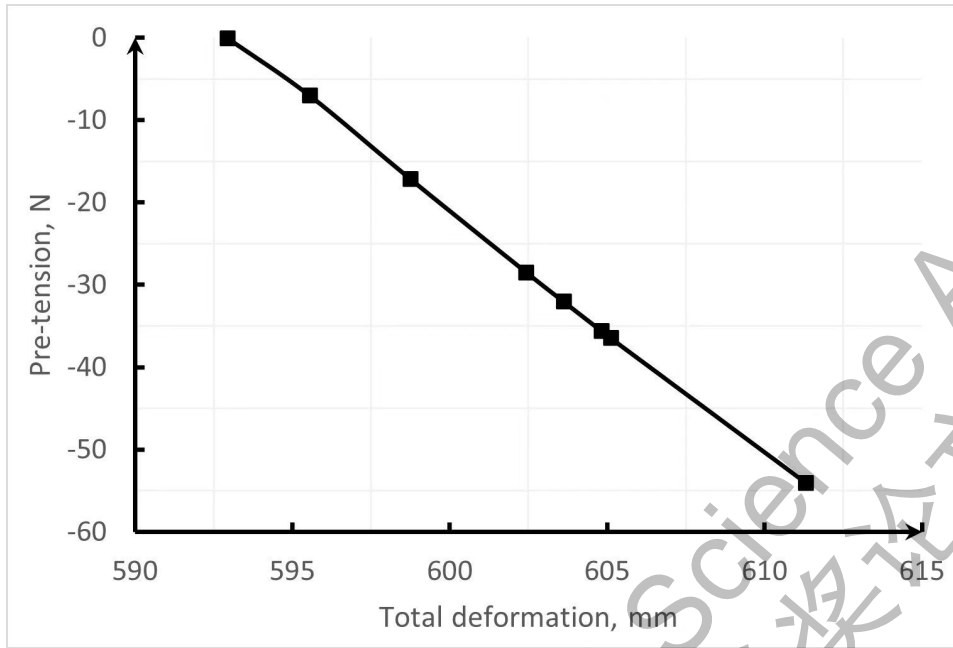


图 4.2.5: 形变程度和预紧力对应图

圈数与预紧力对应关系如图 4.2.6 所示:

