参赛学生姓名：韩卓毅，刘雨菲

中学：华南师范大学附属中学

省份：广东省

国家/地区：中国华南

指导老师姓名：桂鹏、张赞波

指导老师单位：华南师范大学附属中学、 广东财经大学

论文题目：圆有向图的圈结构及围长求解算法

论文题目： 圆有向图的圈结构及围长求解算法

作者： 韩卓毅 刘雨菲

论文摘要： 本文主要对圆有向图的圈结构进行理论分析，并解决其围长的计算问题。文章回顾了圈结构的研究进展，尤其是Bondy关于泛圈性的元猜想以及有向图哈密尔顿性和泛圈性研究现状。局部半完全有向图是竞赛图和半完全有向图的推广，是一类重要的有向图类。在这类图的圈结构研究中，出现了圆可分解性和圆有向图，它们是构造非泛圈局部半完全有向图的关键。因此，深入理解圆有向图的圈结构是局部半完全有向图圈研究的一项基础性工作。本文引入了圆有向图中的最远出邻居、极小圈和完美圈等概念，证明了最远出邻居的夹逼性质和一系列关于圈长的命题，阐明了圆有向图中完美圈、极小圈与最短圈之间的紧密联系，并进一步给出刻画了圆有向图的最短圈长（围长）的定理。在此基础上，本文设计了一种基于最远出邻居递归搜索的线性时间算法，用于高效计算圆有向图的围长，并证明了算法的正确性和复杂度。此研究不仅加深了对圆有向图圈结构的理解，也为有向图圈结构分析提供了新的方法论工具。

关键词： 圆有向图，哈密尔顿圈，泛圈性，局部半完全有向图，围长

目录

一、 前言：背景、简介与定义

问题的背景

哈密尔顿问题源自对多面体顶点遍历的思考。爱尔兰数学家 William Rowan Hamilton（哈密尔顿）最早在研究正二十面体对称性时，提出了在正二十面体的骨架上寻找一条恰好经过每个顶点一次并回到起点的闭合多边形这一问题。此构想后来演化为图论中哈密尔顿圈的基本概念。哈密尔顿圈指图中包含所有顶点的圈；而图的哈密尔顿性是指图中存在哈密尔顿圈。随着图论和计算机科学的发展，人们发现在一般图上判断是否存在哈密尔顿圈是一个 NP-完全问题，随意给定一个图求解其哈密尔顿圈在计算上极具挑战性。因此，寻找存在哈密尔顿圈的充分条件以及高效算法成为组合优化与图论中的研究热点。

哈密尔顿圈的存在性回答了图中是否存在一条覆盖所有顶点的极长圈这一问题，但这一回答并不足以反映图中圈结构的丰富程度。早期工作发现许多能保证哈密尔顿性的充分条件实际上还能推出更强的结论。Bondy 在 1976 年提出了一个著名的元猜想（[1]），认为几乎所有非平凡的哈密尔顿充分条件都不仅能导出哈密尔顿圈的存在，还能进一步导出泛圈性，即图同时包含从 3 到n的各种圈长（n为图的顶点数目）的性质。这为后续的泛圈性以及多种多样的路圈性质研究奠定了基础。

随着对图的圈结构研究的迅速进展，Gould 提出了系统性的综述，特别针对无向图的哈密尔顿性与泛圈性问题进行深入探讨。他先后发表了三篇代表性的综述（[2,3,4]），各自具有鲜明的侧重点，互为补充形成连贯叙述。1991 年的第一篇综述（[2]）整合了圈理论到上世纪九十年代初为止的经典结果，集中讨论了如何用最小度条件与连通度条件确立图的哈密尔顿性与可迹性，为后续研究提供了关于哈密尔顿性与其他圈性质的基本理论框架。2003 年的第二篇综述（[3]）通过泛圈性问题的引入，拓宽了对圈长及其全谱的研究视野，尤其是对如何通过图的全局结构来保障存在多种长度的圈，对本项目圆有向图中的圈问题提供了直接启示。2014 年的第三篇综述（[4]）对前两篇综述发表以后的进展作了进一步

整合，关注点包括在特定禁用子图条件下的泛圈性、含指定顶点的圈问题及邻域联合条件等，为无向情形在更细致结构约束下的圈存在性提供了系统参考。

另一方面，有向图的圈问题在结构和技术上更为复杂，挑战性更强。这促使研究者发展出专门的技术和方法论来应对。英国 Birmingham 大学的 Kühn 和 Osthus 团队在有向图和超图的圈理论方面取得了很多突破性的成果，解决了若干经典的问题和猜想。因此，他们获邀在 2014 年国际数学家大会（ICM）上作专题报告，介绍相关的成果。他们对于有向图圈研究的进展作出了综述（[5]），系统梳理了有向图、定向图和竞赛图中哈密尔顿圈研究的最新进展。在综述中，他们强调了稳健扩张法与吸收法的协同作用，并展示了这些工具在解决一些长期的猜想和构造哈密尔顿分解时的效用，同时列举了若干依然开放的问题。

定义与符号

本文主要研究一类有向图类即圆有向图的圈结构。以下先给出一些定义与符号。本文中考虑的是有限有向图，并假定图中没有自环和没有重弧。当我们谈到圈和路径时，均指有向圈和有向路径。设D是一个有向图，以$V(D)$表示D的顶点集，以n或者$|D|$表示D的顶点数目。D的边带有方向，通常称为弧，且D的弧集以$A(D)$表示。任取$u, v \in V(D)$。如果存在一条从u到v的弧，则记作$u \to v$；否则记作$u \nrightarrow v$。有时我们采用连续的方式来表示收尾相接的弧，例如$u \to w \to v$表示存在一条从u到w的弧以及一条从w到v的弧，并依此类推。

有向图D中长为k的圈称为k-圈，D的最短圈的长度称为D的围长，并记为$g(D)$。如果对于D中任意两个顶点u和v，都存在从u到v的路径和从v到u的路径，我们说D是强连通的，或简称为强的。当D中存在一个哈密尔顿圈时，D必然是强连通的，因此强连通性是哈密尔顿性和泛圈性的必要条件，且我们大部分情况下讨论强连通的有向图。设P是D中的一条路径，x和y是P上的两个顶点，记$P[x, y]$为从x到y的子路径；$P(x, y)$为从x到y但不包含x和y的子路径。类似地定义$P[x, y]$和$P(x, y)$。设a和b是两个整数，记$[a, b]$为介于 a 和 b 之间的整数集合。当$a = 1$ 时，我们将$[1, b]$ 简记为$[b]$。

设F是D的一个子有向图。为简洁起见，我们有时用F来同时表示它的顶点集和弧集，并使用$u \in F$、$a \in F$这样的表达式分别表示u是F的一个顶点、a是F的一条弧。

竞赛图（tournament）是指在任意一对顶点之间恰好存在一条弧的有向图。有向图D称为半完全有向图，如果在D的任意一对顶点之间至少存在一条弧。因此，半完全有向图类（semicomplete digraph, SD）包含竞赛图类。令S为D的一个顶点子集，所谓S的诱导子图指的是由S构成顶点集并保留原图中所有在两端在S中的弧而得到的子图。若对D中每个顶点u，其入邻居所诱导的子图是半完全有向图，则称D为局部入半完全有向图；类似地，若每个顶点的出邻居所诱导的子图是半完全有向图，则称为局部出半完全有向图。若一个有向图既是局部入半完全有向图又是局部出半完全有向图，则称其为局部半完全有向图（locally semicomplete digraph, LSD）。LSD 是 SD 的重要推广形式，且已被广泛研究。

研究动机

在图论中，一个普遍周知的事实是竞赛图和半完全有向图都具有丰富的路性质和圈性质。一个常受关注的比哈密尔顿性和泛圈性更为加强的性质是顶点泛圈性，即对于图中任意一个顶点和满足 $3 \le k \le n$的k，都存在包含该顶点的长度为k的圈。强连通的 SD 不仅是哈密尔顿的，而且是顶点泛圈的。自然地，人们关注 LSD 是否能保持与 SD 相同的路圈性质。受到这一问题的驱动，研究者已经证明强连通 LSD 是哈密尔顿的。然而，对于 LSD 的泛圈性，存在一类例外图，如下面的定理所指出。

