

参赛学生姓名： 白旭鹏 倪峻哲

中学： 北京市第一〇一中学

省份： 北京市

国家/地区： 中国

指导老师姓名： 董振宇

指导老师单位： 北京市第一〇一中学

论文题目： “呼啸”的金属板：一种

结构振动声学现象探究

“呼啸”的金属板： 一种结构振动声学现象探究

摘要

本文针对日常生活中常见的大型薄金属板在受力摇晃时发出的“呼啸声”现象，开展了系统的理论与实验研究，旨在揭示其背后的结构振动声学物理机制。理论分析揭示，该现象的本质是宏观的大幅度弯曲对微观的高频振动产生的频率调制效应。基于冯·卡门大挠度理论，并运用双时间尺度分析与准静态近似，推导出高频振动的瞬时频率受慢变振幅调制的定量关系，其核心模型可表达为 $f(A) = f_0 \sqrt{1 + \beta A^2}$

实验部分，我们搭建了音视频同步采集系统，利用Tracker软件对板的宏观振幅 $A(t)$ 进行追踪，并采用短时傅里叶变换（STFT）分析音频以提取瞬时主频率 $f(t)$ 。实验数据与理论模型高度吻合，清晰地验证了频率与振幅的强正相关性。此外，通过引入一个考虑低幅值行为和零点偏移的修正模型，我们定量的剥离了各类次级效应的影响。研究发现，非线性系数 β 不仅是材料属性的体现，与板的几何形状等因素密切相关，是衡量一个振动系统“有效非线性强度”的综合性物理指标。

本研究不仅为“呼啸金属板”现象提供了可靠的定量描述，更从多尺度动力学的视角出发，构建了一个更为深刻和自治的物理图像。

关键词：屈曲失稳，几何非线性，频率-振幅耦合，双时间尺度分析，准静态近似，Tracker，短时傅里叶变换

目录

第一章 引言	1
第二章 相关研究	2
第三章 预实验	4
3.1 初次观察现象：呼啸的金属板	4
3.2 材料选择与弹性/塑性行为的关系	4
3.3 对于声音产生和演化的初步观察与猜想	7
3.3.1 振动的激发条件	7
3.3.2 “呼啸声”的频率演化特点	7
3.4 本研究关注的核心问题	8
第四章 理论分析	9
4.1 初始振动的激发：屈曲失稳和能量释放	9
4.2 “呼啸声”的频率变化机制：几何非线性与频率-振幅关系	10
4.2.1 线性振动理论与固有频率	11
4.2.2 几何非线性振动理论	12
4.2.3 基于双时间尺度分析和准静态近似的频率调制模型	13
第五章 实验装置与数据处理方法	17
5.1 实验装置与材料	17
5.1.1 试验样品	17
5.1.2 实验系统搭建	17
5.2 数据采集与处理流程	18
第六章 实验结果与分析	21
6.1 典型“呼啸”的动力学过程分析	21
6.2 频率-振幅关系的定量验证：以长方形黄铜板为例	22
6.2.1 基于理想非线性模型的验证	22
6.2.2 考虑低幅值行为修正的非线性模型	23
6.3 跨样本分析比较：几何与厚度的影响	25

6.4 误差分析 26

第七章 总结 29

第八章 研究局限与未来展望 30

参考文献 32

致谢 33

附录 35

 附录 A: 黄铜板厚度测量记录 35

 附录 B: 列维法求解 SFSF 边界条件具体推导过程 35

 附录 C: 列维法的 Python 数值求解代码以及运行结果 37

 附录 D: 快速振动方程的推导与固有频率分析 39

第一章 引言

用力摇晃或快速弯曲一块大而薄的金属板时，会听到一种奇特的呼啸声。其声音特征随着时间发生变化，其音调在短时间内上升下降（如图 1.1 所示）。这种现象在生活中经常发生，如大风天车棚或工地栅栏大幅晃动产生的声响。同时，这种现象也应用在乐器制作和影视拟声中。我们最初是在摇晃硬壳纸时发现的这种现象，并对其产生了强烈的好奇心。这个现象也作为一道题目出现在了 IYPT 上，这更加激发了我们探究发声板原理的动力。此外，摇晃的方式，如速率和幅度、板的材质、以及几何形状等不同因素，都会影响最终捕捉到的声音特性。然而，这类大型金属板振动发出呼啸声背后的物理原理并未被详细、充分的定量研究过。我们想就这个有趣的物理现象展开更加深入的研究探讨。



图 1.1: 金属板晃动发出“呼啸声”和频谱图

第二章 相关研究

本章旨在回顾相关领域的历史发展与核心理论，明晰现有研究的边界，并以此确立本论文的研究定位与贡献。对“呼啸金属板”这一现象的物理探究，需要梳理结构力学、非线性动力学和声学等多个经典领域。这能帮助我们找到合适的分析工具，并明确我们研究工作的具体切入点。

板的振动理论最早可追溯至 19 世纪，由基尔霍夫(Kirchhoff)奠定、并由洛夫(Love)等人完善的**经典线性薄板理论**[1]。该理论在小挠度振动范畴内取得了巨大成功，能够精确预测板的固有频率和模态。然而，线性理论的核心假设是频率不随振幅改变，这与我们清晰听到的“呼啸”升调现象相悖，因此它无法解释本研究的核心问题。

真正为我们指明方向的，是 20 世纪初由近代力学大师冯·卡门(von Kármán)开创的**非线性大挠度理论**。在其 1910 年的开创性工作中[2]，他首次揭示了当板的挠度与其厚度相当时，板中面会因拉伸而产生额外的“薄膜应力”(Membrane Stress)。这种效应被称为“**应力刚化**”(Stress Stiffening)，它使得结构的等效刚度随振幅增加而增加，从而从根本上解释了**振动频率随振幅变化的物理机制**。这一理论是本研究整个理论分析的基石。同样至关重要的，是冯·卡门与钱学森(Tsien)在 1941 年合作发表的关于圆柱壳轴向压缩下屈曲(Buckling)的里程碑式研究[3]。他们发展的非线性理论成功解释了实验中观察到的实际屈曲载荷远低于线性理论预测值的巨大差异。虽然其研究对象是柱壳，但其揭示的“后屈曲”(Post-buckling)形态和能量跃迁的物理思想，为我们理解“呼啸声”是如何通过屈曲失稳这一突变过程被激发提供了直接的理论参照。

然而，冯·卡门方程描述的是一个单时间尺度的动力学关系，要将其应用于“呼啸声”这种复杂的动态过程，还需要更精细的动力学分析工具。问题的核心在于，系统中同时存在两种不同时间尺度的运动：一个是我们肉眼可见的、大幅度的、缓慢的整体弯曲/恢复过程(慢变量)，另一个是产生声音的、小幅度的、高频的局部振动(快变量)。直接求解完整的非线性动力学方程是极其困难的。

处理此类快慢动力学耦合问题的标准范式，是多尺度分析方法(Multi-scale Analysis)。该方法由 Nayfeh 和 Mook 等学者在 20 世纪下半叶系统性地发展并推广[6,7]，已成为非线性动力学研究的基石。其核心思想在于，将系统的响应分解为在不同时间尺度上演化的分量，从而将一个复杂的非线性问题解耦为一组相对简单的、在各自尺度上成立的方程。对于本研究而言，多尺度分析的引入具有决定性意义：它在数学上严谨地论证了“准静态近似”的合理性。也就是说，我们可以认为，在任意一个瞬间，高频的“快”振动所感受到的系统刚度，是由当时“慢”振动的大振幅值所决定的。这使得我们可以将慢变的宏观振幅 $A(t)$ 视为一个瞬时固定的参数，来求解此刻的快变振动

频率 $f(t)$ ，从而建立起 f 与 A 之间的瞬时依赖关系。

通过文献梳理我们发现，尽管冯·卡门理论和多尺度分析方法本身都是非常成熟的理论，但将两者结合，应用于解释像“呼啸金属板”这样由瞬态失稳激发、并在随后的动态过程中频率随振幅连续演化的“呼啸”声学现象，特别是对其进行高时间分辨率的定量实验研究，并与基于多尺度思想推导出的理论模型进行细致对比验证的工作，在现有文献中较为少见。

综上所述，本研究的定位与创新点在于：我们将经典的冯·卡门非线性理论置于**现代多尺度动力学的分析框架**之下，来研究一个非稳态的动态物理过程。我们的目标是，通过现代化的音视频同步采集实验手段，对这一动态过程中的快（频率）慢（振幅）变量进行精确的同步测量，从而为基于准静态近似推导出的**频率-振幅调制模型**提供强有力的实验证据，最终为“呼啸金属板”这一日常现象提供一个物理图像清晰、理论框架自洽、数据支撑有力的完整解释。

第三章 预实验

3.1 初次观察现象：呼啸的金属板

研究的起点源于一个有趣的声学现象：当一块薄金属板（例如常见的黄铜板）被握在手中并快速晃动时，它会发出一阵清脆悦耳、音调连续变化的“呼啸声”。这种声音并非简单的碰撞或摩擦声，其最显著的特征是音高（频率）在短时间内会经历一个快速爬升的过程，类似于鸟鸣或某种电子合成音效。我们初步使用 Python 进行简单的音频频谱分析（如图 3.1 所示）证实了这一听觉感受，显示声音的频率在激发后显著升高。

这一看似简单的现象背后，暗示着复杂的结构振动与声学问题。它不仅与我们日常经验中对金属“坚硬”、“沉寂”的印象形成反差，也提出了一个核心问题：是什么物理机制，使得一块普通的金属板，在简单的手摇扰动下，能够产生如此具有特征性的变频声音？

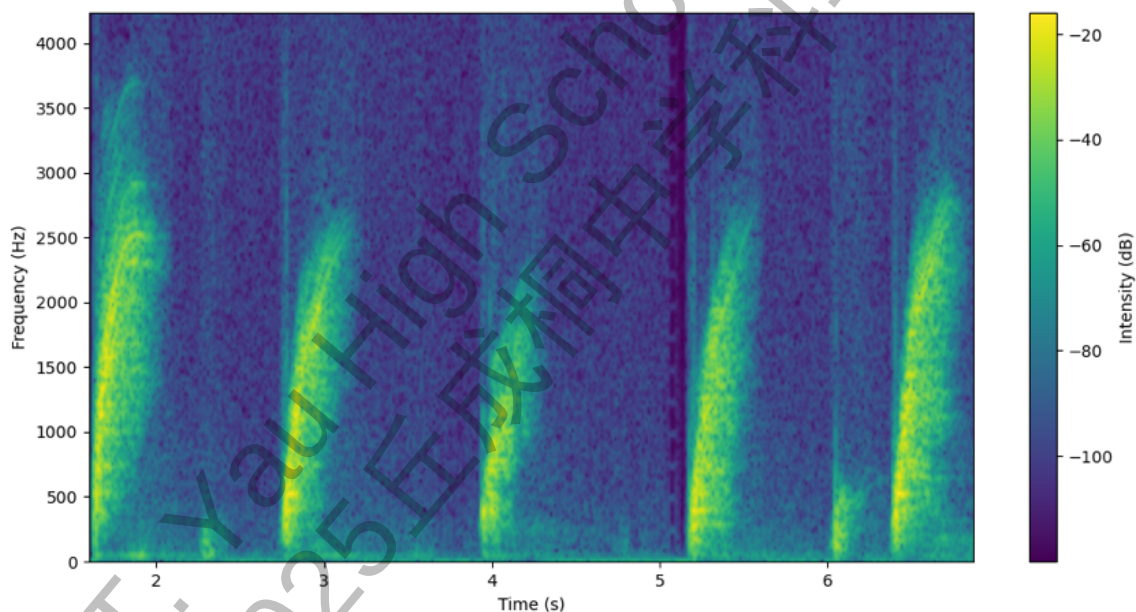


图 3.1: 黄铜板“呼啸声”的频谱分析结果

3.2 材料选择与弹性/塑性行为的关系

为了探究产生该现象的条件，我们进行了一系列对比预实验。我们准备了尺寸相同、厚度均为 h 的三种不同材质的薄金属板：黄铜板、铝板和钢板。在相似的手摇激励下，我们观察到截然不同的响应，这直接指向了材料的力学性质差异。

黄铜板：如图 3.2 所示，能够稳定、清晰地复现“呼啸声”现象。它们在受力弯曲后能迅速恢复原状，表现出良好的弹性行为。



图 3.2: 黄铜板发生弹性弯曲并发出声音

铝板：完全无法发出“呼啸声”。如图 3.3 所示，在相同的摇晃力度下，铝板会轻易地发生弯折，产生永久性的塑性形变。其物理根源在于铝的屈服强度相对较低。屈服强度是区分材料发生弹性形变还是塑性形变的临界应力值。手摇施加的弯曲应力轻易地超过了铝的屈服极限，导致能量主要通过永久形变的形式被耗散掉，而无法作为弹性势能被存储和释放，因此不能产生后续的振动。