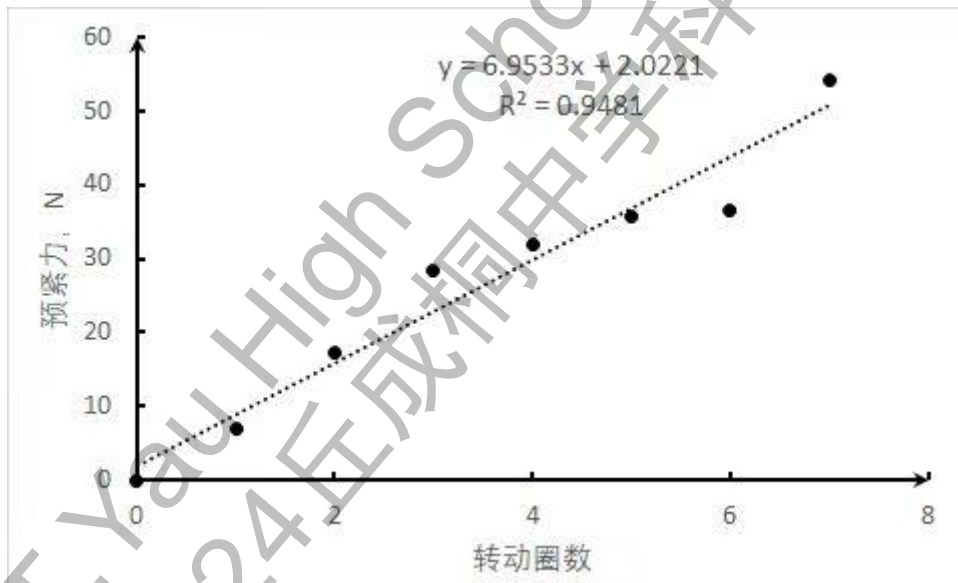


图 4.2.6: 圈数和预紧力对应图

### 4.3. 模态分析

在演奏小提琴时，琴弓振动的频率可能接近某个固定频率。为了探讨琴弓的振型是否会对该频率产生影响，我们对不同预紧力下的琴弓进行了模态分析。

通过对每张琴弓照片的模态分析，我们求解了前 10 阶模态，并选取了接近 440 赫兹的第 7 阶模态进行比较，结果如下图所示：

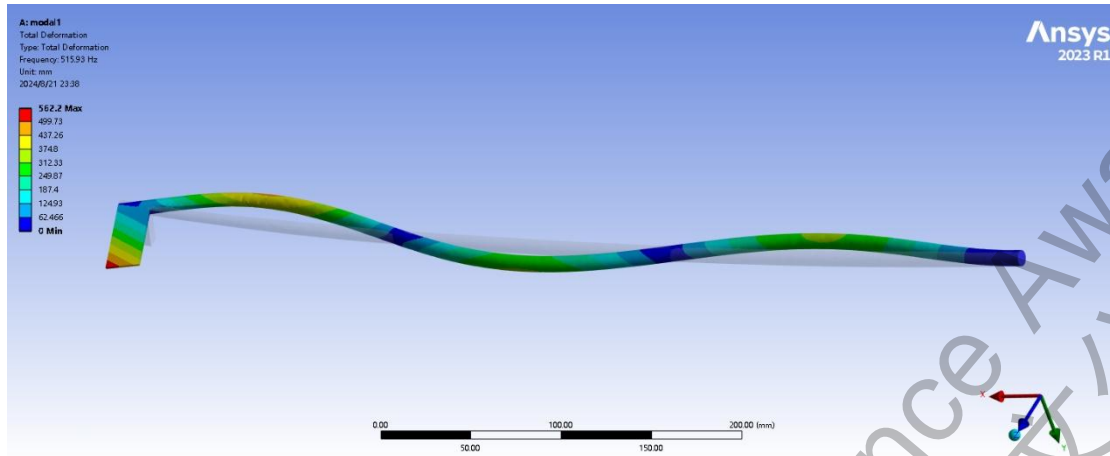


图 4.3.1: 第 7 阶模态图

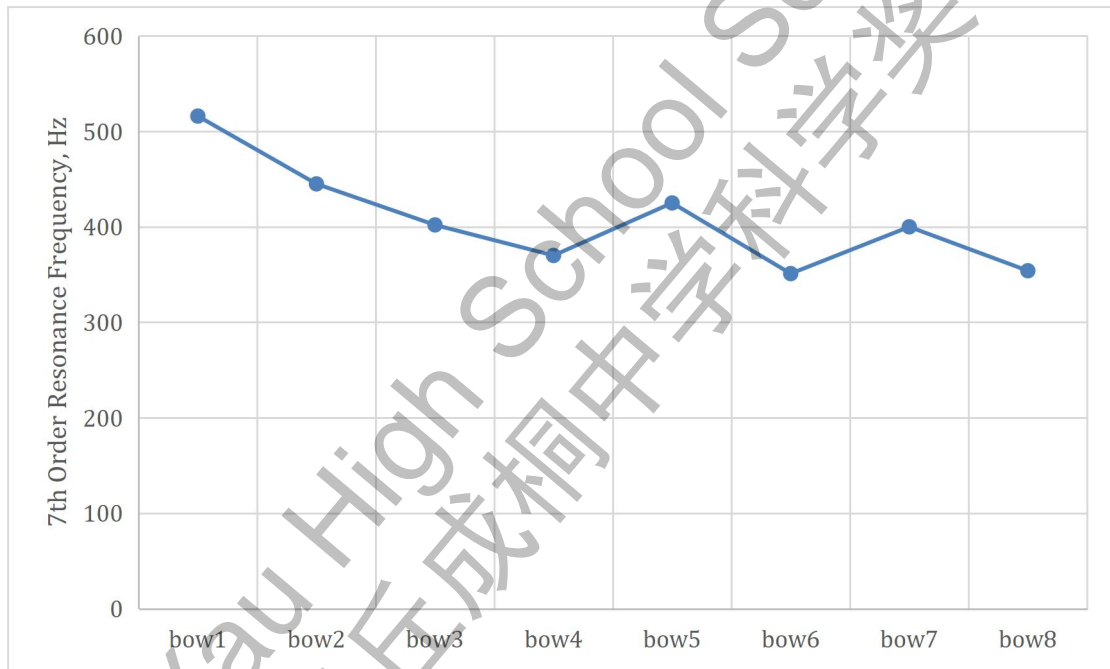


图 4.3.2: 不同预紧力下第 7 阶模态变化

从图 4.3.2 可以看出，曲线走势总体呈下降趋势，但在第五张和第七张图片中，模态出现了小幅上升趋势。这可能由以下两个原因引起：首先，拍摄琴弓照片时可能导致琴弓形状发生微小变形，从而产生误差；其次，在对琴弓进行建模时，边缘取点的准确性可能不足。

通过本章的研究，我们成功利用有限元分析中的静态结构分析反推了木材的杨氏模量，并计算了琴弓的预紧力，进一步优化了琴弓的材料特性。同时，通过模态分析，我们排除了琴弓振型可能带来的误差，确保了实验结果的可靠性。

## 第五章 不同预紧力对小提琴音色的影响

在上一章中，我们分析并优化了琴弓的材料特性，并量化了琴弓的松紧度。本章进一步探讨不同预紧力对琴弓可拉性和小提琴音色的影响。我们通过调整琴弓的预紧力并分析相应的琴声波形，试图揭示预紧力在小提琴演奏中的关键作用。

### 5.1. 实验设计与数据采集

实验中，我们在琴声发声点周围布置了三个话筒，距离琴声发声点 1 米，每相邻两个话筒之间的夹角为 120 度，话筒高度与琴头高度齐平，确保能够均匀捕捉到琴声的各个角度的声音信号。