若一个有向图R有n个顶点，则称其为圆有向图，如果我们可以将其顶点标记为 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$，使得对每个$i$有：

$$N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \ldots, v_{i+d^+(v_i)}\}, N^-(v_i) = \{v_{i-d^-(v)}, \ldots, v_{i-1}\}$$

其中下标按 n 取模。我们称$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$为$R$的一个圆序列。容易验证圆有向图总是 LSD。如果一个圆有向图中，任意两个顶点之间都没有双向的弧（或者等价

地说图中没有 2-圈），则称其为圆局部竞赛图。一个 LSD D称为圆可分解的，如果它可以表示为

$$D = R[S_1, S_2, \ldots, S_r],$$

其中R是一个具有r个顶点$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$的圆局部竞赛图，且$D$是由$R$通过以下方式得到：将$R$中的每个顶点$v_i$替换为一个强连通半完全有向图 S_i；将每条弧$v_i v_j$替换为从$V(S_i)$到$V(S_j)$的所有弧。这样的分解称为D的圆分解。

定理 1.1. （[6]）一个强连通 LSD D是泛圈的，当且仅当它不能具有如下的圆分解

$$D = R[S_1, S_2, \ldots, S_r],$$

其中R是一个圆局部竞赛图，并且

$$g(R) > max\{2, |V(S_1)|, |V(S_2)|, \ldots, |V(S_r)|\} + 1. \quad \square$$

根据 Bang-Jensen 与 Gutin 等关于有向图与竞赛类结构的研究（[7]），一个强连通圆局部半完全有向图R具有从 $g(R)$到 $|R|$ 的所有长度的圈。因此，当$g(R) > 3$ 时，R本身就构成 LSD 泛圈性的例外图。而将R的顶点替换为强连通的 SD 有助于补足长度从 3 到$max\{|S_i|: 1 \le i \le r\}$的圈，因为强连通 SD 是泛圈的。而若$g(R) > max\{|S_i|: 1 \le i \le r\} + 1$，则在长度从$max\{|S_i|: 1 \le i \le r\} + 1$ 到$g(R) - 1$ 之间仍然会有缺失的圈长，因此D不是泛圈的。由此可见，确定圆局部竞赛图的围长对判断一个圆可分解有向图是否泛圈是很重要的，而对于圆局部竞赛题以及更广范围的圆有向图的圈结构的理解，对于局部半完全有向图的圈结构分析起着基础性的作用。因此，本文关注圆有向图的圈结构，对其作理论分析并设计相关算法。

根据定义，强连通圆有向图必然包含哈密尔顿圈 $H = v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_0$ ，并且顶点v_i的出邻居从v_{i+1}起在H上依次排列，距离v_i　最远的出邻居为$v_{i+d^+(v_i)}$，本文中称之为v_i的最远出邻居。如果我们从任意一个顶点出发，不断访问它的最远

出邻居，直到回到出发点，这就形成了一个短圈，我们称之为极小圈。直观上，我们可能期望在所有极小圈中找到全局的最短圈，这可以视为是一种贪婪策略。本文证明了一些关于极小圈与圆有向图围长之间关系的结果，从而验证了这种贪婪策略的正确性。我们的结果还表明，在许多情况下，我们可以不需要检查完所有的极小圈就找出最短圈。基于这些发现，我们得到了一个线性算法来计算给定圆有向图的围长。

二、 极小圈、完美圈与最短圈

首先我们给出若干在圆有向图中特有的圈与路的定义。这里仅考虑强连通的圆有向图。设R是一个强连通的圆有向图，其顶点的圆序列为$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$。由于$R$是强连通的，因此每个顶点至少有一个出邻居。由此可知$v_i \to v_{i+1}$，并且 $H = v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_0$是$R$的一个哈密尔顿圈。

由于在哈密尔顿圈H上，顶点$v_{i+d^+(v_i)}$是 v_i 的最远出邻居，我们相应地称弧$v_i v_{i+d^+(v_i)}$为顶点v_i的最远出弧。设v_i是R的一个顶点，对于一条长度至少为 2 的路径 $v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_p}$，其中$v_{i_1} = v_i$。若其中每一条弧都是某个顶点的最远出弧，则称其为一个极小路径，并称其开始于顶点vi。对于一个圈$C = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_p} v_{i_1}$，$p \geq 2$，如果除最后一条弧 $v_{i_p} v_{i_1}$ 外，其余每一条弧都是最远出弧，并且对所有 $1 \leq j < p$ 有弧$v_{i_j} \nrightarrow v_{i_1}$，换句话说 v_{i_p}是第一个能够回到v_{i_1}的顶点，那么我们称C是一个开始于顶点v_{i_1}的极小圈。如果更进一步，弧$v_{i_p} v_{i_1}$也是最远出弧，那么我们称C是一个完美圈。

如果一条极小路径$v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_p} v_{i_{p+1}}$（$p \geq 2$）在哈密尔顿圈$H$上的顶点出现顺序为$v_{i_1}, v_{i_{p+1}}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p}$，那么称这条极小路径为首次交叉极小路径。注意这实际上意味着$v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_p} v_{i_1}$是一个极小圈。

以下的结论将在本文的证明中多次使用。出于以下原因，我们类比分析学中的名词，称其为夹逼性质。假设有三个顶点，其中第三个顶点在哈密尔顿圈H上位于前两个顶点之间。如果我们分别从这三个顶点出发，分别不断地沿着各自的最远出邻居前进，得到三个顶点序列，那么第三个序列上的顶点始终保持在前两个序列的对应顶点之间。在许多情况下，前两个序列会在某一点重合，那么第三个序列也必然与它们重合。

引理 2.1（夹逼性质）. 设R是一个强连通圆有向图，且$H = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$ 是由其圆序列形成的哈密尔顿圈。设u, v, w是R的三个顶点，且$v, w \in H[u, u']$，又分别记uu'、vv'、ww'为顶点u, v, w 的最远出弧。如果 $w \in H[u, v]$，则有$w' \in H[u', v']$。特别是，如果 $u' = v'$，则必然有 $w' = u' = v'$。

证明：首先证明顶点u, w, u', w'在H上按次序出现。假设不然，它们在H上的顺序是u, w, w', u'。根据圆序列的定义以及$u \to u'$，可推出$w \to u'$，这与 w'是w的最远出邻居相矛盾。因此 u, w, u', w'必须依次出现在H上。类似地，可以推出u, v, u', v'依次出现在H上，和w, v, w', v'依次出现在H上。综合前述，u', w', v'依次出现在H上，于是有$w' \in H[u', v']$。若$u' = v'$，则显然 $w' = u' = v'$。□

以下我们证明几个阐明极小圈、完美圈以及最短圈之间关系的命题。

命题 1. 设R是一个强连通圆有向图，v是R的一个顶点，从v开始的最短圈是包含v的所有圈中最短的。

证明. 设$C_1 = v_{i_1} v_{i_2}' \dots v_{i_p}' v_{i_1}$是包含$v = v_{i_1}$的最短圈。考虑$v_{i_1}$的最远出弧$v_{i_1} v_{i_2}$。显然$v_{i_2} \notin \{v_{i_{j-1}}: 3 \le j \le p\}$，否则会得到比$C_1$更短的包含$v_{i_1}$的圈。特别地，$v_{i_2} \in H(v_{i_1}, v_{i_3}')$。

如果$v_{i_2} \ne v_{i_2}'$，则$v_{i_1}, v_{i_2}', v_{i_2}, v_{i_3}'$在$H$上依次出现。根据圆有向图的定义及$v_{i_1} \to v_{i_2}' \to v_{i_3}'$，可得$v_{i_1} \to v_{i_2} \to v_{i_3}'$。因此，可以在$C_1$中用$v_{i_2}$替换$v_{i_2}'$，得到长度相同的圈$C_2$。若$v_{i_2} = v_{i_2}'$，则令$C_2 = C_1$。

重复上述过程：对于 $1 \le j \le p-2$，设v_{i_j}的最远出弧为$v_{i_j}v_{i_{j+1}}$，在C_j中：若$v_{i_{j+1}} = v_{i_{j+1}}'$，则令$C_{j+1} = C_j$；否则用$v_{i_{j+1}}$替换$v_{i_{j+1}}'$，得到$C_{j+1}$。