图 3.3: 铝板发生永久的塑性形变

钢板：难以发生大幅度的形变，无法发出呼啸声。与铝不同，钢板的屈服强度和杨氏模量都非常高。问题在于其杨氏模量（即材料刚度）过高。这意味着，要用手使其发生足以触发失稳的初始屈曲，需要比黄铜大得多的能量。在常规手摇力度下，钢板的形变和内部应力不足以越过屈曲的能垒，因此无法启动发出声音的振动过程。



图 3.4：钢板难以发生大幅度的弹性形变

表 3.1 总结了各类材料力学性质以及对应实验现象。通过不同材料的对比实验我们总结出两个发声的关键材料性质条件：

表 3.1：各类材料力学性质以及对应实验现象

材料	杨氏模量 [GPa]	屈服强度 [MPa]	实验现象总结
黄铜 (H62)	110	150~275	杨氏模量适中，易于激励，屈服强度较高，不易塑性形变
铝合金 (通用)	~ 70	~ 110	杨氏模量低，屈服强度低，非常容易发生永久变形
普通碳钢	~ 200	~ 350	杨氏模量高，屈服强度高，难激励

首先材料需要有**适中的杨氏模量**：材料不能太“硬”（如钢板），以至于无法产生足够的初始形变。其次材料需要有**足够高的屈服强度**：材料在激励产生的最大应力下，保持在弹性范围内，以确保能量可以被存储和释放，而非通过塑性形变耗散（如铝板）。

这一发现为我们后续的研究框定了范围：我们的理论模型将专注于满足上述条件、能够进行有效弹性振动的系统；实验将探究能够有效进行发声的黄铜金属板。

3.3 对于声音产生和演化的初步观察与猜想

在确定了合适的材料后，通过对能够有效发声的黄铜板进行更细致的观察，我们发现了声音产生与演化的几个关键特征。

3.3.1 振动的激发条件

我们发现了金属板会从一个弯曲形态转变为另一个弯曲形态。其中，会有一个标志性的“咔哒”声，标志着形态的改变。这个现象在物理上对应于**薄板结构的屈曲失稳**。我们推测，正是这个从平面或单一弯曲的亚稳态到更稳定的后屈曲形态的跃迁，快速释放了存储的弹性势能，为系统提供了宽频的初始振动激励。这解释了为什么需要用一定的“力道”去摇晃，因为必须提供足够的能量来触发屈曲。

3.3.2 “呼啸声”的频率演化特点

在初始声音被激发后，我们观察到，随着手部动作使金属板的弯曲程度发生连续变化，声音的频率也随之改变。当板的弯曲加剧时，音调升高；当弯曲减小时，音调降低。这引出了我们的第二个关键猜想：**声音的频率与金属板的宏观几何形态（可以用金属板的振动幅值表征）存在着紧密的关系。**

为了验证这个直观感受，我们首先进行了一个简单的**敲击实验**。我们在缓慢弯曲金属板的过程中同时不断地敲击金属板，我们明显的听到，随着金属板弯曲程度变大，敲击声音的频率也在不断升高。我们用 Tracker 对拍摄金属板形变的视频进行处理，得到其振动幅值（即形变最高点到金属板底部的距离），与麦克风采集的声音频率进行比较。如图 3.5 所示，图片上部为实验过程中的一帧画面，展示了板的弯曲形态；中层的频谱显示声音频率随时间的变化，图中明亮的轨迹代表声音能量集中的频率，蓝色散点是算法提取出的瞬时主导频率；底部的红色曲线显示了金属板振幅 A 随时间的变化过程。这张图直观地展示了频率和振幅之间惊人的一致性：**瞬时频率的蓝色散点 $f(t)$ 的变化趋势，与代表金属板振幅的红色曲线 $A(t)$ 的变化趋势几乎完美地重合！** 频率的峰值时刻精确地对应着挠度的峰值时刻。当手部施力使板的弯曲程度达到最大时，声音的频率也达到最高；随后板的弯曲程度减小，频率也随之同步下降。

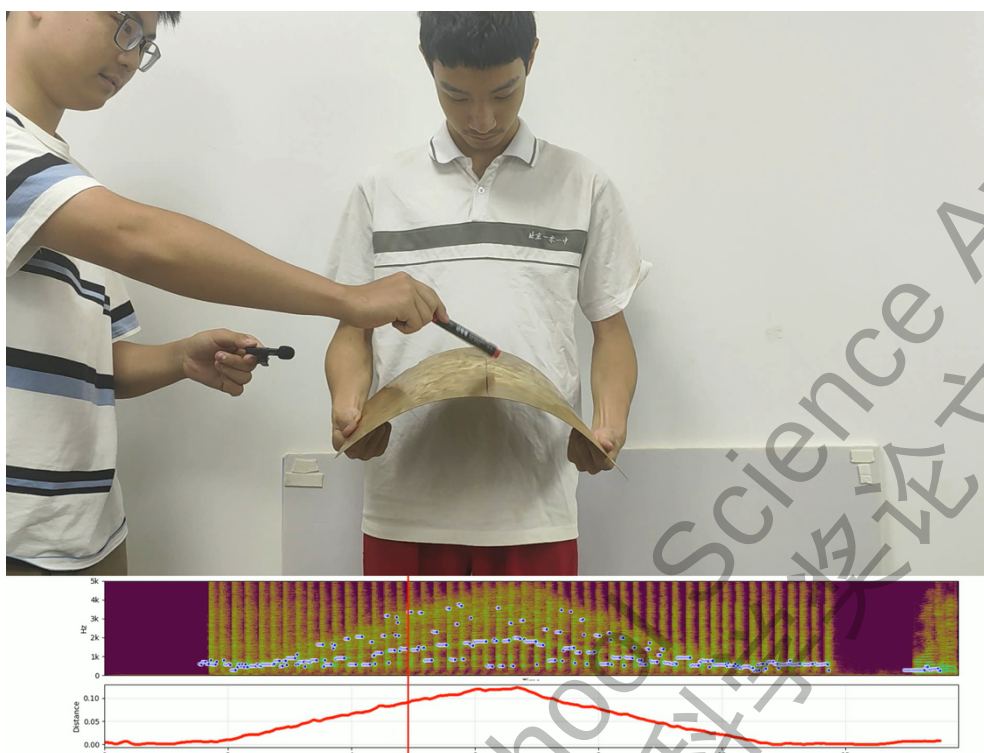


图 3.5: 敲击实验中黄铜板的振幅与声音频率的同步动态关系图

综合金属板动态变化产生“呼啸声”的过程和这一敲击实验，这让我们提出了本研究的核心猜想：“呼啸声”的瞬时频率 f 是由金属板的宏观振动幅值 A 所决定的。即存在一个明确的函数关系 $f = f(A)$ ，表现为频率随振幅的增加而增加。

3.4 本研究关注的核心问题

基于以上预备性观察与分析，本论文旨在回答以下三个核心问题：

第一，激发机制：“呼啸声”的初始振动是如何被激发的？其物理本质是什么？

第二，频率演化：为什么声音的频率会持续升高，形成“呼啸”的听感？是什么物理机制主导了这一频率-振幅的演化关系？

第三，定量描述：如何通过实验精确测量并建立振动频率与板件挠度之间的定量数学模型，并验证我们提出的理论假设？

我们将通过对这三个问题的深入研究，探究“呼啸金属板”背后的物理内涵。

第四章 理论分析

本章旨在为实验中观察到的“呼啸金属板”现象建立一个完整、自洽的理论框架。该现象的核心特征是声音的瞬时频率与金属板的宏观弯曲程度之间存在着紧密的耦合关系。这预示着其背后隐藏着一个典型的非线性动力学机制。

为精确描述这一多尺度动力学过程——即一个缓慢、大振幅的宏观弯曲如何调制一个快速、小振幅的微观机械振动——本章将从经典的冯·卡门大挠度理论出发，并创新性地引入**双时间尺度分析方法**与**准静态近似**。这一方法论使我们能够从复杂的非线性偏微分方程组中，解析地推导出描述宏观振幅如何通过“应力刚化”效应来调制高频振动瞬时频率的核心关系式，从而为后续实验提供坚实的理论解释。

在展开具体的结构力学分析之前，我们首先需要确立一个连接宏观声学测量与微观机械振动的基本准则。本研究基于一个近似假设：在声学远场中测量得到的声音主频率，可以被视为金属板在该时刻的机械振动频率。当然，在更精密的物理模型中，从机械振动到声波辐射的转化过程更为复杂。还需要考虑声辐射的具体模式、多普勒效应等复杂因素。然而，对于本项目的研究范畴和实验条件而言——即在**标准大气环境下，对宏观尺寸的金属板进行远小于声速的摇晃**——声学高阶效应所带来的频率偏差极其微小，其影响远小于由几何非线性引起的主频率变化。因此，将声音频率近似为金属板的振动频率，是本研究中一个有效且足够精确的简化处理，它使我们能够通过分析声音信号来直接探究板的非线性动力学行为。

本章的理论分析将沿循以下逻辑路径展开：

1. 振动的激发：首先，我们将运用**屈曲失稳理论**，定性解释初始振动是如何在外部载荷下被触发的，这对应着声音的产生瞬间。
2. 频率的演化：随后，我们将聚焦于“呼啸声”的核心特征——频率变化。我们将论证为何经典的线性振动理论无法解释实验观察到的高频现象，并以此为基础，引入冯·卡门几何非线性理论。最终，通过构建基于双时间尺度和准静态近似的频率调制模型，推导出频率与振幅之间的定量关系，解释“呼啸声”中核心的**频率—振幅耦合**现象并阐明其中关键物理参数的意义。

4.1 初始振动的激发：屈曲失稳和能量释放

预实验中我们观察到，声音的产生总是伴随着一个从平直形态到弯曲形态的**突变**过程。这一过程在结构力学中被称为**屈曲**。从初始形态（平衡态）发生屈曲失稳转变为弯曲形态这一突变过程是声音产生的触发点，伴随弹性势能释放，形成低频初始振动。

薄壁结构（如圆柱壳或我们研究的薄板）的一个显著特征即，在材料达到屈服极限

之前，就可能因几何不稳定性而发生突变式的形态改变[4]。

初始振动的激发的完整过程可以分为以下几个阶段的物理过程：

首先，初始状态下，平整的金属板处于一个低能量的稳定平衡态。当手部施加动态的压缩或弯曲载荷时，板内应力场逐渐建立，系统的弹性势能随之升高。

随后，当应力达到某个临界屈曲载荷 (Critical Buckling Load) 时，原有的平整构型将失去稳定性。此时，系统会从这个高势能的亚稳态平衡构型，突然“跃迁”到一个能量更低的、弯曲的构型，即后屈曲形态[3]。

最后，这个从高势能到低势能形态的突变过程，会以极快的速度释放出大量弹性势能。这部分被释放的能量主要转化为金属板的动能，为整个系统提供了初始振动激励。这个过程类似于“弹簧崩开”，其能量释放的瞬时性决定了它能够激发覆盖很宽频谱范围的振动。然而，金属板作为一个连续弹性体，其响应具有频率选择性，只会对其固有频率 (Natural Frequencies) 附近的激励产生共振放大。因此，我们听到的初始声音，其基频是由金属板刚刚进入屈曲形态后的结构特性所决定的。

屈曲失稳的理论解释了预实验中的两个关键观察现象：

激励阈值：必须施加足够的“摇晃”力度或加速度，即短时间内提供足够的能量使系统越过屈曲所需的能垒，才能触发声音。

初始声学特性：初始声音的响度与能量释放的规模 (ΔU) 正相关，而其初始声音的频率则由屈曲后的结构固有频率决定。

4.2 “呼啸声”的频率变化机制：几何非线性与频率-振幅关系

在展开详细的理论分析之前，首先对本研究中的核心物理量进行明确定义。在结构力学中，“挠度” $w(x, y, t)$ 是一个描述板上任意点 (x, y) 在 t 时刻垂直位移的场函数。而“振幅”，通常指振动过程中位移的最大值。在本研究的特定语境下，我们**金属板中心点的宏观位移最大值定义为宏观振幅**，记为 A 。因此，宏观振幅 A 可视为挠度场 w 在空间上的包络峰值，随时间变化，是描述板整体变形程度的关键实验观测量。

初步实验观察到的核心现象是，金属板发出的声音频率与宏观振幅 A 存在显著的同步变化关系，即“频率-振幅耦合”现象。这种频率随振幅变化的特性，是典型的非线性振动行为，其物理根源在于大挠度变形下不可忽略的几何非线性 (Geometric Nonlinearity) 效应。

经典的结构振动力学理论指出，板的动力学行为与其振动幅值密切相关：当振动幅值远小于板厚时，其行为是线性的；而当幅值与板厚相当或更大时，其行为则会偏离线性假设，进入非线性范畴。