图 5.1.1: 实验现场布局

在演奏过程中，琴弓的松紧度（预紧力）对琴声的产生起到了关键作用。由于难以直接测量琴弓的预紧力，我们通过调节琴弓松紧时的圈数，以及利用上一章的有限元分析结果来间接推导出弓毛上的预紧力。为精确捕捉琴声，我们使用了高精度的电容式声压传感器，麦克风信号通过放大和调理装置处理后，连接到数据采集卡，再将模拟信号转化为声压的时间信号，最终传输至电脑进行分析。

### 5.2. 数据处理与频谱分析

在数据分析中，我们重点关注了琴弓的频率响应。通过傅里叶变换，我们将时域信号转化为频率信号，以便分析不同预紧力对琴声主频和谐波的影响。

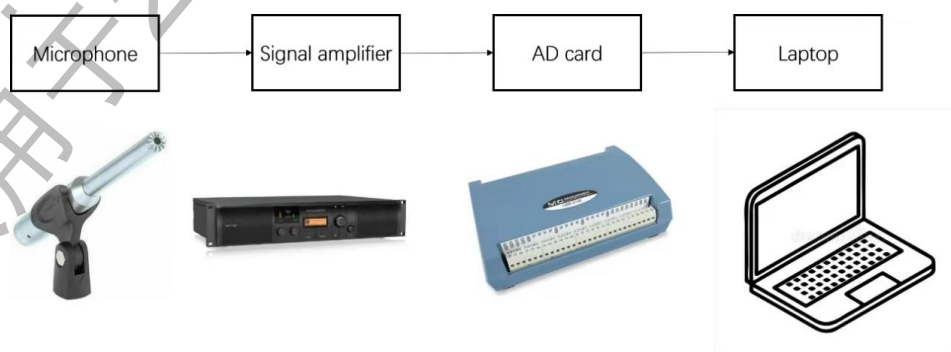


图 5.2.1: 数据分析流程图



实验录制了 10 组拉动 A 弦（II 弦）时的琴声，每组的采样频率设置为 51200 赫兹。每组实验结束后，暂停 10 秒以确保琴声衰减至背景噪声水平。由于数据采集中存在电磁干扰和背景噪声，我们将这些噪声时期的麦克风读数设为零，以减少对频域信号的干扰，使得频谱分析更为光滑和准确。

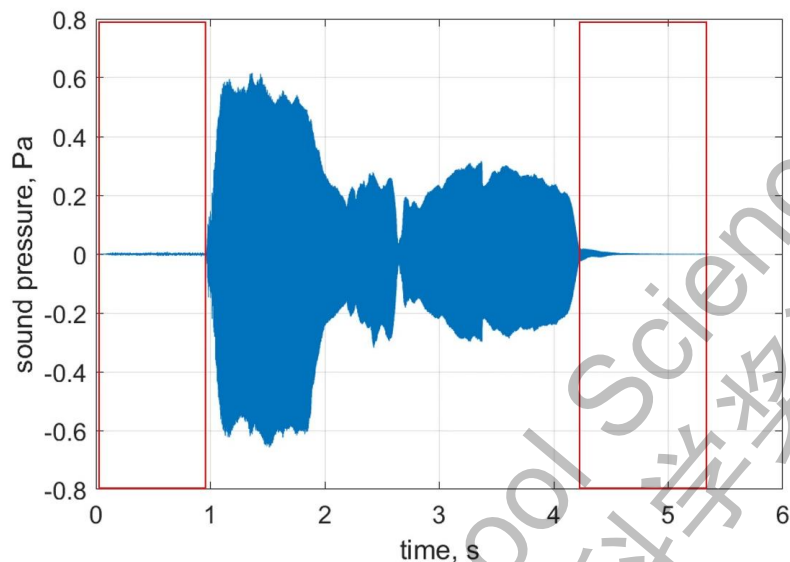


图 5.2.2: 典型的麦克风的时间信号

每组测试包含 5 次上弓和下弓的组合操作。上弓和下弓分别代表琴弓从弓尖向弓根推拉和从弓根向弓尖拉动。不同的操作方式对音色和音量都有一定影响。实验中，我们从无预紧力的状态开始，每次拧紧一圈琴弓，直至拧满 9 圈，总共录制了 50 个不同的组合录音。