最后处理$v_{i_{p-1}}$的最远出弧$v_{i_{p-1}}v_{i_p}$。由于$v_{i_{p-1}} \nrightarrow v_{i_1}$（否则会得到更短的圈），所以$v_{i_p} \in H(v_{i_{p-1}}, v_{i_1})$。在$C_{p-1}$中用$v_{i_p}$替换$v_{i_p}'$，得到圈$C_p$。此时$C_p$即为从$v = v_{i_1}$开始的极小圈，且其长度与$C_1$相同。这就说明所有包含$v$的圈中，从$v$开始的极小圈是经过$v$的最短的圈之一。□

命题 2. 设R是一个强连通圆有向图，若R存在完美圈，则该完美圈是所有圈中最短的。

证明. 设R的圆序列为$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$，则$H = v_0 v_1 \dots v_{n-1}$是$R$的一个哈密尔顿圈。设$R$中存在一个完美圈$C_1 = v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_{k-1}} v_{\alpha_0}$，又假设$R$中存在更短的圈$C_2 = v_{\beta_0} v_{\beta_1} \dots v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_0} (p < k)$。现基于$C_2$上的顶点将$H$划分$p$段：

$$H_0 = v_{\beta_0} v_{\beta_{0+1}} \dots v_{\beta_0 - 1} = H[v_{\beta_0}, v_{\beta_1 - 1}]$$

$$H_1 = v_{\beta_1} v_{\beta_{1+1}} \dots v_{\beta_2 - 1} = H[v_{\beta_1}, v_{\beta_2 - 1}]$$

$$\dots$$

$$H_{p-1} = v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_{p-1+1}} \dots v_{\beta_0 - 1} = H[v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_0 - 1}]$$

由于C_1是完美圈，$v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_{k-1}}$在$H$上依次出现。由$p < k$，存在$j$使得$v_{\alpha_j}$和$v_{\alpha_{j+1}}$同属某个$H_i$。此时$v_{\beta_i}, v_{\alpha_j}, v_{\alpha_{j+1}}, v_{\beta_{i+1}}$在$H$上依次出现。由$v_{\beta_i} \to v_{\beta_{i+1}}$及圆有向图的性质，得$v_{\alpha_j} \to v_{\beta_{i+1}}$，这与$v_{\alpha_j} v_{\alpha_{j+1}}$是最远出弧矛盾。因此，若$R$上存在完美圈，则其上不存在更短的圈，故完美圈是最短圈。□

命题 3. 设R是一个强连通圆有向图，若R包含长度为p的完美圈，则从任意顶点开始的极小圈长度为p或$p+1$。

证明. 设R的圆序列为$v_0, v_1 \dots v_{n-1}$，则$H = v_0, v_1 \dots v_{n-1} v_0$是$R$的哈密尔顿圈。设$R$中的完美圈为$C_1 = v_{\beta_0} v_{\beta_1} \dots v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_0}$。类似于上一个证明，可将$H$划分为$p$段：

$$H_0 = v_{\beta_0} v_{\beta_0+1} \dots v_{\beta_1-1} = H[v_{\beta_0}, v_{\beta_1-1}]$$

$$H_1 = v_{\beta_1} v_{\beta_1+1} \dots v_{\beta_2-1} = H[v_{\beta_1}, v_{\beta_2-1}]$$

$$\dots$$

$$H_{p-1} = v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_{p-1}+1} \dots v_{\beta_0-1} = H[v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_0-1}]$$

考虑任意$w \in V(H) \setminus V(C_1)$及其最远出弧$ww_0$。若存在$i \in [0, p-1]$使$w, w_0 \in H_i$，则由圆有向图定义可得$w \rightarrow v_{\beta_{i+1}}$（模$p$加法），这与$ww_0$为最远出弧矛盾。故$w$与$w_0$必分属不同的$H_i$。

若$w \in H_i$且$w_0 \in H_{i+s}$，其中 $2 \le s \le p-1$，同时$w_0 \ne v_{\beta_{i+2}}$，则w, $v_{\beta_{i+1}}$, $v_{\beta_{i+2}}$, w_0在H上依次出现。由$w \rightarrow w_0$可得$v_{\beta_{i+1}} \rightarrow w_0$，这与$v_{\beta_{i+1}} v_{\beta_{i+2}}$为最远出弧矛盾。因此对任意最远出弧$ww_0$，必有：

$w \in H_i$且$w_0 \in H_i + 1$，或$w \in H_i$且$w_0 = v_{\beta_{i+2}} (i \in [0, p-1])$。(2)

不失一般性，考虑一个起始于$H_0 \setminus \{v_{\beta_0}\}$中的顶点的极小圈。记起点为$v_{\alpha_0}$，极小圈为$C_2 = v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_{k-1}} v_{\alpha_0} (|C_2| = k)$。对于$C_2$上每个顶点$v_{\alpha_i}$，若$v_{\alpha_i} \in H_j$，由(2)知$v_{\alpha_{i+1}} \in H_{j+1}$或$v_{\alpha_{i+1}} = v_{\beta_{j+2}}$。设$i$为使$v_{\alpha_i} \in H_j$且$v_{\alpha_{i+1}} = v_{\beta_{j+2}}$的最小整数，则对所有 $0 \le s \le i$有$v_{\alpha_s} \in H_S$，且$v_{\beta_{i+1}} = v_{\beta_{i+2}}$。从$v_{\beta_{i+1}} = v_{\beta_{i+2}}$开始，$C_2$将与$C_1$重合直至返回起点$v_{\alpha_0}$。因此$C_2 = v_{\alpha_0} \dots v_{\alpha_i} v_{\beta_{i+2}} \dots v_{\beta_0} v_{\alpha_0}$，其长度为$(i+1) + (p - (i+1)) = p$，结论成立。

现假设对C_2上所有v_{α_i}，均有若$v_{\alpha_i} \in H_j$则$v_{\alpha_{i+1}} \in H_{j+1}$。由$v_{\alpha_0} \in H_0$可得$v_{\alpha_i} \in H_i (0 \le i \le p-1)$，且$C_2$长度至少为$p$。若$v_{\alpha_{p-1}} \rightarrow v_{\alpha_0}$，则$C_2 = v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_{p-1}} v_{\alpha_0}$，其长度为$p$；若$v_{\alpha_{p-1}}$不可达$v_{\alpha_0}$，设$v_{\alpha_{p-1}}$的最远出邻居为位于$H$上$v_{\beta_0}$与$v_{\alpha_0}$之间的$v_{\alpha_p}$，则$C_2 = v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_{p-1}} v_{\alpha_p} v_{\alpha_0}$，其长度为$p+1$。故$C_2$长度为$p$或$p+1$，结论得证。□

前 3 个命题说明了若图中存在完美圈，完美圈必定是最短的圈，这是符合直觉的。以下的命题则揭示一个更为深刻的事实：若图中没有完美圈，那么图中所

有的极小圈却有着相同的长度。

命题 4. 设R是一个强连通圆有向图，若R中不存在完美圈，则所有极小圈长度相同且均为R中最短圈。

证明. 设R的圆序列为$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$。则$H = v_0 v_1 \ldots v_{n-1} v_0$是$R$的哈密顿圈。依假设，$R$中不存在完美圈。则从每个顶点出发都形成首次交叉极小路径。设其中一条为$P_1 = v_{\beta_0} v_{\beta_1} \ldots v_{\beta_p}$，对应存在极小圈$C_1 = v_{\beta_0} v_{\beta_1} \ldots v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_0}$，$|P_1| = p + 1$且$|C_1| = p$，而且$v_{\beta_0}, v_{\beta_p}, v_{\beta_1}$在$H$上依次出现。定义：

$$H_0 = v_{\beta_0} v_{\beta_{0+1}} \ldots v_{\beta_{1-1}} = H[v_{\beta_0}, v_{\beta_1 - 1}]$$

$$H_1 = v_{\beta_1} v_{\beta_{1+1}} \ldots v_{\beta_{2-1}} = H[v_{\beta_1}, v_{\beta_2 - 1}]$$

$$\cdots$$

$$H_{p-1} = v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_{p-1+1}} \ldots v_{\beta_{p-1}} = H[v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_p - 1}]$$