据此，我们的理论分析将遵循以下路径：首先，通过线性振动理论确定结构在微小

振幅下的基准固有频率，并论证其局限性；然后，引入几何非线性理论，并针对本实验的多尺度特性，通过准静态近似构建一个描述宏观振幅调制高频振动的理论模型。

4.2.1 线性振动理论与固有频率

对于微小振动，即最大振动幅值 A 远小于板厚 h ($A \ll h$) 的情况，系统可以用线性理论描述。此时，板的自由、无阻尼振动由以下经典方程控制[9]：

$$D\nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (4.1)$$

其中：

ρ 是材料密度， h 是板厚度；

$w(x, y, t)$ 是横向挠度，这是理论中的核心变量，表示板上任意点 (x, y) 在 t 时刻的垂直位移；

∇^4 是双拉普拉斯算符，代表挠度在空间上的四阶导数；

D 是抗弯刚度：这是板的等效“弯曲硬度”，量化了板抵抗弯曲变形的能力。它是一个综合性参数，由材料的杨氏模量 E 、泊松比 ν 和板厚 h 共同决定：

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

值得注意的是， D 与厚度的三次方成正比，这解释了为什么厚度稍有增加，板就会变得“硬”得多。

该方程的解，即固有频率，对边界条件极为敏感。结构力学的教科书常以四边简支 (SSSS) 作为范例，给出在这一简单的边界条件下的解析解（式 4.2-4.3）。但这与我们的实验情况不符。在我们的实验中，手持薄板摇晃的边界条件是动态变化的，但可以将其近似为一个两对边简支、两对边自由的 SFSF 模型。

$$w(x, y, t) = \omega_{m,n} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) f(t) \quad (4.2)$$

$$\omega_{m,n} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (4.3)$$

SFSF 边界下的求解过程远比 SSSS 复杂，没有简单函数形式的解析解，通常依赖于半解析的列维法 (Lévy's Method) 数值求解。其推导思路纲要如下（详细推导过程见附录 B，相关计算代码及结果见附录 C）：

列维法通过假设一个分离变量形式的列维解，该解的形式自动满足在 x 方向上的两条简支边界条件，再代入式 4.1 的自由振动方程，可将原偏微分方程简化为一个关于 y 坐标的四阶常微分方程。应用自由边界条件：对上述常微分方程的通解，应用在 y 方向上两条自由边的边界条件（即弯矩为零，等效剪力为零）。求解频率方程，得到一个关于频率 ω 的复杂超越方程，也称为特征方程。这个特征方程的根对应着系统的一个

系列固有频率 ω_{mn} 。

我们通过编写程序对该方程其进行数值求解，表 4.1 列举了对于本实验所用板的尺寸，计算得到的最低阶固有频率（基频） $f_0 = \omega_{11} / (2\pi)$ 。

表 4.1: 金属板样品的线性固有频率

材料	尺寸 (mm)	厚度 (mm)	固有频率 (Hz)
H62 黄铜	420 × 300	0.47	21.66
H62 黄铜	300 × 300	0.59	40.53
H62 黄铜	300 × 300	0.69	47.40

如表 4.1 所示，理论预测的线性基频全部在 10-50 Hz 的低频范围。实际上，我们计算了多种边界条件的结果，在线性模型下，不管是哪种边界条件，由于理论本身考虑的挠度变化非常小，线性频率都是在 10 Hz 的量级。这与我们在实验中清晰听到的、频率高达数百甚至上千赫兹（ $10^2 \sim 10^3$ Hz）量级的“呼啸声”显然差距巨大，这个横跨一到两个数量级的巨大差异，并非意味着线性模型的错误，它说明了**线性模型在本实验场景下的局限性**。实验中板的振动并非“微小振动”，其振动幅值已经大到足以使系统的行为进入非线性区域。

因此，线性理论虽然无法完整解释我们观察到的现象，但它为我们提供了非线性模型的一个不可或缺的基础：线性理论计算出的基频 f_0 ，是当振动幅值非常小时的理论频率，它也是我们接下来要建立的非线性模型依赖的基础参数。

4.2.2 几何非线性振动理论

当最大振动幅值 A 增大到与板壳厚度 h 处于同一数量级以及更大时，必须考虑几何非线性的影响。其核心物理机制在于：在金属板面发生弯曲过程中，结构的中面会不可避免地产生拉伸应变。这种拉伸应变在中面内产生了额外的张力，类似于鼓膜被绷紧，从而显著增加了结构的等效刚度，为结构的振动提供了更多的能量来源。这种由结构表面位移引起的刚度提升现象，被称为**应力刚化 (Stress Stiffening)**。

描述这一现象的经典结构力学理论是冯·卡门大挠度理论[9]。该理论通过引入位移-应变关系中的非线性项，建立了一组耦合了横向位移 w 和面内应力函数 Φ 的非线性偏微分方程：

$$\begin{cases} D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \\ \nabla^4 \Phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (4.4)$$

这组方程描述了在如下几何非线性的物理内涵：

第一式（动力学方程）：方程左侧是我们熟悉的线性振动项（弯曲刚度恢复力 + 惯性力）。关键在于右侧新增的项，它描述了面内应力 Φ 与板的曲率（挠度 w 的二阶导数）之间的耦合作用。这正是“应力刚化”这一物理本质的数学体现：当板弯曲时，面内张力会产生一个额外的、抵抗变形的恢复力，从而“硬化”整个结构。

第二式（协调方程）：此方程揭示了面内应力场 Φ 的来源。面内应力 Φ 是由横向挠度 w 的非线性组合（即弯曲）所产生的。

实际上，这一冯卡门大挠度理论仍然是针对单时间尺度振动的动力学分析。在我们的研究中，薄板的振动表现为一种多尺度现象：一个低频、大振幅的宏观整体变形，与一个高频、小振幅的微观局部振动同时存在。理解这两种尺度运动之间的耦合机制至关重要。本研究的核心目的，就是从冯·卡门理论出发，探究宏观变形是如何通过“几何刚度”效应来调制高频振动的瞬时频率。

4.2.3 基于双时间尺度分析和准静态近似的频率调制模型

对于本实验的情景——即一个缓慢的大尺度宏观变形（手摇弯曲）调制一个快速的小振幅高频振动（产生的“嗡嗡”声）——采用传统的单时间尺度得到的杜芬方程来描述并不完全贴切。

我们基于这个更精确的物理图像，通过双时间尺度分析和准静态近似，揭示几何非线性如何通过“应力刚化”效应来调制系统的动态特性。

我们的理论首先建立在双时间尺度的物理图像之上：

1. 慢变量（宏观形变） $W_{macro}(x, y, t)$ ：由外部激励（如手摇）引起的板的整体弯曲是一个低频、大振幅的慢过程。其特征时间尺度 T_{macro} 约为 $0.1s \sim 1s$ ，远大于高频振动的周期。

2. 快变量（高频振动） $w_{fast}(x, y, t)$ ：叠加在宏观形变上的微小机械振动是一个高频、小振幅的快过程。其特征时间尺度 T_{fast} 约为 $0.01s \sim 0.001s$ （对应频率 $100Hz \sim 1000Hz$ ）。

核心假设：准静态近似(Quasi-Static Approximation)

由于 $T_{macro} \gg T_{fast}$ ，我们可以认为，在 w_{fast} 振动的任意一个周期内，宏观形变 W_{macro} 几乎是“冻结”的或恒定的。因此，我们可以将 W_{macro} 视为一个施加在板上的准静态预变形，它改变了板的“背景”刚度，从而影响 w_{fast} 的振动频率。

根据双时间尺度的思想，我们将板的总横向位移 W_{total} 和总面内应力函数 Φ_{total} 分解为宏观（慢）和微观（快）两部分：

$$W_{total}(x, y, t) = W_{macro}(x, y, t) + w_{fast}(x, y, t) \quad (4.5)$$

$$\Phi_{total}(x, y, t) = \Phi_{macro}(x, y, t) + \phi_{fast}(x, y, t) \quad (4.6)$$

其中，宏观形变 W_{macro} 可用其基底模态 $\Psi(x, y)$ 和时变幅值 $A_{macro}(t)$ 来表示：

$$W_{macro}(x, y, t) = A_{macro}(t) \cdot \Psi(x, y) \quad (4.7)$$

我们将分解后的位移和应力函数代入冯·卡门动力学方程：

$$D\nabla^4 W_{total} + \rho h \frac{\partial^2 W_{total}}{\partial t^2} = h \cdot L(W_{total}, \Phi_{total}) \quad (4.8)$$

这里的 $L(W, \Phi)$ 是一个代表面内应力与曲率耦合的非线性算子：

$$L(W, \Phi) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.9)$$

直接代入并展开将导致方程异常复杂，但我们可以利用变量的尺度特性进行简化。

我们的目标是得到一个描述快变量 w_{fast} 行为的方程。由于 w_{fast} 相比于 W_{macro} 非常小，我们可以合理将 w_{fast} 视作一个小量，

因此可以忽略所有包含 $w_{fast}^2, \phi_{fast}^2, w_{fast} \cdot \phi_{fast}$ 的高阶小项。这个过程等效于在宏观形变 W_{macro} 的慢变平衡位置附近对系统进行线性化。

对非线性算子 L 进行展开并只保留对快变量的线性项：

$$L(W_{macro} + w_{fast}, \Phi_{macro} + \phi_{fast}) \approx L(W_{macro}, \Phi_{macro}) + L(W_{macro}, \phi_{fast}) + L(w_{fast}, \Phi_{macro}) \quad (4.10)$$

将此代入完整的动力学方程，并分离快、慢变量，我们可以得到两组方程：

1. 慢变量方程(宏观平衡)：

$$D\nabla^4 W_{macro} + \rho h \frac{\partial^2 W_{macro}}{\partial t^2} = h \cdot L(W_{macro}, \Phi_{macro}) \quad (4.11)$$

2. 快变量方程(线性化后的动力学)：

$$D\nabla^4 w_{fast} + \rho h \frac{\partial^2 w_{fast}}{\partial t^2} = h \cdot [L(W_{macro}, \phi_{fast}) + L(w_{fast}, \Phi_{macro})] \quad (4.12)$$

这个快变量方程的右侧，它代表了宏观变形对微观振动的影响。其中， $L(w_{fast}, \Phi_{macro})$ 这一项的物理意义尤为关键。 Φ_{macro} 代表由宏观大变形 W_{macro} 产生的准静态面内应力场。这一项描述了已存在的宏观应力与高频振动的曲率的耦合作用。这正是**应力刚化**的来源。

将所有项移到左边，快变量的动力学方程可以整理成一个抽象的算子形式：

$$M(\ddot{u}) + [K_L + K_G(W_{macro})](u) = 0$$

其中：

- u 代表快振动位移 w_{fast}
- M 是质量算子 ρh 。
- K_L 是弯曲刚度算子 $D\nabla^4$ ，对应板在平直状态下的固有刚度。
- $K_G(W_{macro}) = -h \cdot [L(W_{macro}, \phi_{fast}) + L(w_{fast}, \Phi_{macro})]$ 是几何刚度算子。它是一个依赖于宏观形变 W_{macro} 的算子，其物理本质是宏观应力场对系统刚度的贡献。

上式是一个关于 w_{fast} 的线性振动方程，其瞬时圆频率 ω_{fast} 由总刚度 $K_{total} =$

$K_L + K_G(W_{macro})$ 决定。其固有圆频率的平方 ω_{fast}^2 与系统的刚度 K_{total} 成正比。因此，我们可以将圆频率平方分解为两部分：

$$\omega_{fast}^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega^2(W_{macro})$$

其中：

- ω_0^2 是仅由线性刚度 K_L 决定的固有频率平方，对应于板未变形时的线性基频 f_0
- $\Delta\omega^2(W_{macro})$ 是由几何刚度 $K_G(W_{macro})$ 带来的频率增量。

从冯·卡门协调方程可知（具体推导见附录 D），由宏观形变 $W_{macro} = A_{macro} * \Psi(x, y)$ 产生的应力 σ_{macro} (即 Φ_{macro} 的二阶导数) 正比于 A_{macro}^2 。因此，频率的增量平方 $\Delta\omega^2(W_{macro})$ 也正比于 A_{macro}^2 ：

$$\Delta\omega^2(W_{macro}) = C' A_{macro}^2$$

其中 C' 是一个包含了材料属性、几何形状和模态耦合信息的常数。

由此我们可以得到：

$$\omega_{fast}^2 = \omega_0^2 + C' A_{macro}^2$$

进行整理，得到与实验拟合一致的形式：

$$\omega_{fast} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{C'}{f_0^2} A_{macro}^2}$$