### 5.3. 主频与谐波的影响分析

图 5.3.1 展示了一个典型的麦克风声压信号的频响函数。可以看出，小提琴的主频（440Hz）是最容易被激发的频率，而其谐波则是主频的整数倍，振幅低于主频。

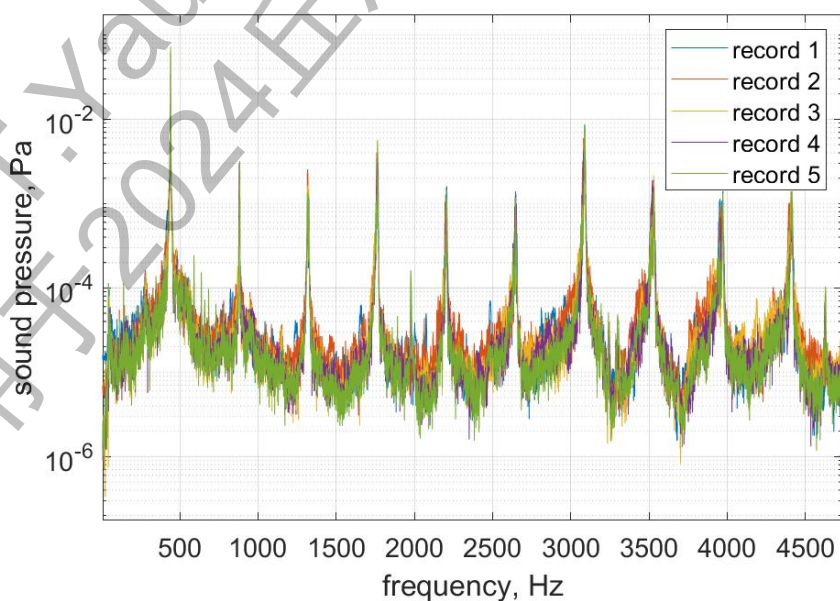


图 5.3.1: 麦克风声压信号的频响函数

根据 White 的研究 (White H E, White D H. Physics and music: the science of musical sound), 主频决定了音准, 而谐波决定了音色。接下来的研究将集中探讨不同松紧度对主频和谐波的影响。

为了研究无预紧力情况下琴声的可重复性, 我们对相同音符进行了五次测试, 结果如图 5.3.2 所示。当琴弓无预紧力时, 主频有轻微变化 (大约  $\pm 1\text{Hz}$ ), 而振幅在 0.06 到 0.071 之间变化。这些变化幅度较小, 难以被人耳察觉。

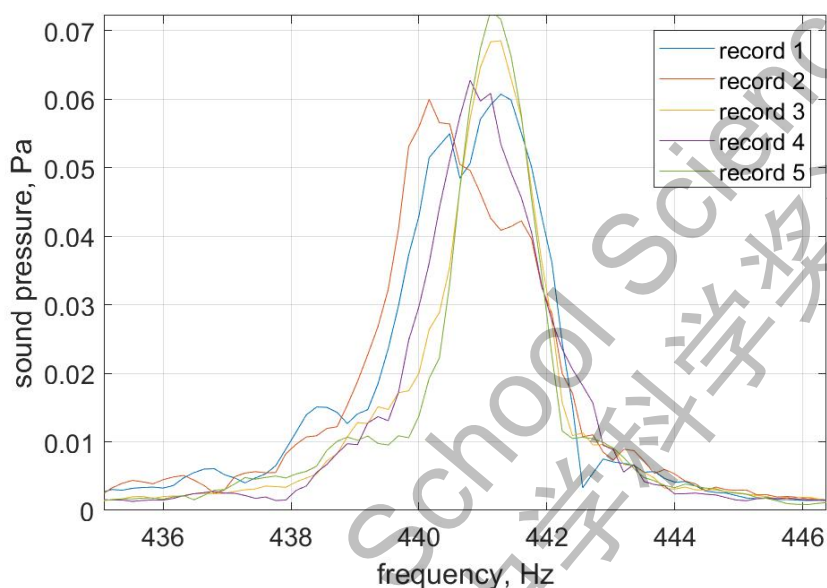
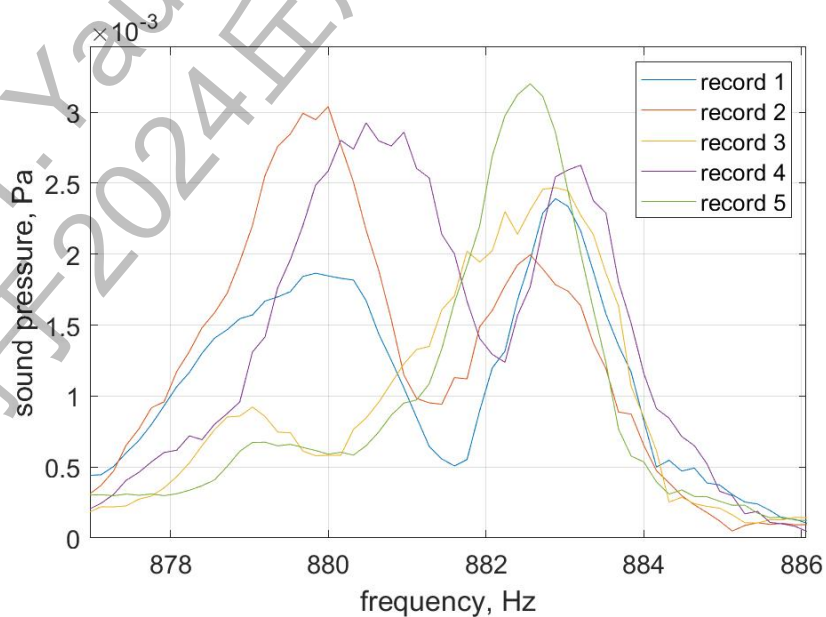
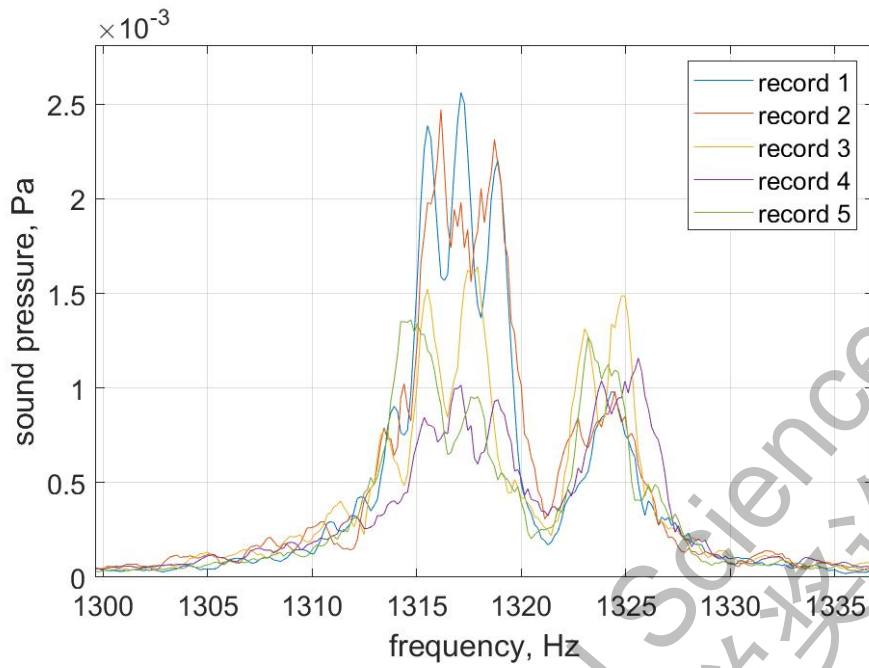