注意到H_{p-1}与H_0存在重叠部分：$H_C = H_{p-1} \cap H_0 = v_{\beta_0} \ldots v_{\beta_p - 1}$。同时定义：

$$H_0{}^* = H_0 - V(H_{p-1}) = v_{\beta_p} v_{\beta_{p+1}} \ldots v_{\beta_1 - 1} = H[v_{\beta_p}, v_{\beta_1 - 1}]$$

$$H_{p-1}{}^* = H_{p-1} - V(H_0) = v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_{p-1+1}} \ldots v_{\beta_{0-1}} = H[v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_0 - 1}]$$

考虑$w \in V(H) \setminus V(P_1)$及其最远出弧$ww'$。类似命题 3 证明中的讨论，$w$与$w'$不能在同一个$H_i$上，且满足：

对任意的最远出弧ww'，要么$w \in H_i$且$w' \in H_{i+1}$，

要么$w \in H_i$且$w' \in v_{\beta_{i+2}}$（其中$i \in [0, p-1]$）。(3)

注意(3)中的陈述涵盖了$w \in H_C$的情况（视为$w \in H_0$，故$w' \in H_1$或$w' = v_{\beta_2}$）。对于满足$w \in H_i$且$w' = v_{\beta_{i+2}} (i \in [p-1])$的$w$，称$ww'$为关于$P_1$的跃迁弧（当$P_1$明确时可简称为跃迁弧）。

现不妨设P_1是R中最长的首次交叉极小路径。设P_2是R中另一长度为q的首次交叉极小路径。由于从任意顶点w出发的极小圈长度等于从w出发的极小路径长度，只需证明$p = q$或$|P_2| = |P_1|$。根据P_2是否存在关于P_1的跃迁弧分两种情况讨论。

情况 1. P_2中存在至少一条跃迁弧。设P_2中第一条跃迁弧为ww'，其中$w \in H_i$

且$w' = v_{\beta_{i+2}}$。设P_2的起点$x \in H_j$。

情况 1.1 $0 \le j < i$，且若$j = 0$ 则$x \in {H_0}^*$。

此种情况下，P_2在w之前的一段不经过H_C。因此每个$H_k(j \le k \le i)$恰含一个P_2上的顶点且互不相同。记P_2在H_k中的顶点为v_{α_k}，则$x = v_{\alpha_j}$，$w = v_{\alpha_i}$，$w' = v_{\beta_{i+2}}$，且P_2从$v_{\beta_{i+2}}$到v_{β_i}与P_1重合。P_2的前段为：$v_{\alpha_j} v_{\alpha_{j+1}} \dots v_{\alpha_i} v_{\beta_{i+2}} \dots v_{\beta_p}$。

根据对于j的假设，P_2在v_{β_p}尚未形成一条完整的首次交叉路，故需从v_{β_p}继续延伸。记v_{β_p}的最远出邻居为$v_{\beta_1'}$，其中$v_{\beta_1'} \in H_1$或$v_{\beta_1'} = v_{\beta_2}$。若$v_{\beta_1'} = v_{\beta_1}$，则得完美圈$v_{\beta_p} v_{\beta_1} v_{\beta_2} \dots v_{\beta_p}$，矛盾；若$v_{\beta_1'} = v_{\beta_2}$，则得完美圈$v_{\beta_p} v_{\beta_2} \dots v_{\beta_p}$，亦矛盾。故$v_{\beta_1'} \in H_1 \setminus \{v_{\beta_1}\}$。

对于 $1 \le t \le i$，递归地定义$v_{\beta_t'}$的最远出邻居为$v_{\beta_{t+1}'}$。类似于上述，可证明$v_{\beta_t'} \in H_t \setminus \{v_{\beta_t}\}(1 \le t \le i)$。注意到

$$H_t \setminus \{v_{\beta_t}\} = H_t\big(v_{\beta_t}, v_{\beta_{t+1}-1}\big] = H_t\big(v_{\beta_t}, v_{\alpha_t}\big) \cup [v_{\alpha_t}, v_{\beta_{t+1}-1}],$$

以下进一步证明$v_{\beta_t'} \in H_t(v_{\beta_t}, v_{\alpha_t})$。否则，假设存在 $1 \le s \le i$ 使得$v_{\beta_s'} \in H_s[v_{\alpha_s}, v_{\beta_{s+1}-1}]$，由夹逼性质得$v_{\beta_t'} \in H_t\big[v_{\alpha_t}, v_{\beta_{t+1}-1}\big]$对于$s \le t \le i$成立。此时$v_{\beta_i'} \in H_i[v_{\alpha_i}, v_{\beta_{i+1}-1}]$，而$v_{\alpha_i} v_{\beta_{i+2}}$与$v_{\beta_{i+1}} v_{\beta_{i+2}}$均为最远出弧，故$v_{\beta_i'}$的最远出弧必为$v_{\beta_i'} v_{\beta_{i+2}}$。但此时存在完美圈$v_{\beta_i'} v_{\beta_{i+2}} \dots v_{\beta_p} v_{\beta_1'} \dots v_{\beta_i'}$，矛盾。因此

$$v_{\beta_t'} \in H_t(v_{\beta_t}, v_{\alpha_t})(1 \le t \le i)。$$

特别地有$v_{\beta_j'} \in H_t(v_{\beta_j}, v_{\alpha_j})$，$P_2$必须延伸至$v_{\beta_{j+1}'}$以形成交叉。故

$$P_2 = v_{\alpha_j} v_{\alpha_{j+1}} \dots v_{\alpha_i} v_{\beta_{i+2}} \dots v_{\beta_p} v_{\beta_1'} \dots v_{\beta_j'} v_{\beta_{j+1}'},$$

其顶点数为：$|P_2| = (i - j + 1) + (p - (i + 2) + 1) + (j + 1) = p + 1 = |P_1|$。结论成立。

情况 1.2. $i < j \le p - 1$。

注意当$j = p - 1$ 时允许$x \in H_C$，这涵盖了情况 1.1 中$j = 0$ 时未讨论的部分。

由假设ww'是P_2中首次跃迁弧，故每个$H_t(j \le t \le p-1$ 或 $0 \le t \le i)$恰含一个P_2顶点。

以下证明P_2不能经过H_C。若P_2有顶点在H_C中，则该顶点是P_2在$H_{p-1} \cup H_0$中的唯一顶点，记为v_{α_0}。P_2在$H_t(j \le t \le p-2$ 或 $1 \le t \le i)$中的顶点则记为v_{α_t}（注意$v_{\alpha_i} = w$）。以下延伸P_2。定义$v_{\beta_1'}$为v_{β_p}的最远出邻居，并递归定义$v_{\beta_{t+1}'}$为$v_{\beta_t'}$的最远出邻居$(1 \le t \le i)$。有$v_{\beta_p} \in H_0[v_{\alpha_0}, v_{\beta_{1-1}}]$。由夹逼性质得$v_{\beta_1'} \in H_1[v_{\alpha_1}, v_{\beta_{2-1}}] \cup \{v_{\beta_2}\}$。但若$v_{\beta_1'} = v_{\beta_2}$会产生完美圈$v_{\beta_p}v_{\beta_2}\ldots v_{\beta_p}$，矛盾。故$v_{\beta_1'} \in H_1[v_{\alpha_2}, v_{\beta_{2-1}}]$。类似可得$v_{\beta_t'} \in H_t[v_{\alpha_t}, v_{\beta_{t+1-1}}](1 \le t \le i)$。特别地$v_{\beta_i'} \in H_i[v_{\alpha_i}, v_{\beta_{i+1-1}}]$。因$v_{\alpha_i} = w$与$v_{\beta_{i+1}}$有共同最远出邻居$v_{\beta_{i+2}}$，故$v_{\beta_{i+1}}$的最远出邻居也必为$v_{\beta_{i+2}}$（夹逼性质中三个序列重合的情况）。但此时存在完美圈$v_{\beta_1'}\ldots v_{\beta_i'}v_{\beta_{i+2}}\ldots v_{\beta_p}v_{\beta_1'}$，矛盾。因此$P_2$不能经过$H_C$，故$P_2$在${H_{p-1}}^*$和${H_0}^*$上各有一个顶点，分别记为$v_{\alpha_{p-1}}$和$v_{\alpha_0}$。$P_2$在$H_t(j \le t \le p-2$ 或 $1 \le t \le i)$中的顶点记为v_{α_t}。则：

$$P_2 = v_{\alpha_j}v_{\alpha_{j+1}}\ldots v_{\alpha_{p-1}}v_{\alpha_0}\ldots v_{\alpha_i}v_{\beta_{i+2}}\ldots v_{\beta_j}v_{\beta_{j+1}},$$