两边开方，并转换为频率 $f = \omega/(2\pi)$ ，记 $\beta = \frac{C'}{f_0^2}$ ，得到最终的核心关系式：

$$f_{fast}(A_{macro}) = f_0 \sqrt{1 + \beta A_{macro}^2(t)}$$

可以简写为：

$$f(A) = f_0 \sqrt{1 + \beta A^2}$$

该公式直观地揭示了非线性振动的核心特征：

线性回归：当宏观振动幅值 A 趋近于零时， $f(A)$ 回归到线性固有频率 f_0

非线性硬化：当宏观振动幅值 A 增加时，瞬时频率 $f(A)$ 以非线性的方式随之升高，表现出典型的“硬化弹簧”特性。

在此模型中，各参数的物理意义十分明确，并且可以和实验中的观测量直接联系起来：

- f ：“呼啸声”的瞬时频率，
- A ：板中心的宏观振幅，
- f_0 ：系统的线性固有基频，是线性模型下计算出的理论频率下限，
- β ：非线性耦合系数，其量纲为长度的负二次方 (m^{-2})。该系数是连接理论与实验的关键桥梁，它综合了材料属性 (E, ν)、几何尺寸以及振动模态的影响，直接

量化了“应力刚化”效应的强度。 β 值越大，意味着宏观变形 A 转化为系统刚度提升的效率越高，频率对振幅的变化就越敏感。

综上所述，通过构建基于双时间尺度和准静态近似的频率调制模型，我们成功地从冯·卡门大挠度理论出发，推导出了一个能够精确描述宏观振幅 A 与高频振动频率 f 之间函数关系的解析表达式，其核心参数 β 具有清晰的物理意义，为后续通过实验数据拟合来定量评估系统的非线性特性提供了坚实的理论基础。

第五章 实验装置与数据处理方法

本章详细阐述了用于验证第四章所推导几何非线性振动理论模型的实验方案。我们将首先介绍实验所用的材料与装置，随后重点描述如何从同步录制的音视频数据中，通过一套系统的数据处理流程，精确提取出核心的物理量——振幅 $A(t)$ 与频率 $f(t)$ 。

5.1 实验装置与材料

5.1.1 试验样品

本研究选用了一系列工业 H62 黄铜薄板作为实验样品。根据供应商提供的生产标准，该黄铜的杨氏模量 E 为 103 GPa，泊松比 ν 为 0.34。为确保几何参数的精确性，我们使用螺旋测微器在每块样品的不同位置进行多次测量后取平均值，以确定其厚度 h （精度 0.01 mm，原始数据记录见附录 A）。各样品的具体尺寸规格，以及依据第四章线性理论计算出的基频 f_0 ，均汇总于表 5.1。

表 5.1: 黄铜板样品规格及线性固有频率 f_0

样品编号	尺寸 (mm)	厚度 h (mm)	线性频率 f_0 (Hz)
黄铜 A	420 × 300	0.47	21.66
黄铜 B	300 × 300	0.59	40.53
黄铜 C	300 × 300	0.69	47.40

5.1.2 实验系统搭建

实验系统的搭建主要包含运动捕捉与声学采集两个同步进行的模块。如图 5.1 所示。为实现运动捕捉，我们将一台摄像机（帧率 120 fps）置于金属板侧前方，清晰记录板在振动过程中的侧面轮廓和中心点的位移。与此同时，一支高灵敏度电容麦克风被放置在板的下方约 10 厘米处，用于同步录制振动产生的声信号。音频以 48 kHz 的

采样率和 16 位的位深度进行录制，以保证足够高的保真度和频率分析范围。



图 5.1：实验装置示意图

5.2 数据采集与处理流程

本研究的核心在于建立频率 f 与振幅 A 之间的函数关系，这要求我们从原始的音视频记录中，提取出两条严格时间同步的信号： $f(t)$ 和 $A(t)$ 。为此，我们设计并执行了一套完整的数据处理流程，如图 5.2 所示。

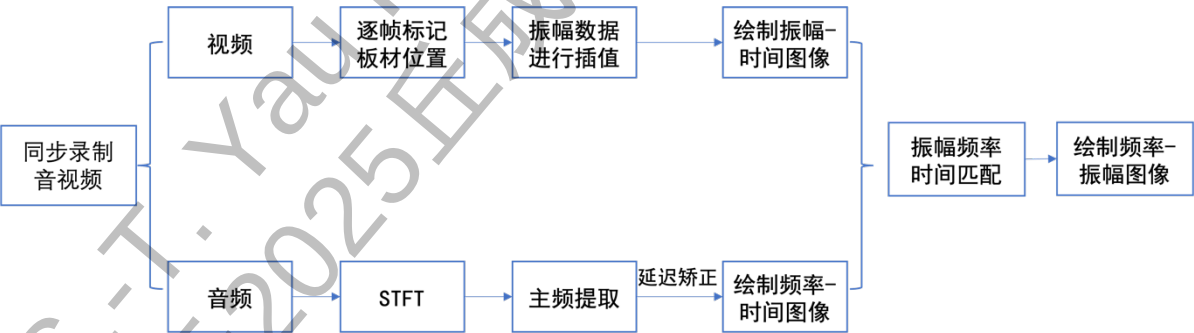


图 5.2：数据采集与处理流程图

流程的第一步，是音视频的精确同步。如图 5.3 所示，在每次实验录制开始时，我们通过制造一个清晰的视听同步事件（如响亮地拍手）来产生一个时间基准点。这个事件在视频中表现为双手接触的瞬间，在音频中则是一个尖锐的脉冲峰。在后续数据处理中，我们将此事件的发生时刻定义为共同的时间零点，从而确保了后续提取的挠度和频率信号能够在时间轴上精确对齐。



图 5.3: 音视频的同步处理

振幅 $A(t)$ 的提取是通过开源物理分析软件 Tracker 完成的。如图 5.4 所示,我们将录制的实验视频导入软件,并利用板自身已知的宽度作为参考标尺,建立起像素坐标到真实物理尺寸(米)的转换关系。随后,我们对视频进行逐帧分析,人工标记出三个关键点的垂直位置:板的左边缘点、右边缘点以及中心点(即预期的最大挠度位置)。采用三点追踪而非单点追踪的目的,是为了消除由手部晃动引起的整体位移的干扰。真实的中心振幅 $A(t)$ 被定义为中心最高点的坐标到左右两边缘点连线的距离。通过这一步骤,Tracker 软件导出了一系列离散的振幅-时间数据点。



图 5.4: Tracker 软件处理振动形态

为了在离散的数据点之间获得连续的振幅估计，我们对导出的振幅数据应用了移动平均滤波以及线性插值方法，生成了一条高时间分辨率的连续振幅曲线。如图 5.5a 所示，红色点为 Tracker 导出的离散数据，蓝色线为经过插值处理的连续振幅曲线，构成了最终我们的挠度信号 $A(t)$ 。

瞬时频率信号 $f(t)$ 的提取则是通过对音频文件进行时频分析来完成。由于“呼啸声”的频率随时间快速变化，是一种典型的非平稳信号，传统的傅里叶变换（FFT）无法捕捉其时变特性。因此，我们采用短时傅里叶变换（Short-Time Fourier Transform, STFT）进行分析。STFT 的核心思想是将长时域信号分割成一系列短的、相互重叠的窗口，并对每个窗口内的信号执行 FFT，最终生成一个二维时频谱，直观地展示了频率成分如何随时间演变。在参数选择上，我们选用汉宁窗（Hanning Window）以减少频谱泄漏；窗口长度设为 1024 个采样点，重叠率为 75%，这一组参数是在保证必要频率分辨率的同时，捕捉声音快速变化细节的良好折衷。在生成时频谱后，一个关键的预处理步骤是背景噪音的滤除。为了增强信噪比，我们设定了一个 -70 dB 的响度阈值。在时频谱中，响度低于此阈值的频率成分被视为背景噪音并被筛选出去。最后，如图 5.5b 所示，在经过降噪处理的时频谱上，我们于每一个时间片内搜索能量最强的频率点，构成了我们所需的瞬时主导频率序列 $f(t)$ 。

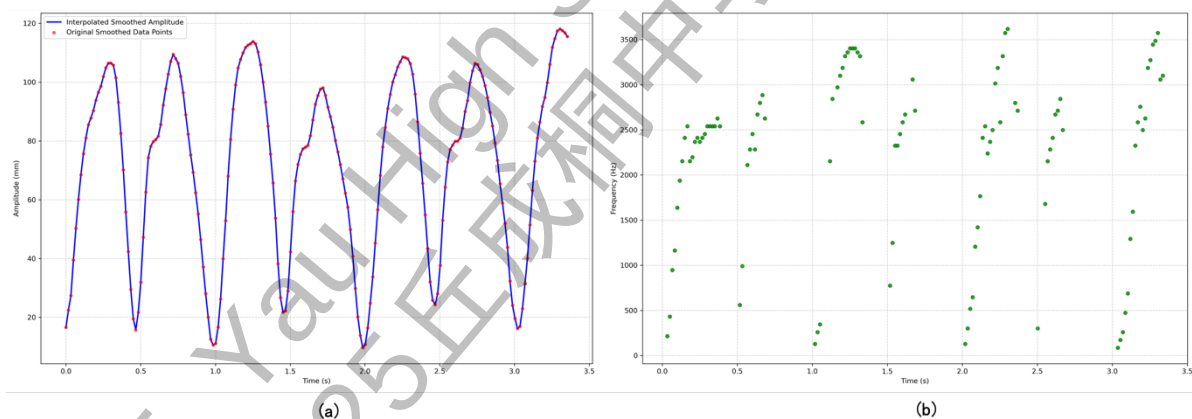


图 5.5: 左图为挠度信号 $A(t)$ ，红色点为 Tracker 导出的离散振幅数据点，蓝色线为经过插值处理的连续振幅曲线；右图为最终提取出的瞬时频率信号 $f(t)$

通过上述流程，我们成功地从原始记录中获得了两组精确同步的时间序列数据： $A(t)$ 和 $f(t)$ 。将这两组数据在时间上进行匹配，便可生成用于后续分析的数据对 (A, f) ，为定量验证我们在第四章中建立的理论模型提供了坚实的数据基础。

第六章 实验结果与分析

本章将系统地展示通过第五章所述实验方法获得的测量数据，并将其与第四章建立的理论模型进行深入的对比与验证。我们的分析将从对一次典型“呼啸”事件的动态过程进行定性描述开始，逐步深入到对频率-振幅关系进行严格的定量拟合，并最终通过跨样本的比较，揭示核心物理参数的内在意义。

6.1 典型“呼啸”的动力学过程分析

图 6.1 展示了一次典型的黄铜板“呼啸”事件中，同步记录的瞬时振幅 $A(t)$ 和瞬时频率 $f(t)$ 的演化曲线。

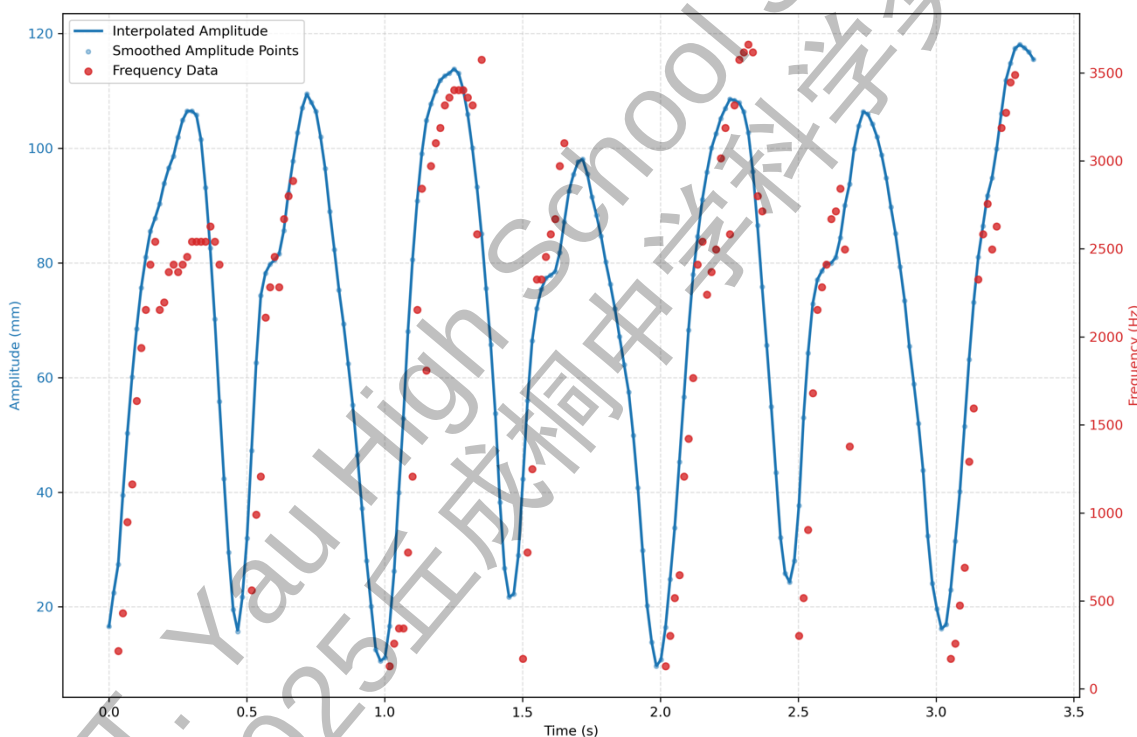


图 6.1：单次呼啸事件中的振幅-时间与频率-时间关系图

该图直观地揭示了“呼啸声”现象的核心动力学特征：瞬时频率 $f(t)$ 的演化曲线与振幅 $A(t)$ 的包络线呈现出高度的正相关性。随着手部持续施力使板的宏观弯曲程度（即振幅）逐渐增大，我们观察到声音的频率也随之平滑地上升，这清晰地展示了第四章理论中描述的几何非线性（应力刚化）效应。在振幅达到峰值后开始下降的过程中，图中被提取出的有效频率数据点（红色散点）明显变得稀疏。这是因为，在振幅下降阶段，结构阻尼和声辐射导致系统能量耗散，板的振动减弱，其发出的声音响度也随之迅速降低。当声音信号的功率下降到我们设定的 -70 dB 探测阈值以下时，算法便无法再