图 5.3.2: 琴声的主频的频谱

在谐波分析中, 振幅变化幅度更大, 如图 5.3.3(b) 所示, 频率为 800Hz 时声压变化从  $0.5 \mu\text{Pa}$  到  $3 \mu\text{Pa}$ , 而 1315Hz 时从  $0.5 \mu\text{Pa}$  到  $2.5 \mu\text{Pa}$ 。结合图 5.3.3(a) 和(b) 可以看出, 琴声中总存在两个相邻的音调, 这可能与弓毛在水平和垂直方向上的形状差异有关。



(a)

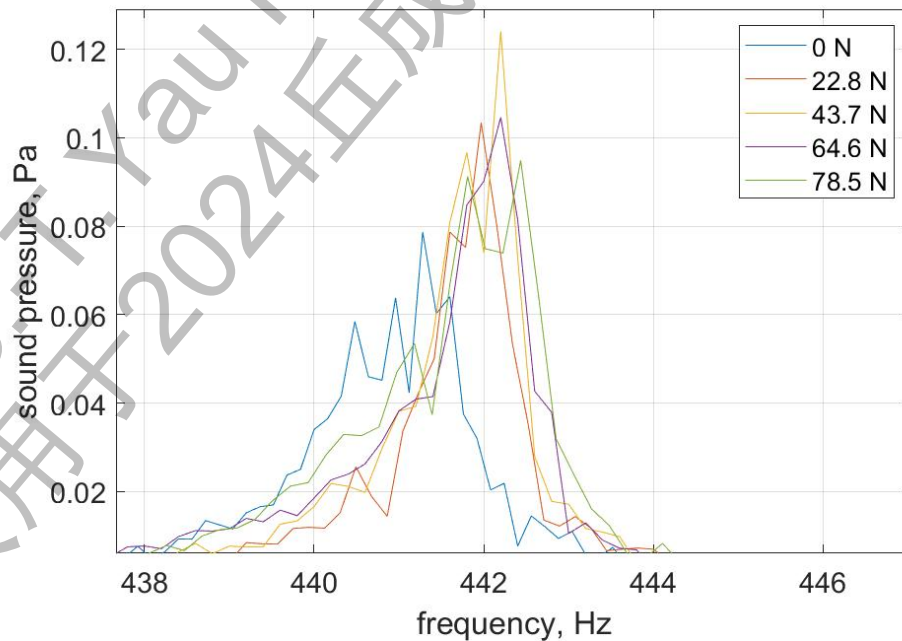


(b)