且$|P_2| = (p-1-j+1) + (i+1+((j+1)-(i+2)+1) = p+1 = |P_1|$。结论成立。

情况 2. P_2中不存在跃迁弧，即每个H_i上的$w \in V(P_2)$的最远出弧均指向H_{i+1}上的w'。

因为不存在跃迁弧，每个H_i上至少含有一个P_2的顶点，且$H_1, H_2, \ldots, H_{p-2}$中的顶点互不相同，此类顶点数目至少为$p-2$。又因为$P_1$是最长的首次交叉极小路径，所以$|P_2| \le |P_1| = p+1$。故$P_2$在$H_0 \cup H_{p-1}$中的顶点数至多为$(p+1)-(p-2) = 3$。特别地，若恰有 3 个顶点在$H_0 \cup H_{p-1}$中，则必有$|P_2| = |P_1|$，结论成立。故可设$P_2$在$H_0 \cup H_{p-1}$中至多有两个顶点。

注意到P_2的两个连续顶点不能同属一个H_i。因此若存在H_i包含两个P_2顶点，则H_i必含P_2的起点或终点。分别记P_2的起点和终点为x和y，x在P_2中的后继为x^+，y在P_2中的前驱为y^-。由于无跃迁弧，x，y，x^+，y^-在H上的分布必满足以下的(a)或(b)：

(a) x与y均在某一个H_i上。

(b) y^-与x在某个H_i上，y与x^+在H_{i+1}上，且按y^-, x，y，x^+顺序出现在H上。

设P_2在$H_0 \cup H_{p-1}$中有两个顶点，其分布仅有四种可能：

(1) 一个顶点在${H_0}^*$，另一个顶点在${H_{p-1}}^*$。

(2) 一个顶点在H_C，另一个顶点在${H_{p-1}}^*$。

(3) 一个顶点在H_C，另一个顶点在${H_0}^*$。

(4) 两个顶点均在H_C。

在情况(1)下必存在$i \notin \{0, p-1\}$使得H_i至少含有P_2的两个顶点，故$|P_2| \geq p-2+1+2 = p+1 = |P_1|$。由$P_1$的选取知等号必然成立，结论得证。

在情况(2)下H_{p-1}含两个P_2的顶点。有两种可能：(i) ${H_{p-1}}^*$含起点x，H_C含终点y。但此时x的最远出弧为跃迁弧，矛盾。(ii) ${H_{p-1}}^*$含终点y，H_C含第二个顶点x^+，且H_{p-2}含y^-和x。此时$|P_2| = p-2+1+2 = p+1 = |P_1|$，结论成立。情况(3)可类似证明。

故可设(4)成立，即P_2在$H_0 \cup H_{p-1}$中的两个顶点均在H_C上。当P_2在$H_0 \cup H_{p-1}$中仅有一个顶点时，该顶点也必在H_C上，否则存在跃迁弧，与本情况的假设矛盾。故以下合并讨论这两种情况。

令$H_0' = H_C$，$H_l' = H_l (1 \leq l \leq p-2)$。则$P_2$的所有顶点均位于$H_j'$上 $(0 \leq \leq p-2)$。且对于某一个 $0 \leq i \leq p-2$，(a)和(b)的以下变体(a’)和(b’)之一成立：

(a’) x与y均在H_i'上。

(b’) y^-与x在H_i'上，y与x^+在H_{i+1}'上，且y^-，x，y，x^+按顺序出现在H上。

若(b’)成立，则$|P_2| = p-1+2 = p+1 = |P_1|$，结论成立。现设(a’)成立，并引入更多记号：若$H_i'$上仅有一个$P_2$中的顶点，记作$v_{\alpha_i} = v_{\alpha_i,out} = v_{\alpha_i,in}$；若$x$

与y同在$H_i{}'$上，则设$x = v_{\alpha_i,out}$，$y = v_{\alpha_i,in}$。基于此符号体系，可将P_2的每条弧均表述为从$v_{\alpha_i,out}$指向$v_{\alpha_{i+1},in}$（当$H_i^{'}$和$H_{i+1}^{'}$各仅含一个P_2顶点时无差别，但便于处理$H_i^{'}$与$H_{i+1}^{'}$包含x或y的情况）。注意由于$H_k^{'}[v_{\alpha_{k,in}}, v_{\beta_k-1}] \subseteq H_k^{'}[v_{\alpha_{k,out}}, v_{\beta_k-1}]$，若顶点$w \in H_k^{'}[v_{\alpha_{k,in}}, v_{\beta_k-1}]$，则$w \in H_k^{'}[v_{\alpha_{k,out}}, v_{\beta_k-1}]$，根据夹逼性质，$w$的最远出邻居$w' \in H_{k+1}^{'}[v_{\alpha_{k+1,in}}, v_{\beta_{k+1}-1}] \cup \{v_{\beta_{k+2}}\}$。此处即运用了上述将$P_2$的弧视为从$v_{\alpha_k,out}$指向$v_{\alpha_{k+1},in}$的思路。

改记$P_1 = v_{\beta_0}v_{\beta_1}\dots v_{\beta_p} = v_{\beta_{0,0}}v_{\beta_{0,1}}\dots v_{\beta_{0,p}}$。从$v_{\beta_{0,p}}$沿最远出弧延伸$P_1$：设$v_{\beta_{0,p}} = v_{\beta_{1,1}}$，其最远出邻居为$v_{\beta_{1,2}}$。由$v_{\alpha_{0,out}}$在$H_C$上，有$v_{\beta_{1,1}} \in H_0[v_{\alpha_{0,in}}, v_{\beta_{0,1}-1}] \subseteq H_0[v_{\alpha_{0,out}}, v_{\beta_{0,1}-1}]$。由夹逼性质得$v_{\beta_{1,2}} \in H_1[v_{\alpha_{1,in}}, v_{\beta_{0,2}-1}] \cup \{v_{\beta_{0,2}}\}$。但若$v_{\beta_{1,2}} = v_{\beta_{0,2}}$会产生完美圈$v_{\beta_{0,2}}v_{\beta_{0,3}}\dots v_{\beta_{0,p-1}}v_{\beta_{1,1}}v_{\beta_{0,2}}$，矛盾。故$v_{\beta_{1,2}} \in H_1[v_{\alpha_{1,in}}, v_{\beta_{0,2}-1}]$。

进一步可以证明$v_{\beta_{1,2}} \neq v_{\alpha_{1,in}}$。假设$v_{\beta_{1,2}} = v_{\alpha_{1,in}}$。通过延伸$P_2$导出矛盾。假定$x$与$y$出现在$H_i^{'}$上，则$v_{\alpha_{i,out}} = x$，$v_{\alpha_{i,in}} = y$。考虑$v_{\alpha_{i,in}}$的最远出邻居$v_{\alpha_{i+1}^{'}}$。由$v_{\alpha_{i,in}} \in H_i{}'(v_{\alpha_{i,out}}, v_{\beta_{0,i+1}-1}]$，以及夹逼性质得$v_{\alpha_{i+1}^{'}} \in H_{i+1}{}'[v_{\alpha_{i+1,in}}, v_{\beta_{0,i+2}-1}] \cup \{v_{\beta_{0,i+2}}\}$。若$v_{\alpha_{i+1}^{'}} = v_{\alpha_{i+1,in}}$，则得完美圈$v_{\alpha_{i,in}}v_{\alpha_{i+1,in}}\dots v_{\alpha_{p-2,in}}v_{\alpha_{0,in}}\dots v_{\alpha_{i-1,in}}v_{\alpha_{i,in}}$，矛盾；若$v_{\alpha_{i+1}^{'}} = v_{\beta_{0,i+2}}$，则得完美圈$v_{\alpha_{i,in}}v_{\beta_{0,i+2}}\dots v_{\beta_{0,p}}v_{\alpha_{1,in}}\dots v_{\alpha_{i,in}}$，亦矛盾（此处利用了$v_{\beta_{1,2}} = v_{\alpha_{1,in}}$的假设）。因此

$$v_{\alpha_{i+1}^{'}} \in H_{i+1}^{'}(v_{\alpha_{i+1,in}}, v_{\beta_{0,i+2}-1}]。$$