将其与背景噪音有效区分，从而停止提取主频。这种“声学静默”的状态会一直持续，直到板的形态在下次晃动中发生新的屈曲失稳，重新为系统注入能量，开始新一轮的振动与“呼啸”。

这一完整的动态过程为理论中频率和振幅的高度耦合提供了初步的定性证据。

6.2 频率-振幅关系的定量验证：以长方形黄铜板为例

为了从定性观察走向定量验证，我们以实验效果最显著的黄铜长方形板（样品 A）为例，深入剖析频率与振幅之间的数学关系。我们将实验中的所有有效数据对 (A, f) 绘制在同一张散点图中，如图 6.2 所示。图中可以观察到清晰的趋势：频率 f 随着振幅 A 的增加而非线性地增加，这与理论预测的“硬化弹簧”特征完全吻合。

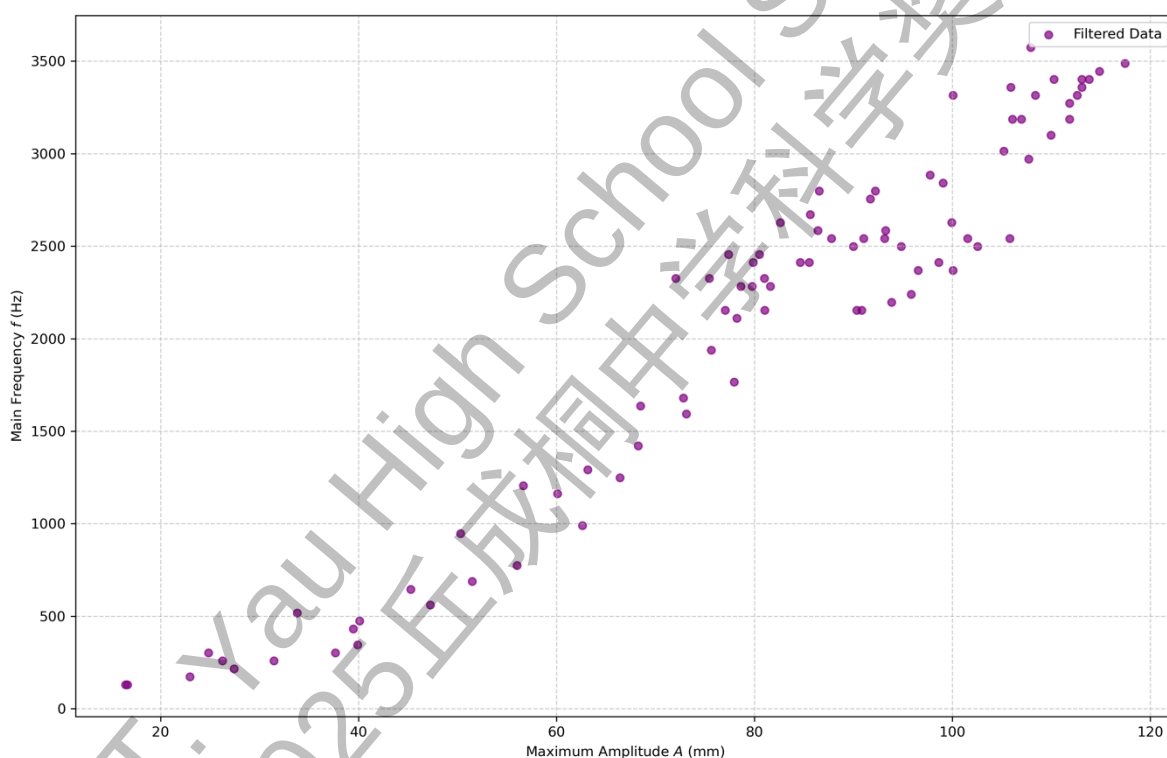


图 6.2: 样品 A（黄铜长方形板）的频率-振幅散点图

6.2.1 基于理想非线性模型的验证

我们首先尝试使用第四章推导出的理想非线性模型进行拟合：

$$f(A) = f_0 \sqrt{1 + \beta A^2}$$

图 6.3 展示了理想非线性模型的拟合结果。在此模型中， f_0 是理论计算的线性固有频率，而 β 是一个具有物理量纲（单位为 mm^{-2} ）的非线性系数。它的物理意义在于直接量化了结构的振动频率对其振动振幅物理值的敏感程度， β 值越大，意味着应力

刚化效应越强，频率随振幅的增长越快。

如图 6.3 所示，理想非线性模型（红色虚线）成功地捕捉了数据整体的“硬化”趋势，这初步证明了几何非线性确实是驱动频率上升的核心机制。然而，图中也暴露了显著的系统性偏差：在低振幅区域，实验数据点较为稀疏，理想非线性模型无法有效的成功拟合这一数据。这表明，理想的非线性模型忽略了某些在真实实验中不可避免的次级效应或非理想因素。

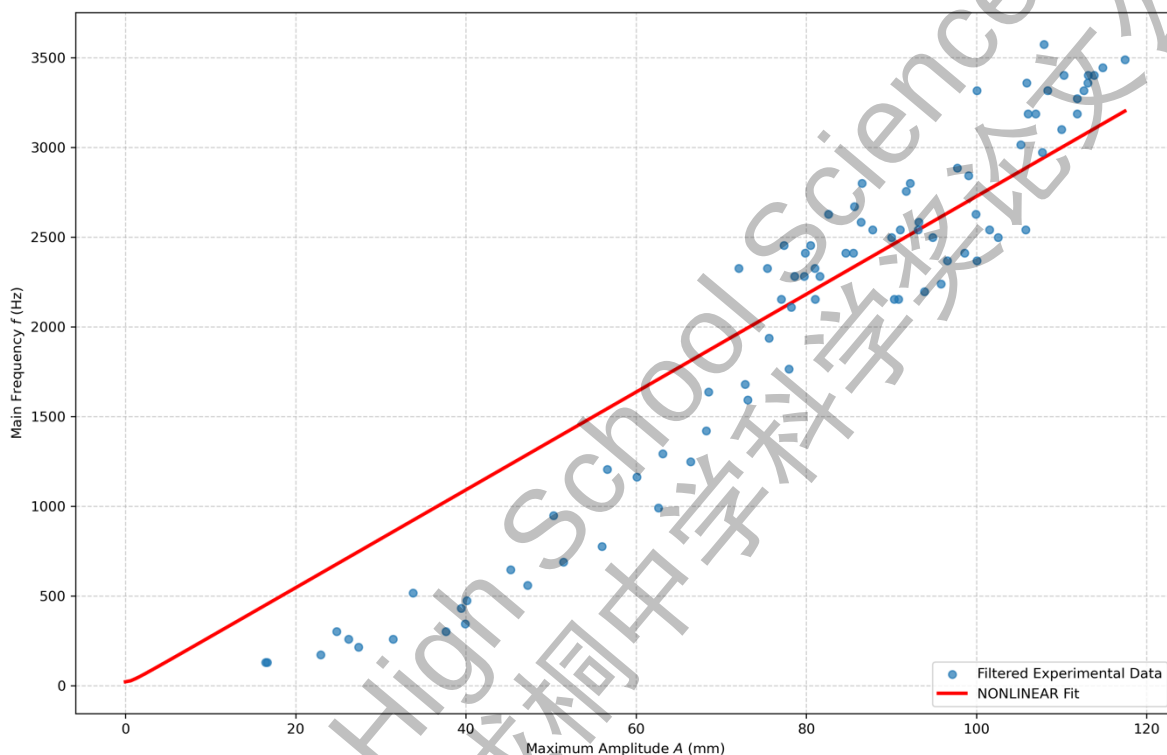


图 6.3：样品 A 的频率-振幅散点图及理想非线性模型拟合

6.2.2 考虑低幅值行为修正的非线性模型

我们认为，理想模型在低振幅区的失效是物理现实与实验测量限制共同作用的结果。一方面，在振幅较小时，板内由拉伸引起的应力刚化效应可能尚未被完全“激活”，或其贡献远小于其他因素（如边界的微小非线性），导致频率演化偏离理想模型。另一方面，我们的测量系统也存在固有限制，例如实验用麦克风在低频区（低于 100 Hz）的灵敏度会显著下降，同时信噪比恶化，可能导致我们的主频提取算法在基频信号微弱，无法获取有效的数据点。同时，Tracker 在零点标记时可能存在一个系统性偏差。

对这些次级效应进行精确的物理建模已超出了本论文的核心范畴。因此，我们采取一种务实的分析策略：构建一个修正模型，其核心目的并非完美解释低振幅区的复杂行为，而是作为一种有效的数学工具，用以隔离和吸收这些干扰效应，从而使我们能够从物理意义更明确的高振幅区数据中，提取出更接近真实的非线性系数 β 。

基于此，我们构建了如下的分段修正模型。该模型的核心思想在于，将完整的振幅区间以一个**振幅阈值** A_a 为界，划分为两个物理意义不同的部分进行描述。

当振幅 A 大于阈值 A_a 时，我们认为实验数据能够可靠地反映几何非线性效应。因此，在这一“高振幅区”，模型采用了我们核心的非线性理论形式，即 $f(A) = f_0 \sqrt{1 + \beta(A + \epsilon)^2}$ ，其中，我们引入了**零点修正量** ϵ ，它的作用是作为一个拟合参数，用于吸收和补偿由板件初始微小翘曲和 Tracker 软件零点标定共同导致的起始偏差。而在振幅 A 小于或等于 A_a 的“低振幅区”，我们认识到数据受到了多种复杂因素（如测量系统限制、低信噪比等）的干扰，不再严格遵循理想的非线性规律。因此，我们不再强求模型符合理想物理理论，而是将其简化为一个**常数项**，用以概括该区域观测到的“频率平台空缺”现象。为了保证整个函数在分段点 A_a 处的数学连续性，我们将此常数项的值设定为非线性模型在分段点 A_a 处的取值。

综上所述，完整的修正模型表达式如下：

$$f(A) = \begin{cases} f_0 \sqrt{1 + \beta(A_a + \epsilon)^2}, & (A \leq A_a) \\ f_0 \sqrt{1 + \beta(A + \epsilon)^2}, & (A > A_a) \end{cases}$$

如图 6.3 所示，该修正模型（紫色虚线）的拟合效果得到了显著的提升， R^2 从 0.86 跃升至 0.94。拟合得到的参数为 $\beta = 1.93 \pm 0.13 \text{ mm}^{-2}$ ， $A_a = 32.37 \pm 3.14 \text{ mm}$ ，以及零点修正 $\epsilon = 27.03 \pm 2.12 \text{ mm}$ 。