图 5.3.3: 没有预紧力时琴声的谐波的频谱

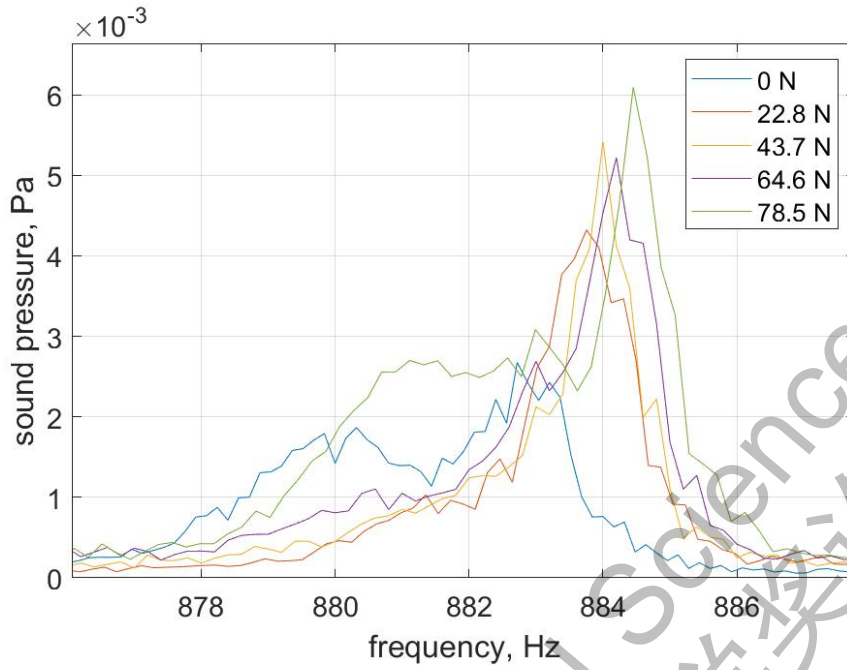
#### 5.4. 不同预紧力对琴声的影响

为了研究预紧力对小提琴发声的影响，我们使用不同松紧度的琴弓拉同一音符进行测试。预紧力分别为 22.8N、43.7N、64.4N 和 78.5N。每种预紧力下测试五次，并取平均值进行分析。结果如图 5.4.1(a) 所示，随着预紧力增大，小提琴发声频率向更高频率偏移。振幅可能取决于琴弓的共振频率，当琴弓的共振频率接近 440Hz 时，振幅增大；远离时振幅变化较小。



(a)





(b)

图 5.4.1: 不同预紧力时琴声主频和谐波的频谱

图 5.4.1(b) 展示了谐波频率的变化, 随着预紧力增大, 谐波的振幅和频率也增大。因此, 预紧力对主频的影响相对较小, 但对谐波有显著影响, 从而改变音色。

### 5.5. 可重复性分析

为探讨不同预紧力对小提琴拉琴可重复性的影响, 我们研究了不同预紧力下琴弓发出的琴声的声压和振幅变化。图 5.5.1 显示了主频的频谱, 随着预紧力增大, 440Hz 时最大声压级变化趋于均匀。当弓的自然频率与发声频率接近时, 变化最大, 导致可控性下降。