递归定义$v_{\alpha_k^{'}}$为$v_{\alpha_{k-1}^{'}}$的最远出邻居$(i+1 \le k \le p-1)$。类似可得：

$$v_{\alpha_k^{'}} \in H_k^{'}\left(v_{\alpha_{0,in}}, v_{\beta_{0,k+1}-1}\right](i+1 \le k \le p-2),$$

$$v_{\alpha_{p-1}^{'}} \in H_k^{'}(v_{\alpha_{0,in}}, v_{\beta_{0,p}-1}] \subseteq H_k^{'}(v_{\alpha_{0,out}}, v_{\beta_{0,p}-1}] \cup \left\{v_{\beta_{0,p}}\right\}。$$

由于$v_{\beta_{0,p}} = v_{\beta_{1,1}}$的最远出邻居为$v_{\beta_{1,2}} = v_{\alpha_{1,in}}$，而$v_{\alpha_{0,out}}$的最远出邻居也是$v_{\alpha_{1,in}}$，由夹逼性质$v_{\alpha'_{p-1}}$的最远出邻居必为$v_{\alpha_{1,in}}$。但此时存在完美圈

$v_{\alpha_{1,in}}\dots v_{\alpha_{i,in}}v_{\alpha'_{i+1}}\dots v_{\alpha'_{p-1}}v_{\alpha_{1,in}}$，矛盾。故$v_{\beta_{1,2}} \neq v_{\alpha_{1,in}}$，即：

$$v_{\beta_{1,2}} \in H_1(v_{\alpha_{1,in}}, v_{\beta_{0,2}-1}]。$$

递归定义$v_{\beta_{1,k}}(3 \leq k \leq p-1)$为$v_{\beta_{1,k-1}}$的最远出邻居。类似有：

$$v_{\beta_{1,k}} \in H_k(v_{\alpha_{k-1,in}}, v_{\beta_{0,k}-1}]。$$

进一步通过对$m \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq p-1$ 作归纳而递归定义$v_{\beta_{m,k}}$：设$v_{\beta_{m,k}}$已定义，令$v_{\beta_{m+1,1}}$为$v_{\beta_{m,p-1}}$的最远出邻居，$v_{\beta_{m+1,k}}$为$v_{\beta_{m+1,k-1}}$的最远出邻居$(2 \leq k \leq p-1)$。类似可证：

$$v_{\beta_{m+1,k}} \in H_k(v_{\alpha_{k-1,in}}, v_{\beta_{m,k}-1}]。$$

这意味着随着m增大，$v_{\beta_{m,k}}$在H_k上的可能位置严格递减。由于H_k有限，当m充分大时$v_{\beta_{m,k}}$在H_k上无位置，矛盾。□

综合上述四个命题可得以下关于圆有向图R中最短圈的定理。

定理 2.2. 在圆有向图R中，以下两种情况必居其一：

1. 存在完美圈，此时所有完美圈长度相同均为p，且均为最短圈。极小圈长度为p或$p+1$。
2. 不存在完美圈，此时所有极小圈长度相同，均为p，且均为最短圈。□

三、 求圆有向图最短圈长的算法设计及复杂度分析

基于上一节得到的结果，本节设计一个算法，在给定任意一个圆有向图R的圆序列$\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$的前提下，计算$R$的围长。令$H = v_0v_1\dots v_{n-1}$为由该圆序列确定的哈密尔顿圈。该算法的主要思想是：从某个顶点v_i出发（在实现的算法中取$i=0$），沿着H循环遍历，每次递归地访问当前顶点的最远出邻居。每经过一条最远出弧，本文称之为“一步”。当从起点v_i开始，到达当前的顶点形成一条首次交叉极小路径时，就确定了从v_i出发的极小圈的长度，该长度等于从v_i到当前顶点所走的步数。由定理 2.2 可知，R中的极小圈至多有两种不同的长度，其中较小的那个就是围长。把当前知道的极小圈长记录n_m中，每当找到一个新

的极小圈时，将其长度与n_m比较。如果它们不同，则取较小者作为围长，并终止算法。

算法的另一个终止条件是遇到一个已经访问过的顶点v_i。下面的定理将证明，在这种情况下，以v_i结束的首次交叉极小路就是最短的。因此在算法中，当遇到一个已经访问过的顶点时，只需检查以它结束的首次交叉极小路长度是否为$n_m - 1$，如果是，最短圈长即为$n_m - 1$，否则最短圈长为n_m。（最短圈长等于最短的首次极小交叉路的长度）

算法伪代码如下（完整版 c++代码详见附录）：

算法 1.

1: 定义并初始化以下变量：

$i = 0;$ // 当前访问的顶点索引

$st = i\,;$ // 起始顶点的索引

$steps = 0;$ // 从起始顶点到当前顶点已走的步数

$allsteps = 0;$ // 总共已走的步数

$dis = 0;$ // 在H上走过的总距离

$n_m = -1;$ // 当前已知的最短环长度，初始设为-1

$lastD = 0;$ // 当遇到已访问顶点时，上一个环的长度

$mark[0 \ldots n-1] = 0;$ // $mark[i] = 1$ 表示顶点v_i已被访问

$order[0 \ldots n-1] = 0;$ // $order[i]$记录第i步在H上走过的距离

2: **while** 1 **do**

// 如果v_i未被访问，标记为已访问；如果已被访问过，

// 则计算H上达到v_i之前的$n_m - 1$步长所覆盖的距离，

// 根据距离与n的关系，确定R的围长是n_m还是$n_m - 1$。

if $mark[i] == 0$ then
　$mark[i] = 1$;
else
　　$lastD = \sum_{k=allsteps-n_m+2}^{allsteps} order[k]$;
　　if $lastD \geq n$ then $n_m = n_m - 1$;
　　end if
　　break;
end if

// 如果已形成从起始顶点到当前顶点的第一条最小交叉路径，

// 则比较其长度与当前已知的最短环长度。

if $dis \geq n$ then
　if $n_m != -1$ then
　　if $steps != n_m$ then
　　　$n_m = min(steps, n_m)$; break;
　　end if
　else

$n_m = steps$;

end if

$steps = steps - 1$; $dis = dis - d^+(st)$; $st = st + d^+(st)$;

end if

// 向前走一步

$order[allsteps] = d^+(v_i)$;

$dis = dis + d^+(v_i)$; $i = i + d^+(v_i)$;

$steps = steps + 1$; $allsteps = allsteps + 1$;

if $i > n$ then $i = i - n$;

end if

end while

return n_m;

以下的定理说明算法的正确性。

定理 3.1. 算法 1 能够正确地计算输入圆有向图R的围长。

证明. 算法的主体是一个 “while”的无限循环，在循环中，R的顶点通过一个迭代过程被访问，该过程连续选择当前顶点的最远出邻居。循环在满足以下两个条件之一时终止：

1. 找到了两条长度不同的首次交叉极小路径，其中较短的一条的长度就是围长；

2. 在遍历过程中遇到一个已经访问过的顶点v_i。取以v_i结束的首次交叉极小路径的长度作为围长。

由于R的顶点数n是有限的，所以第二个条件必将在n次迭代内被满足，从而保证了算法终止。本文需要证明的是，在两种终止条件下，变量n_m中的值都记录了最短圈的长度。

在语句 11 至语句 20 中，处理的是发现一条首次交叉极小路径的情况。如果这条路径的长度与n_m不同，那么就找到了两种不同长度的极小圈。由定理 2.2，两个圈长中较短的长度即为围长，算法将这两种长度中较小的那个记录在n_m中，作为R的围长，并跳出循环。

在语句 3 至语句 10 中，处理的是遇到一个已经访问过的顶点的情况。本文将在下面证明，如果一个顶点v_i第二次被访问，那么以它为终点的首次交叉极小路径就是R中最短的一条。由于已经在n_m中记录了当前已知的最短极小圈长度，所以在算法中只需检查以v_i为终点的首次交叉极小路径长度是否为$n_m - 1$。如果答案是“是”，则围长为$n_m - 1$，否则围长为n_m。