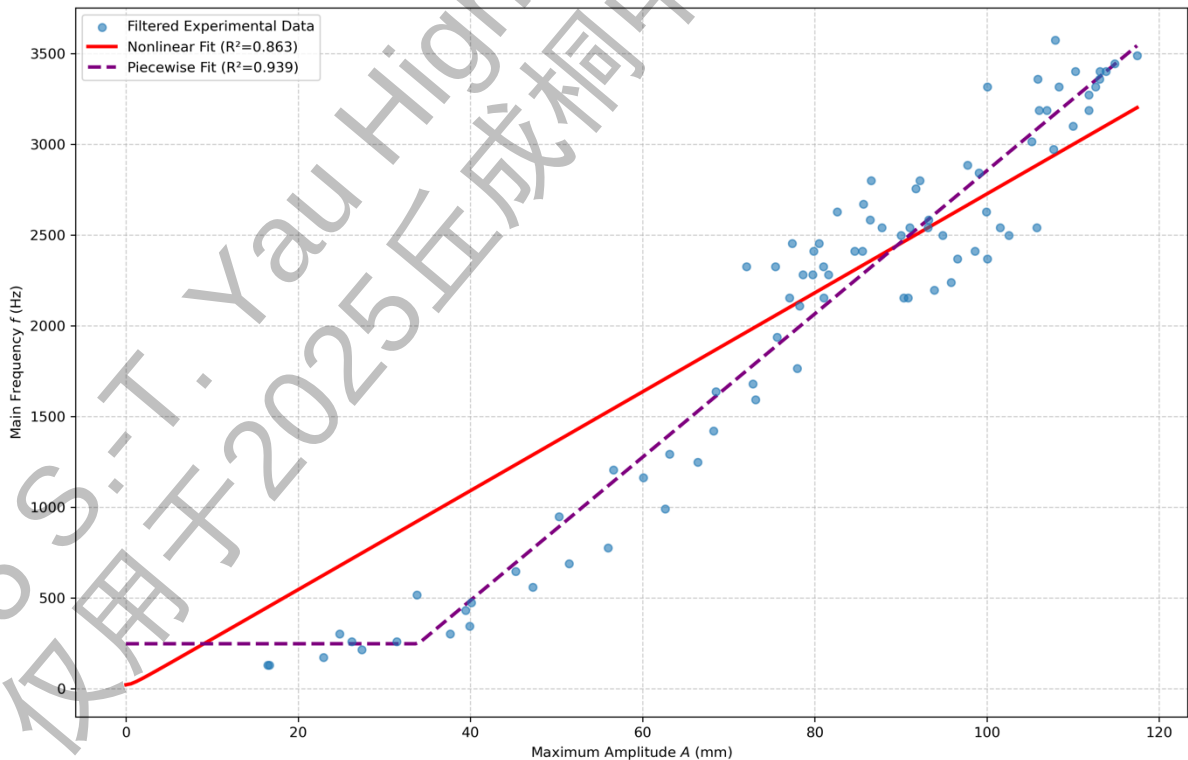


图 6.3: 样品 A 的频率-振幅散点图及修正非线性模型拟合

该修正模型不仅在经验上较好地拟合了数据，更重要的是，它通过振幅阈值 A_a 和零点修正量 ϵ 定量地剥离了次级效应和系统误差，最终为我们提供了一个更纯粹、更接近物理真实的非线性系数 β 。

6.3 跨样本分析比较：几何与厚度的影响

为了检验我们分析方法的普适性，并探究几何形状与厚度对非线性行为的影响，我们对不同的样品进行了相同的理想模型和修正模型拟合，结果汇总于表 6.1。

表 6.1: 不同实验样品分别在理想模型和修正模型下的拟合结果

样品编号 (形状/厚度)	模型	R^2	$\beta \text{ (mm}^{-2}\text{)}$	$A_a \text{ (mm)}$	$\epsilon \text{ (mm)}$
样品 A (长方形 0.47 mm)	理想	0.86	0.35 ± 0.01	-	-
	修正	0.94	0.73 ± 0.05	33.95 ± 3.02	-27.70 ± 2.18
样品 B (正方形 0.59 mm)	理想	0.76	0.25 ± 0.02	-	-
	修正	0.78	0.35 ± 0.08	8.23 ± 3.09	-3.50 ± 2.15
样品 C (正方形 0.69 mm)	理想	0.54	0.22 ± 0.03	-	-
	修正	0.56	0.33 ± 0.09	9.86 ± 5.68	-3.37 ± 2.58

从修正模型拟合出的非线性系数 β ，我们观察到一个清晰的规律：两块正方形板（样品 B 和 C）的 β 值在修正后稳定在 $0.33 - 0.35 \text{ mm}^{-2}$ 的区间内，而长方形板（样品 A）的 β 值则显著更高，达到了 0.73 mm^{-2} 。这一结果表明， β 并非一个普适的材料常数，而是与板的几何形状相关。直观的物理解释是， β 定量地描述了平面内拉伸应变（即应力刚化效应）的“效率”，而长方形板的基频模态在此转化效率上要高于对称性更好的正方形板。

同时，我们通过拟合得到的 β 值，实际上可以理解为一个“有效非线性系数”。它在捕捉几何非线性效应的同时，也很可能隐式地“吸收”了我们当前理论模型未能考虑到的其他物理机制。例如，我们的理论模型未包含耗散项，而真实系统中可能包含着与振幅相关的非线性阻尼效应，其等效作用可能已被部分包含在 β 值中。另一不容忽视的因素是边界条件的非理想性，手持边界是一个复杂的柔性非线性边界，而非理想简支，其非线性行为同样可以贡献于系统的总频率硬化，而其贡献也被我们的拟合“吸

收”进了 β 这个单一参数中。最后，我们也不能完全排除多模态耦合等更深层次的动力学行为，我们的单模态模型会将这种复杂性全部投影到有效系数 β 之上。因此，我们对 β 的最终理解是：它是一个以几何非线性为主要贡献，但同时融合了多种物理机制的综合性唯象参数，是衡量一个结构振动系统“有效非线性强度”的物理指标。

这一结论的可靠性，也得到了修正模型中另外两个参数零点修正量 ϵ 和振幅阈值 A_a 的佐证。观察数据可以发现，长方形板的零点修正系数 ϵ (-27.70 mm) 的绝对值远大于两块正方形板 (约 -3.5 mm)。这与物理直觉高度相符：非对称的长方形几何具有更低的抗弯刚度，因此在实验操作中更容易产生显著的初始翘曲，而零点修正量 ϵ 正是对这一效应进行了有效的定量描述。

与此同时，标志着系统行为转变的振幅阈值 A_a 也展现出与物理现实的关联。我们观察到，较厚的样品 C 的振幅阈值 A_a (9.86 mm) 略大于较薄的样品 B (8.23 mm)，这可能暗示着更硬的板需要一个更大的初始变形，才能让非线性效应完全“激活”并主导系统行为。值得注意的是，厚度最大的样品 C 的拟合 R^2 (0.56) 在所有样品中最低，这进一步说明其较高的刚度不仅使其难以被有效激励，也导致实验数据信噪比相对较差，从而影响了拟合的优度。

综上所述，通过引入分段修正模型，我们不仅成功提取出了更可靠的非线性系数，更重要的是，模型中的每一个参数 (β, ϵ, A_a) 都展现出了清晰的物理指示性。它们共同描绘了一幅自洽的物理图像：核心参数 β 定量地给出了金属板的非线性行为的强度，板的几何形状又进而影响了其非线性参数 β 、起始状态 ϵ 和激活阈值 A_a 。

6.4 误差分析

任何物理研究都伴随着测量和理论上的不确定性，对这些误差来源进行诚实和系统的分析，是评估我们研究结论可靠性的重要步骤。本实验的误差主要可以从理论模型、声学近似和实验测量三个方面进行探讨。

首先，在理论模型层面，我们构建的频率调制模型是一个基于特定物理图像的理想化框架。核心的创新点在于，我们通过双时间尺度分析和准静态近似，从复杂的冯·卡门方程组中成功分离出描述宏观变形如何调制高频振动的解析关系。这一方法的成功，依赖于宏观变形（慢变量）与微观振动（快变量）之间时间尺度的显著分离。然而，这一近似的有效性本身就构成了理论误差的一个来源：在板的运动状态发生剧烈变化的瞬间（例如，运动方向反转时），宏观振幅的变化率可能不再“足够慢”，此时准静态假设会引入瞬时偏差。此外，模型忽略了阻尼效应，而实际系统中空气阻尼和材料内耗散始终存在。我们对边界条件的 SFSF（两边简支，两边自由）近似，也是对复杂手持动态边界的简化。这些理论上的简化与近似所带来的系统误差，其综合影响体现

在了模型与实验数据的偏离度上。线性模型下不同边界条件计算出的固有频率 f_0 的偏差在 10% 左右，这些效应在我们的研究中实际上被非线性耦合系数 β 的拟合所吸收。考虑到我们模型的 R^2 值在 0.56 到 0.94 之间，可以说该模型解释了大部分的数据变异，但仍有 6%到 44%的变异是由这些未建模的复杂因素（如阻尼、边界非理想性、准静态近似的瞬时失效等）所贡献。

其次，我们研究方法的前提是将测量的声音频率近似等同于板的机械振动频率，这一近似本身也引入了误差。声学是一门复杂的学科，从振动源到声波的产生与传播涉及到复杂的流固耦合效应。例如，快速振动的板面可能引起微弱的多普勒效应，同时近场声学效应也比远场更为复杂。然而，我们有充分的理由认为这种近似在本研究中是合理且误差可控的。由于板的整体位置相对固定，其振动速度分量在传播方向上的投影很小，因此多普勒频移效应预计远小于 1%。与我们观察到的高达数百赫兹的频率变化相比，这些声学近似引入的误差属于次要量级，并不会影响我们对核心物理规律判断。

最后，实验测量过程是误差最直接的来源。材料力学参数如杨氏模量 (E) 和泊松比 (ν) 直接取自工业标准而非实测，根据标准手册，黄铜的杨氏模量本身就有约 $\pm 10\%$ 的浮动范围。由于线性频率 f_0 正比于 $\sqrt{E}$ ，此项可能为 f_0 的理论计算值带来约 $\pm 3\%$ 的不确定性。在数据采集上，使用 Tracker 软件进行振幅 A 的标定与追踪时，存在像素级的判读误差。以 1920 x 1080 分辨率的视频为例，若板宽 300 mm 在画面中占据约 1000 像素，则每像素约代表 0.3 mm。考虑到人为点击的误差可能在 ± 2 像素范围内，单次振幅测量的绝对误差可估计在 ± 0.6 mm 左右。对于 50 mm 的典型振幅 z_{hi} ，这相当于 $\pm 1\%$ 的相对误差。

此外，对于频率 f 的测量也存在固有的分辨率限制。这源于快速傅里叶变换(FFT)的原理，其频率分辨率 Δf 由采样率 f_s 和单次分析的样本数 N 共同决定：

$$\Delta f = f_s / N$$

根据我们代码中的配置参数，采样率 f_s 为 44100 Hz，FFT 窗口大小 N 为 1024 个采样点。由此计算可得，我们分析中的理论频率分辨率为： $\Delta f = 44100 \text{ Hz} / 1024 \approx 43.1 \text{ Hz}$ 。这引入了至多可达 $\Delta f / 2 \approx \pm 21.5 \text{ Hz}$ 的潜在测量误差。虽然这一误差值相对较大，并且是导致我们实验数据点在拟合曲线周围出现散布的重要原因之一，但它并不会影响我们观察到的频率随振幅增长数百赫兹的宏观趋势。我们选择较小的窗口 ($N = 1024$ ，对应约 23 毫秒) 是为了获得足够高的时间分辨率，以捕捉“呼啸声”中频率的快速动态变化，这是研究中不可避免的一种权衡。综合来看，声音频率测量误差是导致数据点在拟合曲线周围散布的主要原因。

综上所述，尽管存在来自理论模型近似、声学简化和物理测量的多源误差，但它们的量级都显著小于我们所研究的核心现象——即由几何非线性主导的、跨越数百赫兹

的频率增长。因此，我们确信这些误差虽影响了数据的精度，但并未动摇本研究的核心结论：金属薄板在被激发后的大幅振动中，其振动频率与振动幅值之间存在着明确的、可用我们提出的非线性频率调制模型有效描述的强耦合关系。

2025 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2025丘成桐中学科学奖论文公示

第七章 总结

本研究的起点源于我们对一个物理现象的好奇：当一块大型薄金属板被快速摇晃时，为何会发出一阵音调连续变化的“呼啸声”。为了探明其背后的物理内涵，我们展开了一段从定性观察到定量验证的系统性研究。我们的旅程始于预实验，通过对比不同材料的响应，我们率先确立了产生该现象的材料力学条件，即适中的杨氏模量与足够高的屈服强度，并将研究焦点锁定在能够发生显著弹性振动的黄铜板上。初步的声学与运动观察让我们提出了核心猜想：声音频率与板的振动幅值存在紧密的耦合关系。

为解释这一现象，我们深入到结构动力学的理论层面。我们确认了初始振动源于屈曲失稳过程中的能量释放，而核心的“呼啸”变调现象则是由大幅度振动中的几何非线性效应所主导。本研究的核心理论贡献在于，我们没有止步于传统的非线性振动模型，而是针对该问题显著的多尺度特性——即缓慢的大尺度弯曲与快速的小尺度振动并存——**创新性地构建了基于双时间尺度分析和准静态近似的频率调制模型**。该模型从经典的冯·卡门大挠度理论出发，成功地解析出描述瞬时频率与宏观振幅之间的定量关系。这一理论模型不仅物理图像清晰，而且其参数具有明确的物理意义。

随后，我们设计了一套音视频同步采集的实验方法，通过 Tracker 软件追踪振幅，并利用短时傅里叶变换（STFT）分析音频以提取瞬时频率，获得了精确的实验数据。最终，在实验分析阶段，我们将实测数据与理论模型进行拟合与比较，不仅验证了理论的正确性，更通过修正模型深化了对物理机制的理解。