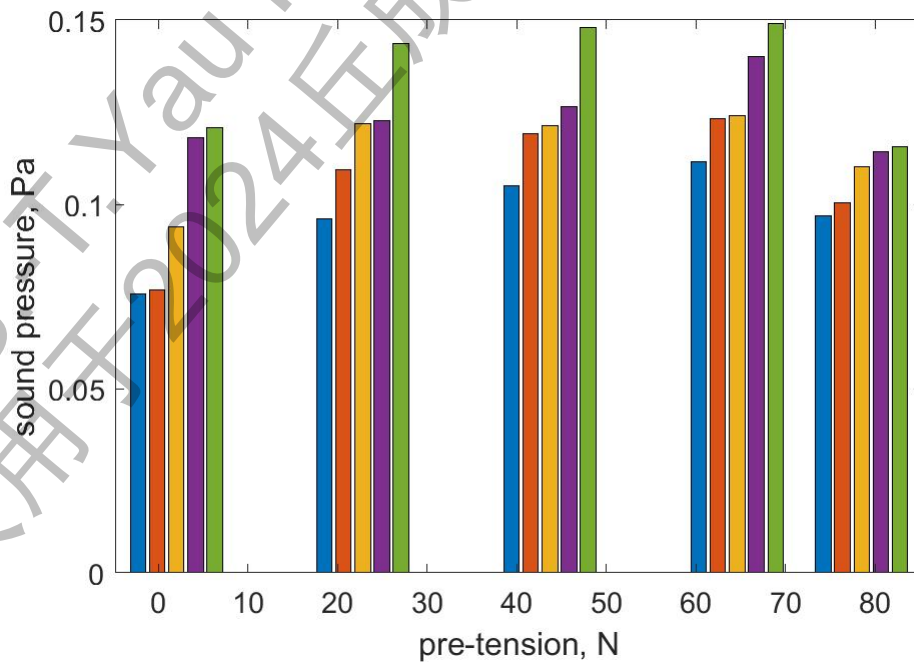


图 5.5.1: 主频振幅的频谱

图 5.5.2 展示了一次谐波的振幅频谱，随着预紧力增大，声压级的变化范围也增大，尽管这种变化在量级上远小于主频的音量，但对音色仍有潜在影响。

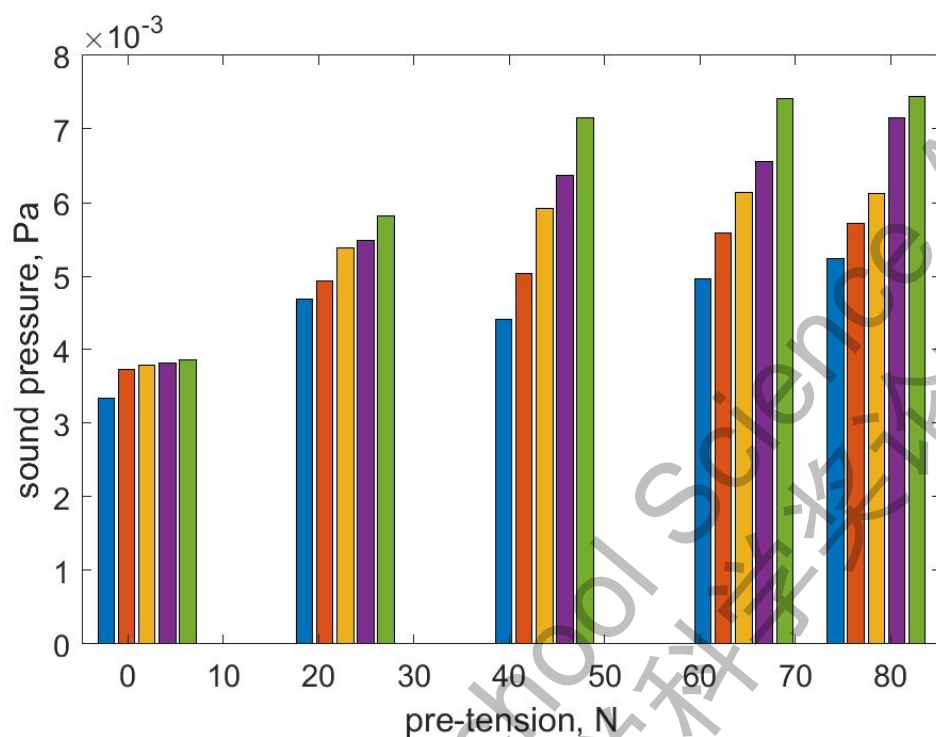


图 5.5.2: 一次谐波振幅的频谱

## 5.6. 结论

本章通过实验分析了不同预紧力对小提琴琴声频谱的影响。实验结果表明，预紧力过大会显著影响琴弓的谐波，从而改变音色；而预紧力过小则可能导致琴声的可重复性较差。因此，琴弓的预紧力需要适中，以确保最佳的音色和稳定的演奏效果。

## 第六章 结论和展望

本研究通过理论建模、有限元分析和实验验证，全面探讨了琴弓预紧力对小提琴演奏性能的影响，并对琴弓的材料特性进行了深入分析。

### 6.1. 主要结论

首先，我们利用理论建模分析了小提琴琴弓的初始形状，通过数学模型描述了弓杆的弯曲形态及其与施加力之间的关系。这一建模过程帮助我们理解了不同施力方式对琴弓形状的影响，并为后续的有限元分析提供了基础。通过对琴弓弯曲形状的理论推导，我们能够更准确地模拟琴弓在实际使用中的形态变化，为量化预紧力提供了科学依据。

在理论建模基础上，我们进行了有限元分析，反推了琴弓木材的杨氏模量，并通过实验验证了模型的准确性。通过多目标遗传算法，我们优化了杨氏模量的取值，并得到了与实际测量结果高度一致的挠度曲线。

实验部分则进一步探讨了不同预紧力对小提琴音色的影响。研究表明，琴弓的预紧力对小提琴的主频和谐波具有显著影响。随着预紧力的增大，小提琴的发声频率略有上升，但对主频的影响较小，而谐波部分的振幅和频率则显著受到预紧力的影响。预紧力越大，谐波的振幅越高，从而改变音色的特性。此外，实验还发现，过高或过低的预紧力会影响琴弓的可控性和演奏的稳定性。预紧力过大可能导致音色刺耳且难以控制，而预紧力过小则可能降低琴声的可重复性。

通过结合理论建模、有限元分析和实验数据，本研究得出结论：适中的预紧力能够平衡琴弓的音色和演奏稳定性，确保小提琴的最佳演奏效果。这一研究不仅深化了对琴弓声学特性的理解，也为演奏者在选择和调节琴弓时提供了科学依据。

### 6.2. 主要创新点

- 琴弓初始形状与预紧力的理论建模与分析：

通过理论建模详细分析了琴弓的初始形状及其在不同施力方式下的变形情况。这一部分研究深入探讨了琴弓的物理特性，揭示了预紧力如何通过改变琴弓的形状而影响演奏性能。该模型不仅为实验提供了理论支持，也为理解琴弓的设计与优化提供了新视角。

- 预紧力对琴声谐波特性影响的深入分析

系统地研究了不同预紧力下琴弓对小提琴音色的影响，特别是对谐波的影响。这一部分的研究不仅揭示了预紧力对琴声主频影响较小但对谐波影响显著的规律，还量化了这些影响。这种细致的分析为小提琴演奏者提供了关于如何调节琴弓以优化音色的科学依据，这在以往研究中较为少见。

- 琴弓可控性与演奏稳定性的综合评估

通过实验验证了不同预紧力对琴弓演奏可控性和稳定性的影响，提供了一个量化的评价体系。这一部分研究不仅考虑了声音的质量（如音色和音准），还考虑了演奏者的实际控制感受，为琴弓的设计与调节提供了更全面的参考。这种综合评估方法为未来的乐器研究提供了新的思路。