下面证明以v_i结束的首次交叉极小路径是最短的一条。

如果R中不存在完美圈，那么由定理 2.2，每一个极小圈，或者等价地，每一条首次交叉极小路径的长度都是相同的，因此输出以v_i结束的首次交叉极小路径的长度总是正确的。

现在假设R中存在一个完美圈C_1。设$C_1 = v_{\beta_0} v_{\beta_1} \dots v_{\beta_{p-1}}$。

类似之前的证明，令:

$$H_0 = v_{\beta_0} v_{\beta_0+1} \dots v_{\beta_1-1} = H[v_{\beta_0}, v_{\beta_1-1}],$$

$$H_1 = v_{\beta_1} v_{\beta_1+1} \dots v_{\beta_2-1} = H[v_{\beta_1}, v_{\beta_2-1}],$$

$$\cdots$$

$$H_{p-1} = v_{\beta_{p-1}} v_{\beta_{p-1}+1} \dots v_{\beta_0-1} = H[v_{\beta_{p-1}}, v_{\beta_0-1}],$$

进一步假设算法从顶点v_j开始遍历。如果$v_j = v_{\beta_k}$，其中 $0 \le k \le p-1$，那么将从v_{β_k}出发经过C_1并回到它。当第二次访问它时，算法终止并正确返回C_1的长度作为围长。

假设$v_j \notin \{v_{\beta_k}: 0 \le k \le p-1\}$，且不失一般性地假设$v_j \in H_0 \setminus \{v_{\beta_0}\}$。将它重命名为$v_{\alpha_{0,0}}$，并递归地定义$v_{\alpha_{0,k}}$为$v_{\alpha_{0,k-1}}$的最远出邻居，其中 $1 \le k \le p-1$。如果存在某个 $1 \le k \le p-1$ 和某个 $0 \le l \le p-1$，使得$v_{\alpha_{0,k}} = v_{\beta_l}$，并假设$k$是满足该条件的最小整数，那么从$v_{\alpha_{0,k}} = v_{\beta_l}$出发将经过$C_1$并返回到$v_{\beta_l}$，当第二次访问它时，算法终止并正确返回$C_1$的长度作为围长。因此可以假设不存在这样的$k, l$。由陈述(2)可得：$\alpha_{0,k} \in H_k$，$0 \le k \le p-1$。

再由陈述（2)，顶点$v_{\alpha_{0,p-1}}$的最远出邻居属于$H_0 \cup \{v_{\beta_1}\}$，记之为$v_{\alpha_{1,0}}$。如果$v_{\alpha_{1,0}} = v_{\alpha_{0,0}}$，那么则找到了一个完美圈$v_{\alpha_{0,0}} v_{\alpha_{0,1}} \dots v_{\alpha_{0,p-1}} v_{\alpha_{0,0}}$，并正确返回其长度作为围长。

假设$v_{\alpha_{1,0}} \ne v_{\alpha_{0,0}}$。接下来分两种情况：

情况 1. $\boldsymbol{v_{\alpha_{1,0}} \in H_0[v_{\beta_0}, v_{\alpha_{0,0}})}$。

若$v_{\alpha_{1,0}} = v_{\beta_0}$，则将从它出发经过$C_1$并回到它，当第二次访问它时，算法终止并正确返回$C_1$的长度作为围长。所以可以假设$v_{\alpha_{1,0}} \ne v_{\beta_0}$，即$v_{\alpha_{1,0}} \in H_0(v_{\beta_0}, v_{\alpha_{0,0}})$。

递归地定义$v_{\alpha_{1,k}}$为$v_{\alpha_{1,k-1}}$的最远出邻居，其中 $1 \le k \le p-1$。由于$v_{\alpha_{1,0}} \in H_0(v_{\beta_0}, v_{\alpha_{0,0}})$, 由夹逼性质可得$v_{\alpha_{1,1}} \in H_1(v_{\beta_1}, v_{\alpha_{0,1}})$。若$v_{\alpha_{1,1}} = v_{\beta_1}$，那么将从它出发经过$C_1$并回到它，当第二次访问它时算法终止并正确返回$C_1$的长度作为围长。

所以可以假设$v_{\alpha_{1,1}} \neq v_{\beta_1}$。如果$v_{\alpha_{1,1}} = v_{\alpha_{0,1}}$，那么第二次访问到$v_{\alpha_{0,1}}$，并找到完美圈$v_{\alpha_{0,1}} v_{\alpha_{0,2}} \ldots v_{\alpha_{0,p-1}} v_{\alpha_{1,0}} v_{\alpha_{0,1}}$，其长度为$p$，即正确的围长。因此也可以假设$v_{\alpha_{1,1}} \neq v_{\alpha_{0,1}}$，即$v_{\alpha_{1,1}} \in H_1(v_{\beta_1}, v_{\alpha_{0,1}})$。

类似地，对于 $2 \leq k \leq p-1$，要么找到一个完美圈并得到正确的围长，要么可以假设$v_{\alpha_{1,k}} \in H_k(v_{\beta_k}, v_{\alpha_{0,k}})$。

进一步地，通过对m作归纳，递归地定义$v_{\alpha_{m,k}}$（其中$m \geq 2$，$0 \leq k \leq p-1$）。注意 $v_{\alpha_{m,k}}$已经在$m = 1$ 与 $0 \leq k \leq p-1$ 的情形下定义。记$v_{m+1,0}$为$v_{m,p-1}$的最远出邻居，$v_{m+1,k}$为$v_{m+1,k-1}$的最远出邻居，其中 $1 \leq k \leq p-1$。由类似上述的论证，要么找到一个完美圈并得到正确的围长，要么可以假设对于$m \geq 1$ 与 $0 \leq k \leq p-1$，

$$v_{\alpha_{m,k}} \in H_k(v_{\beta_k}, v_{\alpha_{m-1,k}})。$$

由于每个H_k是有限的，且$v_{\alpha_{m,k}}$在H_k上的可能位置随着k的增加而减少，因此上式不能永远成立。也即，算法迟早会找到一个完美圈并得到正确的围长。

情况 2. $\boldsymbol{v_{\alpha_{1,0}} \in H_0(v_{\alpha_{0,0}}, v_{\beta_1 - 1}] \cup \{v_{\beta_1}\}}$。

若$v_{\alpha_{1,0}} = v_{\beta_1}$，那么将从$v_{\beta_1}$出发经过$C_1$并回到它，当第二次访问它时，算法终止并正确返回$C_1$的长度作为围长。所以可以假设$v_{\alpha_{1,0}} \neq v_{\beta_1}$，即

$$v_{\alpha_{1,0}} \in H_0(v_{\alpha_{0,0}}, v_{\beta_1 - 1}]。$$

递归地定义$v_{\alpha_{1,k}}$为$v_{\alpha_{1,k-1}}$的最远出邻居，其中 $1 \leq k \leq p-1$。由于$v_{\alpha_{1,0}} \in H_0(v_{\alpha_{0,0}}, v_{\beta_1 - 1}]$，　由夹逼性质可得$v_{\alpha_{1,1}} \in H_1(v_{\alpha_{0,1}}, v_{\beta_2 - 1}] \cup \{v_{\beta_2}\}$。

若$v_{\alpha_{1,1}} = v_{\beta_2}$，那么将从$v_{\beta_2}$出发经过$C_1$并回到它，当第二次访问它时，算法终止并正确返回$C_1$的长度作为围长。所以可以假设$v_{\alpha_{1,1}} \neq v_{\beta_2}$。如果$v_{\alpha_{1,1}} = v_{\alpha_{0,1}}$，那么第二次访问到$v_{\alpha_{0,1}}$，并找到完美圈$v_{\alpha_{0,1}} v_{\alpha_{0,2}} \dots v_{\alpha_{0,p-1}} v_{\alpha_{0,1}}$，其长度为$p$，即正确的围长。因此也可以假设$v_{\alpha_{1,1}} \neq v_{\alpha_{0,1}}$。此时

$$v_{\alpha_{1,1}} \in H_1(v_{\alpha_{0,1}}, v_{\beta_2 - 1}]。$$

类似于情况 1，可以推广得到：对于 $2 \leq k \leq p-1$，要么找到一个完美圈并得到正确的围长，要么可以假设$v_{\alpha_{1,k}} \in H_k(v_{\alpha_{0,k}}, v_{\beta_2 - 1}]$。