综合整个研究过程，我们得出结论：薄金属板的“呼啸”现象是一个完整的、可被定量描述的非线性动力学过程。实验数据清晰地证实，板的振动频率随其振动幅值的增加而呈现“硬化”趋势，这与几何非线性理论所预测的 $f(A) = f_0\sqrt{1 + \beta A^2}$ 模型高度吻合。我们进一步认识到，理想模型在低振幅区的失效揭示了真实物理系统的复杂性。为此，我们原创性地提出了**分段修正模型**，不仅通过引入激活阈值和零点偏移进一步提升拟合优度，这些参数均展现出清晰的物理指示性，将测量误差、初始翘曲等次级效应与核心的非线性行为进行了有效剥离。通过跨样本分析，我们最终揭示了非线性系数 β 的物理内涵：它并非一个普适的材料常数，而是与板的几何形状密切相关，是一个以几何非线性为主要贡献，同时融合了边界条件等多种物理机制的综合性唯象参数，是衡量一个特定振动系统“**有效非线性强度**”的物理指标。

本研究成功地将一个生活中的声学趣闻，转化为一个物理图像自洽、理论模型可靠、实验数据支撑有力的结构非线性振动问题。通过引入双时间尺度分析方法，我们为理解此类宏观变形调制微观振动的多尺度物理问题提供了一个有效的理论范式。

第八章 研究局限与未来展望

任何研究都受限于其特定的条件，对本研究局限性的理解，是通往更深入科学探索的必要前提。我们的研究主要存在以下几个方面的局限性。

首先，在理论层面，我们基于双时间尺度分析和准静态近似构建的频率调制模型，其有效性建立在一系列假设之上。

1. 准静态近似的局限性：该近似的核心是假定宏观变形相对于微观振动的变化足够缓慢。当板的运动状态发生急剧改变时，例如在最大振幅处速度为零并反向加速的瞬间，这一时间尺度分离的假设可能被短暂破坏，从而引入理论偏差。

2. 单模态主导假设：我们的模型简化地假设高频振动由单一主导模态构成，而忽略了宏观大变形可能引发的多模态耦合与能量串扰。真实的振动过程可能更为复杂，能量或许会在不同振动模式间发生转移。

3. 物理效应的简化：模型为了解析上的便利，忽略了实际系统中普遍存在的能量耗散，即阻尼效应。同时，我们将复杂多变的手持边界条件近似为理想的 SFSF（两边简支、两边自由）模型，这与真实的、具有柔性和非线性手部约束存在差距，也是理论计算的线性基频 f_0 与真实情况存在偏差的来源之一。

其次，在实验层面，我们的研究也面临着客观条件的制约。其一，受限于高中阶段紧张的学术日程与有限的课余时间，我们未能对更广泛的材料样本（如不同牌号的钢、铝合金，乃至复合材料）和几何构型（如不同的长宽比、预弯曲的曲板）进行系统性的测试，这使得我们关于非线性系数 β 与几何形状关系的结论尚处于初步阶段。其二，受限于非专业的实验器材，部分实验数据的精度有待提升。例如，使用普通摄像机而非高速科研相机进行运动捕捉，以及利用 Tracker 软件进行人工逐帧标记，不可避免地引入了判读误差；同时，未经专业校准的麦克风在低频区的灵敏度可能存在衰减。这些因素共同导致了实验数据点存在一定程度的散布，尤其体现在刚度较大、难以有效激励的样品 C 上（其修正模型的 R^2 仅为 0.56），影响了拟合结果的精度。

正视这些局限性，也为我们未来的研究指明了清晰的方向。展望未来，本研究可以在以下几个方面进行深化与拓展。

第一，理论模型的精细化。未来的工作可以从我们理论框架的根本假设出发进行深化。例如，通过更高阶的摄动法或数值方法，研究在准静态近似失效的区域，慢变量动力学对快变量的瞬时影响，构建一个包含动态修正项的更完备模型。另一个重要方向是考虑多模态耦合效应，将模型从单模态振动拓展至多模态，探究能量在不同振动模式间的传递机制。此外，在模型中引入与振幅相关的非线性阻尼项，也是更准确描述能量耗散过程的关键。有限元分析（FEA）在此将扮演关键角色，它不仅能模拟复杂的

边界条件以精确预测 f_0 和 β ，更重要的是，它可以用于验证准静态近似的适用边界，并对多模态耦合行为进行高保真数值探究。

第二，实验手段的专业化升级。为克服当前测量精度的瓶颈，可以采用更先进的非接触式测量技术。例如，引入三维数字图像相关法（3D-DIC），它可以实时获取板在振动过程中的全场位移和应变信息，而不仅是中心点的振幅。这不仅能极大地提升数据精度，更能直观地验证我们所依赖的“单模态主导”假设是否在整个过程中都成立。

第三，研究范围的系统性拓展。在时间和条件允许的情况下，应开展更具广度的参数化研究。系统地测试不同材料（从各向同性金属到各向异性复合材料）、不同几何形状（连续变化的长宽比、厚度）以及不同初始条件（如施加预应力或预弯曲）对非线性系数 β 的影响，从而建立起一个更具普适性的数据库和经验规律。

最后，应用潜力的探索。本研究揭示的频率-振幅耦合关系，本身就预示着潜在的应用价值。未来的探索可以超越纯粹的物理学范畴，尝试利用这一原理设计新颖的工程装置或音乐工具，例如，我们希望能够研发一种可通过控制振幅，金属板尺寸等方式来主动调节自身共振频率，创造出音色可控、表现力更丰富的打击乐器（如“雷声板”的改进版），在学校的乐队表演中进行使用。这些探索不仅能将基础研究的成果转化为实际应用，也为我们理解和驾驭非线性世界提供了新的思路。

参考文献

- [1]. Soedel, W., & Qatu, M. S. (2005). *Vibrations of Shells and Plates*, Third Edition. The Journal of the Acoustical Society of America, 117(4), 1683–1683. <https://doi.org/10.1121/1.1873932>
- [2]. T. V. Kármán, “Festigkeitsprobleme im Maschinenbaum. Encyklopadie der Math,” Wiss. V/4C, Leipzig, 1910, pp.311-385.
- [3]. VON KARMAN, T., & TSIEN, H.-S. (1941). The Buckling of Thin Cylindrical Shells Under Axial Compression. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 8(8), 303–312. <https://doi.org/10.2514/8.10722>
- [4]. Amabili, M. (2003). Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. *Applied Mechanics Reviews - APPL MECH REV*, 56. <https://doi.org/10.1115/1.1565084>
- [5]. Amabili, M. (2008). *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press; Cambridge Core. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694>
- [6]. Nayfeh, A.H. (1981) *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley and Sons, New York, 39-43.
- [7]. Nayfeh, A. H., Mook, D. T., & Holmes, P. (1980). Nonlinear Oscillations. *Journal of Applied Mechanics*, 47(3), 692–692. <https://doi.org/10.1115/1.3153771>
- [8]. Chu, H.-N., & Herrmann, G. (2021). Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 23(4), 532–540. <https://doi.org/10.1115/1.4011396>
- [9]. Sathyamoorthy, M. (1998). *Nonlinear Analysis of Structures* (1997) (1st ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780203711255>

致谢

在本论文完成之际，我们心中充满兴奋与感激。

本项目的选题来源于我们两位同学在学校日常生活中的观察。我们发现大幅度快速摇晃硬卡纸做成的奖状时会听到一种奇特的呼啸声，伴随着频率上的变化，这种现象在金属板上更加明显。这种奇特而有趣的声音引起了我们的兴趣，然而我们最开始并没有深究这背后的物理机制。之后，在 2024 年 IYPT 题目上，我们发现这种现象被定为其中一道题目的研究问题。这激发了我们强烈的好奇心和探究欲望，从而决定着手研究这种“呼啸声”背后的物理原理。

在此，我们非常感谢学校为我们联系的董振宇导师。他在项目过程中无偿给予我们明晰的指导帮助和有力支持。感谢蔡蕾老师鼓励和推荐我们参加比赛，在校内鼎力相助、督促我们推进项目进度。本研究的实验设计、数据获取、分析计算、实验实施以及论文撰写等工作均由我们在指导老师的指导下独立完成。白旭鹏主要负责资料查询归纳、理论总结，倪峻哲主要负责实验设计、数据处理工作。我们共同完成了数据收集、画图、论文编撰、校对等。

这次项目之中，我们在数据采集处理、理论配合等部分都曾遇到一些困难，其中一部分克服了，还有一部分会在未来继续深入研究尝试解释。这次研究对于我们有很重大的意义，我们经历了一次完整的科研过程，将自己的精力倾注于日常生活中发现的有趣现象背后的物理原理。感谢所有支持我们的老师和同学。我们相信这是我们未来学习与科研之路的一个起点，我们会继续秉承热情与严谨，探索世界。

团队简介：

白旭鹏：北京一〇一中学国际部英才班，12 年级。国际部中考入学最高分。

他对计算机和物理有浓厚的兴趣。自学了线性代数，选修微积分、数学建模，以及《神经网络与机器学习》《现代语音信号处理》等教材。曾参与多个人工智能、物理、数学相关项目并在竞赛中获奖：

- 2024 腾讯犀牛鸟中学科学人才培养计划 – 铜奖 Array-Agnostic Multi-Channel Speech Separation
- 2025 丘成桐国际中学生数学夏令营 – Best Project Award, Spherical Model (Physics)
- 哈佛 China Think Big Top 5% - Research on Optimization Strategies for Elderly Fitness Activities Based on Sun Tzu's Art of War - Taking Dart Sports as an Example
- 中学生英才计划 – 计算机 – 一种水空两栖跨域可变形无人机

倪峻哲：北京一〇一中学国际部英才班，12 年级。在数学方向课内选修微积分之后，自学过多元微积分和线性代数。利用计算机技术搭建网站，设计算法协助学校制作能满足更多人需求的课表，方便同学老师查询课表，并且制作了多个实用工具。

附录

附录 A: 黄铜板厚度测量记录

该原始数据保留了估读位，正文中为四舍五入后的结果。

样品编号	h_1 (mm)	h_2 (mm)	h_3 (mm)	h_4 (mm)	h_5 (mm)	平均厚度 $\bar{h}$ (mm)
黄铜 A	0.469	0.471	0.470	0.466	0.465	0.468
黄铜 B	0.590	0.589	0.592	0.595	0.595	0.592
黄铜 C	0.692	0.685	0.689	0.690	0.688	0.689

附录 B: 列维法求解 SFSF 边界条件具体推导过程

假设一个分离变量形式的解，该解自动满足 x 方向的简支边界条件：

$$w(x, y, t) = Y_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin(\omega t)$$

将此解代入板的自由振动方程 $D\nabla^4 w + \rho h \partial^2 w / \partial t^2 = 0$ ，可以得到一个关于 $Y_m(y)$ 的四阶常微分方程（ODE）。

这个 ODE 的通解，可以写为：

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \sinh(\alpha_m y) + C_m \cosh(\beta_m y) + D_m \sinh(\beta_m y)$$

其中， A_m, B_m, C_m, D_m 是待定常数。 α_m 和 β_m 由以下关系式确定：

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}}$$

$$\beta_m = \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}}$$

对于最低阶的振动模态，挠度函数 $Y_m(y)$ 关于 $y = 0$ 是对称的（偶函数）。在这种情况下，反对称项的系数必须为零，即 $B_m = 0$ 和 $D_m = 0$ 。解简化为：

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + C_m \cos(\beta_m y)$$

这极大地简化了后续计算，将 4 个边界条件和 4 个未知数的问题，简化为 2 个边界条件和 2 个未知数。

下一步是利用在 $y = \pm b/2$ 处的自由边界条件来确定积分常数和求解频率 ω 。

自由边的边界条件为：

1. 弯矩为零 ($M_y = 0$)
2. 等效剪力为零 ($V_y = 0$)

将这些条件应用于我们的 SFSF 板的 $y = \pm b/2$ 边，我们得到：

1. 弯矩为零：

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \text{ at } y = \pm \frac{b}{2}$$

2. 等效剪力为零：

$$V_y = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] = 0 \text{ at } y = \pm \frac{b}{2}$$

将 $w(x, y, t)$ 的表达式代入这四个边界条件（在 $y = b/2$ 处两个，在 $y = -b/2$ 处两个），我们将得到一个关于四个待定系数 A_m, B_m, C_m, D_m 的四元齐次线性方程组。

为了使这个齐次线性方程组有非零解，其系数矩阵的行列式必须为零。这个行列式是一个包含 ω 的复杂超越方程，被称为频率方程或特征方程。

$$\det \begin{bmatrix} f_{11}(\omega) & f_{12}(\omega) & f_{13}(\omega) & f_{14}(\omega) \\ f_{21}(\omega) & f_{22}(\omega) & f_{23}(\omega) & f_{24}(\omega) \\ f_{31}(\omega) & f_{32}(\omega) & f_{33}(\omega) & f_{34}(\omega) \\ f_{41}(\omega) & f_{42}(\omega) & f_{43}(\omega) & f_{44}(\omega) \end{bmatrix} = 0$$

这个方程没有简单的解析解，通常需要通过数值方法求解，以得到不同模态 (m, n) 下的固有频率 ω_{mn} ，我们编写了 Python 程序进行数值求解，具体代码及运行结果请见附录 C。