### 6.3. 展望

在本研究的基础上，我们展望了未来的几个关键研究方向，旨在进一步深化对琴弓预紧力与小提琴发声机制的理解。

首先，我们计划扩展当前研究，分析不同类型琴弓在发声可重复性方面的表现。通过研究不同材料、形状和设计的琴弓，我们希望揭示它们在音色稳定性和演奏性能方面的差异。这不仅有助于更深入地理解琴弓的物理特性，还可以为小提琴演奏者提供更加科学的琴弓选择依据。

其次，我们打算将本研究获得的琴弓预紧力和材料特性模型与弓毛和弓弦的互动模型相结合。通过这一整合，我们希望能够更加准确地模拟不同预紧力和材料条件下的小提琴发声特性。这将为未来的琴弓和小提琴设计提供更为精确的理论支持，并进一步提升音色的可控性和稳定性。

此外，我们计划开发新的实验技术和传感器系统，以实时监控弓弦在演奏过程中的振动情况。这项研究将涵盖弦的纵向和横向振动分析，以及不同演奏技术（如弓速、弓压、弓角）对弓弦振动的影响。通过对这些振动数据的建模，我们可以更好地理解弓弦的动态行为，为优化琴弓和琴弦的设计提供数据支持。

最后，我们希望研究如何将弓弦振动模型与小提琴整体发声模型相结合，以构建一个完整的声学系统模型。这个模型将整合琴弓、弦、琴体的动态相互作用，模拟小提琴在不同演奏条件下的音色和音量表现。通过这一研究，我们期望揭示弓弦振动如何通过琴体放大和辐射成声，并为改进小提琴的设计和演奏技术提供科学依据。

总的来说，这些未来的研究方向将进一步揭示小提琴发声的复杂机制，为琴弓和小提琴的设计提供新的思路，最终提升乐器的制作工艺和演奏技巧，为音乐家们提供更高质量的演奏工具。

## 参考文献

- [1] Saunders F A. The mechanical action of violins[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1937, 9(2): 81-98.
- [2] Rossing T D, Fletcher N H. Principles of vibration and sound[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Schoonderwaldt E. Mechanics and acoustics of violin bowing[J]. Freedom, constraints and control in performance, 2009.
- [4] Gough C. The violin: Chladni patterns, plates, shells and sounds[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2007, 145(1): 77-101.
- [5] Helmholtz H v and Ellis A J 1954 On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music (New York: Dover Publications)
- [6] Raman C V 1918 On the mechanical theory of vibrations of bowed strings Bulletin of the Indian Association for the Cultivation of Science 15 1-158
- [7] Schelleng J C 1973 Bowed String and Player J Acoust Soc Am 53 26-41
- [8] Friedlander F G 1953 On the oscillations of the bowed string Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 49 516-30
- [9] Cremer L 1974 Influence of Bow Pressure on Self-Excited Vibrations of Stringed Instruments Acustica 30 119-36
- [10] Bissinger G. Some mechanical and acoustical consequences of the violin soundpost[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97(5): 3154-3164.

## 致谢

我研究小提琴的原因是我自己学了快十年的小提琴，随着物理知识的逐渐积累，对小提琴的发生原理产生好奇。由于这份好奇，我对这个问题才展开分析和研究。但是在研究过程中，我发现琴声的物理原理比我想的复杂太多，需要学习非常多的物理知识，同时还需要学会很多数据分析、建模、有限元分析的软件并熟练掌握他们。同时，学术论文的写作对我来说也着实困难。在搭建实验装置时，我也遇到了许多问题，比如在固定实验装置时，没有考虑给装置的连接件留出被夹子夹住的位置；比如在导入琴弓图像时，图像不清晰导致了巨大误差，需要进行多次修改；比如在录制琴声时声音不清楚导致重录等问题。我的理论分析、实验以及有限元分析都进行了多次的修改，每一次的修改都加入了新的考虑因素。我要郑重地感谢许多人对我的帮助。这些帮助不仅仅体现在这份研究的改进和完成，更在于对我物理思想上的启发和我研究方法的提点。

首先，我要感谢我的指导老师袁丽华老师对我的指导的鼓励。在进入高中之后，袁老师的物理课激发了我对物理的兴趣。我对琴弓的力学研究以及发声原理的理解以及对于很多理论的推导离不开袁老师的教导和提点。当我遇到问题的时候，袁老师总会第一时间帮我进行分析并尝试解答，也曾告诉我许多解答思路，让我豁然开朗。袁老师同时也简单教授了我一些论文写作的技巧，让我在写论文时轻松许多。

其次，我要感谢我的父母对我的帮助和支持。他们在我做实验时给予我鼓励，让我在研究的时候有了坚实的依靠，也进展的更加顺利。他们在背后的付出有时比理论上的支援更为重要，也是我完成这项研究不可或缺的一部分。

最后，我要感谢丘成桐中学科学奖的主办方和工作人员给予我宝贵的机会参与这次比赛，能够让我有机会将对物理的探索呈现出来。

正是您们给予的机会、支持和帮助能让我完成这篇学术论文，在此我深表感谢！