同样地，对m作归纳，递归地定义$v_{\alpha_{m,k}}$（其中$m \geq 1, 0 \leq k \leq p-1$）。注意$v_{\alpha_{m,k}}$已经在$m = 1$ 与 $0 \leq k \leq p-1$ 的情形下定义。设$v_{m+1,0}$为$v_{m,p-1}$的最远出邻居，$v_{m+1,k}$为 $v_{m+1,k-1}$的最远出邻居，其中 $1 \leq k \leq p-1$。类似于情况 1，要么找到一个完美圈并得到正确的围长，要么可以假设对于$m \geq 1, 0 \leq k \leq p-1$，

$$v_{\alpha_{m,k}} \in H_k(v_{\alpha_{m-1,k}}, v_{\beta_2 - 1}]。$$

由于每个H_k是有限的，且$v_{\alpha_{m,k}}$在H_k上的可能位置随着k的增加而减少，该式子不能永远成立。因此，算法迟早会找到一个完美圈并得到正确的围长。

因此，在R中存在完美圈的情形下，每当第一次重复访问某个顶点时，总能找到一个包含它的完美圈，从而成功计算出R的围长。□

以下定理阐明算法的时间复杂度。

定理 3.2. 算法 1 的时间复杂度为$O(n)$，其中n为输入的圆有向图R的顶点数目。

证明： 由算法 1 第 3 至 10 行可见，算法在访问一个顶点i的时候，如果是首次访问，会将其访问标记$mark[i]$从 0 改为 1，如果是第二次访问则算法必定终止。

由于图中只有n个顶点，算法在至多n次迭代后终止。也就是说算法的时间复杂度不会超过n。另一方面，如果输入是一个k-正则的圆有向图，且$(n,k)=1$，可以验证，算法会访问遍所有顶点直到返回起点，这时算法的循环次数不会低于n次。因此算法 1 的时间复杂度为$O(n)$。□

然而，一旦找到两个不同的极小圈长就可以终止算法，在很多情况下，我们可在检查完所有的极小圈之前就得到结果。因此，平均而言，算法的复杂度可能远远低于n。

四、 小结

在本文中，我们引入了若干与圆有向图中一些极值结构相关的概念，例如最远出邻居、最远出弧、极小圈和完美圈。基于这些概念，我们得出了一些关于圆有向图中圈的性质和结果，并提出了一种计算其围长的算法。我们的结果验证了一个直观的贪婪策略的正确性，即通过枚举圆有向图的极小圈，从中寻找整个图的最短圈。特别是，我们证明了圆有向图中的所有极小圈至多只有两种不同的长度，这一特性可以被利用来简化算法。

圆有向图的重要性不仅仅体现在泛圈性的研究中。研究群体对其的兴趣远远超出了圈结构，还涉及若干基础性问题，例如连通性（[8]）、第二邻域（[9]）、划分与着色（[10]）、支配集（[11]）等。此外，它们与多种图类之间的关系也得到了深入研究，包括正常圆弧图（[12]）、凸圆图与凹圆图（[13]）、以及部分定向图（[14]）。

我们希望能将本文所发展出的思想与技术应用到更多问题中。例如，在文献[15] 中，作者将圆有向图的概念推广到了正圆有向图。一个有向图称为正圆的，如果可以将其顶点标记为$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$，并且对于每个$i$，有

$N^{+}(v_i)=\{v_{i+1},\ldots,v_{i+d^{+}(v_i)}\}$，其中下标按$n$取模。因此，一个未来可能研究的问题是，能否利用与本文类似的思想，设计出一种高效算法来计算给定正圆有向图的围长。

参考文献

[1] Bondy, J.A. (1973). Pancyclic graphs: recent results. In Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 10. Infinite and Finite Sets, Keszthely (Hungary)

[2] Gould, R.J. (1991). Recent advances on the Hamiltonian problem: Survey III. Graphs and Combinatorics, 7, 293–317.

[3] Gould, R.J. (2003). Advances on the Hamiltonian problem: A survey. Graphs and Combinatorics, 19, 7–52.

[4] Gould, R.J. (2014). Advances on the Hamiltonian problem: A survey II. Ars Combinatoria, 107, 113–146.

[5] Kühn, D. & Osthus, D. (2012). A survey on Hamilton cycles in directed graphs. European Journal of Combinatorics, 33, 750–766.

[6] Guo, Y. (1995). Locally semicomplete digraphs. Verlag der Augustinus-Buchhandlung.

[7] Bang-Jensen, J., & Gutin, G. Z. (2008). Digraphs: theory, algorithms and applications. Springer Science & Business Media.

[8] Bang-Jensen, J., Christiansen, T. M., & Maddaloni, A. (2017). Disjoint paths in decomposable digraphs. Journal of Graph Theory, 85(2), 545-567.

[9] Li, R., & Liang, J. (2020). The second out-neighborhood for local tournaments. Open Mathematics, 18(1), 270-283.

[10] Steiner, R. (2023). On coloring digraphs with forbidden induced subgraphs. Journal of Graph Theory, 103(2), 323-339.

[11] Zhang, X., Xue, C., & Li, R. (2020). The domination number of round digraphs.

Open Mathematics, 18(1), 1625-1634.

[12] Deng, X., Hell, P., & Huang, J. (1996). Linear-time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs. SIAM Journal on Computing, 25(2), 390-403.

[13] Bang-Jensen, J., Huang, J., & Yeo, A. (2000). Convex-round and concave-round graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 13(2), 179-193.

[14] Bang-Jensen, J., Huang, J., & Zhu, X. (2018). Completing orientations of partially oriented graphs. Journal of Graph Theory, 87(3), 285-304.

[15] Li, R., Zhang, X., & Meng, W. (2008). A sufficient condition for a digraph to be positive-round.Optimization, 57(2), 345-352.

附录：求解圆有向图最短围长的 c++完整代码

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N=1e6+10;
int mark[N],order[N],d[N],n;
int main(){
    int i=0,st=i,steps=0,allsteps=0,dis=0,nm=-1,lastD=0,n;
    cin>>n;
    for(int k=0;k<n;k++) cin>>d[k];
    while(true){
        if(mark[i]==0){
            mark[i]=1;
        }else{
            lastD=0;
            for(int k=allsteps-nm+2;k<=allsteps;k++){
                lastD+=order[k];
            }
            if(lastD>=n){
                nm=nm-1;
            }
            break;
        }
        if(dis>=n){
            if(nm!=-1){
                nm=steps;
            }else{
                if(steps!=nm){
                    nm=min(steps,nm);
                    break;
```

```
                }
            }
            steps=steps-1;
            dis=dis-d[st];
            st=st+d[st];
        }
        order[allsteps]=d[i];
        dis=dis+d[i];
        i=i+d[i];
        steps=steps+1;
        allsteps=allsteps+1;
        if(i>n) i=i-n;
    }
    cout<<nm<<endl;
    return 0;
}
```

致谢

本文的研究内容主要来自于张赞波教授在广东财经大学的团队关于有向图圈结构的科研项目，主要是对一类重要的有向图类即圆有向图中的短圈结构做分析，并设计求最短圈长的算法。张赞波负责了论文的选题、背景材料收集、论文整体的组织、文中部分结果的证明；参赛的韩卓毅、刘雨菲同学与张赞波团队的两名研究生一起，完成了图结构的分析、算法设计等工作，并撰写了文中主要结果的理论证明和算法的C++实现；校内指导老师桂鹏指导了参赛同学的论文写作。指导老师的工作均是无偿的。

自2025年2月起，韩卓毅、刘雨菲同学定期（每周一次）到张赞波教授的实验室学习并参与团队的科研工作。开始的时候，由张赞波就图论的基础知识、有向图路圈理论的研究背景以及本课题的相关研究现状对参赛同学开展指导；在参赛同学掌握基础知识、了解研究背景以后，他们与团队成员开展合作，通过计算机程序对小规模的圆有向图进行实验，发现其中圈结构的规律，总结为若干描述圈结构性质的命题，并给出严密的数学证明。基于圈结构理论上的发现，他们设计和实现了一个求解圆有向图最短圈长（即围长）的高效算法。在这个过程中，张赞波对于项目工作中的关键思想和困难的地方（如夹逼性质的提出、命题的陈述方式、命题4的证明等）给予了指导，大部分的证明和算法实现由参赛同学完成。