附录 C：列维法的 Python 数值求解代码以及运行结果

```

import numpy as np
from scipy.optimize import root_scalar

# --- 1. Define physical and geometric parameters ---
E = 103e9      # Young's modulus, Pa
rho = 8500     # Density, kg/m^3
nu = 0.34     # Poisson's ratio
h = 0.00069    # Thickness, m

# Important: In Levy's method, a is the span between simply supported edges, b is the length along the free edges
a = 0.30      # Length along y (simply supported edges), m
b = 0.30      # Length along x (free edges), m

# Bending stiffness D
D = (E * h**3) / (12 * (1 - nu**2))

print("""--- Input Parameters ---""")
print(f"Young's modulus E: {E:.2e} Pa")
print(f"Density rho: {rho} kg/m^3")
print(f"Poisson's ratio nu: {nu}")
print(f"Thickness h: {h} m")
print(f"Span between simply supported edges a: {a} m")
print(f"Length along free edges b: {b} m")
print(f"Bending stiffness D: {D:.4f} N*m")
print(f"--- * 20")

# --- 2. Define characteristic equation (symmetric modes of an SFSF plate) ---
# This function evaluates the determinant of the 2x2 coefficient matrix for a given omega and mode m.
# We seek roots where det[M] = 0.
def characteristic_equation(omega, m):
    """
    Compute the characteristic equation value (det[M]) for given frequency omega and mode m.
    We look for roots where det[M] = 0.
    """
    if omega <= 0:
        return np.inf

    lambda_m = m * np.pi / a

    # Compute alpha and beta squared
    # Ensure the arguments under the square roots are valid to avoid complex values
    gamma_sq = rho * h * omega**2 / D
    if gamma_sq < lambda_m**4:
        # At low frequencies, beta_m may be imaginary, corresponding to a different solution form.
        # For simplicity, we only search where beta_m is real, which covers most physical vibrations.
        return np.inf

    alpha_m_sq = lambda_m**2 + np.sqrt(gamma_sq)
    beta_m_sq = -lambda_m**2 + np.sqrt(gamma_sq)

    alpha_m = np.sqrt(alpha_m_sq)
    beta_m = np.sqrt(beta_m_sq)

    # Shorthand
    y0 = b / 2
    cosh_a = np.cosh(alpha_m * y0)
    sinh_a = np.sinh(alpha_m * y0)
    cos_b = np.cos(beta_m * y0)
    sin_b = np.sin(beta_m * y0)

    # Build the 2x2 matrix [M]
    # M11, M12 from bending moment boundary condition My = 0
    # M21, M22 from equivalent shear boundary condition Vy = 0

    M11 = (alpha_m**2 - nu * lambda_m**2) * cosh_a
    M12 = (-beta_m**2 - nu * lambda_m**2) * cos_b

    M21 = (alpha_m**3 - (2 - nu) * lambda_m**2 * alpha_m) * sinh_a
    M22 = (beta_m**3 + (2 - nu) * lambda_m**2 * beta_m) * sin_b

    # Determinant
    determinant = M11 * M22 - M12 * M21

    return determinant

# --- 3. Numerical root finding ---
print("""\n--- Computing natural frequencies (Hz) ---""")
# Scan a frequency range to locate roots
freq_min = 1.0 # Hz
freq_max = 500.0 # Hz
freq_step = 0.5 # Hz

# Store found frequencies
natural_frequencies = {}

# Sweep the first few x-direction modes (m = 1, 2, 3)
for m in range(1, 4):
    print(f"\nSearching mode m = {m}...")
    found_frequencies_for_m = []

    # Scan the range for sign changes in the characteristic equation, indicating a root
    f_range = np.arange(freq_min, freq_max, freq_step)
    y_values = [characteristic_equation(2 * np.pi * f, m) for f in f_range]

    for i in range(len(y_values) - 1):
        # Check sign change
        if np.sign(y_values[i]) != np.sign(y_values[i+1]):
            f_low = f_range[i]
            f_high = f_range[i+1]

            try:
                # Use SciPy root finder to refine the root within the bracket
                sol = root_scalar(
                    lambda f: characteristic_equation(2 * np.pi * f, m),
                    bracket=[f_low, f_high],
                    method='brentq'
                )

                if sol.converged:
                    # Avoid adding duplicates that are extremely close
                    is_duplicate = False
                    for f_found in found_frequencies_for_m:
                        if abs(f_found - sol.root) < 1e-2:
                            is_duplicate = True
                            break
                    if not is_duplicate:
                        found_frequencies_for_m.append(sol.root)
            except ValueError:
                # Skip if bracket is invalid
                continue

    # Sort and store
    found_frequencies_for_m.sort()
    natural_frequencies[m] = found_frequencies_for_m

# --- 4. Print results ---
if freqs:
    print(f"\nNatural frequencies for mode m = {m}:")
    for n, freq in enumerate(freqs):
        # Here n indicates the (n+1)-th frequency found, corresponding to the y-direction mode index
        print(f"  f_{n}({m}, {n+1}) = {freq:.2f} Hz")
else:
    print(f"\nNo frequencies found for mode m = {m} within the search range.")

```

```

--- 输入参数 ---
杨氏模量 E: 1.03e+11 Pa
密度 rho: 8500 kg/m^3
泊松比 nu: 0.34
厚度 h: 0.00047 m
简支边跨度 a: 0.3 m
自由边长度 b: 0.42 m
抗弯刚度 D: 1.0076 N*m
-----

```

```

--- 计算固有频率 (Hz) ---

```

```
正在搜索模态 m = 1 ...
```

```
正在搜索模态 m = 2 ...
```

```
正在搜索模态 m = 3 ...
```

```
模态 m = 1 的固有频率:
```

```

f_(1,1) = 21.66 Hz
f_(1,2) = 65.73 Hz
f_(1,3) = 145.60 Hz
f_(1,4) = 261.50 Hz
f_(1,5) = 413.32 Hz

```

```
模态 m = 2 的固有频率:
```

```

f_(2,1) = 49.60 Hz
f_(2,2) = 95.66 Hz
f_(2,3) = 175.44 Hz
f_(2,4) = 290.83 Hz
f_(2,5) = 442.19 Hz

```

```
模态 m = 3 的固有频率:
```

```

f_(3,1) = 93.82 Hz
f_(3,2) = 142.01 Hz
f_(3,3) = 222.94 Hz
f_(3,4) = 338.49 Hz
f_(3,5) = 489.60 Hz

```

```

--- 输入参数 ---
杨氏模量 E: 1.03e+11 Pa
密度 rho: 8500 kg/m^3
泊松比 nu: 0.34
厚度 h: 0.00059 m
简支边跨度 a: 0.3 m
自由边长度 b: 0.3 m
抗弯刚度 D: 1.9933 N*m
-----

```

```

--- 计算固有频率 (Hz) ---

```

```
正在搜索模态 m = 1 ...
```

```
正在搜索模态 m = 2 ...
```

```
正在搜索模态 m = 3 ...
```

```
模态 m = 1 的固有频率:
```

```

f_(1,1) = 40.53 Hz
f_(1,2) = 148.78 Hz
f_(1,3) = 345.87 Hz

```

```
模态 m = 2 的固有频率:
```

```

f_(2,1) = 78.08 Hz
f_(2,2) = 188.16 Hz
f_(2,3) = 384.10 Hz

```

```
模态 m = 3 的固有频率:
```

```

f_(3,1) = 135.06 Hz
f_(3,2) = 249.23 Hz
f_(3,3) = 445.78 Hz

```

```

--- 输入参数 ---
杨氏模量 E: 1.03e+11 Pa
密度 rho: 8500 kg/m^3
泊松比 nu: 0.34
厚度 h: 0.00069 m
简支边跨度 a: 0.3 m
自由边长度 b: 0.3 m
抗弯刚度 D: 3.1883 N*m
-----

```

```

--- 计算固有频率 (Hz) ---

```

```
正在搜索模态 m = 1 ...
```

```
正在搜索模态 m = 2 ...
```

```
正在搜索模态 m = 3 ...
```

```
模态 m = 1 的固有频率:
```

```

f_(1,1) = 47.40 Hz
f_(1,2) = 173.99 Hz
f_(1,3) = 404.49 Hz

```

```
模态 m = 2 的固有频率:
```

```

f_(2,1) = 91.32 Hz
f_(2,2) = 220.05 Hz
f_(2,3) = 449.21 Hz

```

```
模态 m = 3 的固有频率:
```

```

f_(3,1) = 157.95 Hz
f_(3,2) = 291.47 Hz

```

1 附录 D: 快速振动方程的推导与固有频率分析

1.1 快速振动方程的推导

对于一块均匀、各向同性的薄板，其大挠度动力学行为由以下两个耦合的偏微分方程描述。

1.1.1 横向运动方程

该方程描述了横向位移 $W(x, y, t)$ 与面内应力之间的关系：

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \nabla^4 W = h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \quad (1)$$

其中：

- $W(x, y, t)$ 是板的横向位移（挠度）。
- ρ 是材料密度。
- h 是板的厚度。
- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 是板的抗弯刚度，其中 E 是杨氏模量， ν 是泊松比。
- $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ 是双调和算子。
- $\Phi(x, y, t)$ 是艾里（Airy）应力函数，其二阶导数代表面内应力。
- 方程右侧的括号项是一个非线性耦合项，常记作 $[\Phi, W]$ 。

1.1.2 协调方程

该方程保证了位移场的连续性，并将面内应力（由 Φ 表示）与横向位移 W 联系起来：

$$\nabla^4 \Phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

这个方程表明，横向的大挠度必然会诱导出面内应力。

1.1.3 双尺度分解 (Two-Scale Decomposition)

为了分析宏观与微观运动的耦合，我们做出核心假设，将总位移 W 分解为两个分量：

$$W(x, y, t) = W_{\text{macro}}(x, y, t) + w_{\text{fast}}(x, y, t) \quad (3)$$

其中：

- W_{macro} 代表低频、大振幅的宏观变形。
- w_{fast} 代表高频、小振幅的微观振动。

相应的，艾里应力函数也进行类似分解： $\Phi = \Phi_{\text{macro}} + \phi_{\text{fast}}$ 。我们假设振幅关系为 $|w_{\text{fast}}| \ll |W_{\text{macro}}|$ 。

将双尺度分解代入运动方程 (1)，并利用 $[A + B, C + D] = [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D]$ 的性质展开非线性项：

$$\begin{aligned} \rho h(\ddot{W}_{\text{macro}} + \ddot{w}_{\text{fast}}) + D\nabla^4(W_{\text{macro}} + w_{\text{fast}}) &= h[\Phi_{\text{macro}} + \phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}} + w_{\text{fast}}] \\ &= h([\Phi_{\text{macro}}, W_{\text{macro}}] + [\Phi_{\text{macro}}, w_{\text{fast}}] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}] + [\phi_{\text{fast}}, w_{\text{fast}}]) \end{aligned} \quad (4)$$

基于 $|w_{\text{fast}}|$ 是小量的假设，我们可以进行线性化处理：

- ϕ_{fast} 是由 w_{fast} 产生的应力函数。由协调方程 (2) 可知，其右侧是 W 导数的二次项。因此， ϕ_{fast} 至少与 $(w_{\text{fast}})^1$ 和 $(W_{\text{macro}} \cdot w_{\text{fast}})^1$ 相关。
- 项 $[\phi_{\text{fast}}, w_{\text{fast}}]$ 是关于 w_{fast} 的高阶小量，应予以忽略。

线性化后，方程变为：

$$\rho h(\ddot{W}_{\text{macro}} + \ddot{w}_{\text{fast}}) + D\nabla^4(W_{\text{macro}} + w_{\text{fast}}) \approx h([\Phi_{\text{macro}}, W_{\text{macro}}] + [\Phi_{\text{macro}}, w_{\text{fast}}] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}]) \quad (5)$$

现在，我们根据时间尺度分离方程。宏观慢变方程描述了系统的平均行为：

$$\rho h\ddot{W}_{\text{macro}} + D\nabla^4 W_{\text{macro}} = h[\Phi_{\text{macro}}, W_{\text{macro}}] \quad (6)$$

从总方程中减去此宏观方程，即可得到描述微观快变振动的方程：

$$\rho h\ddot{w}_{\text{fast}} + D\nabla^4 w_{\text{fast}} = h([\Phi_{\text{macro}}, w_{\text{fast}}] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}]) \quad (7)$$

这是一个关于 w_{fast} 的线性方程。我们可以将其写成更紧凑的算子形式：

$$\mathbf{M}(\ddot{w}_{\text{fast}}) + \mathbf{K}_{\text{L}}(w_{\text{fast}}) + \mathbf{K}_{\text{G}}(W_{\text{macro}})(w_{\text{fast}}) = 0 \quad (8)$$

其中：

- $\mathbf{M} = \rho h$ 是质量算子（一个常数）。
- $\mathbf{K}_{\text{L}}(w) = D\nabla^4 w$ 是线性刚度算子，源于板的抗弯刚度。
- $\mathbf{K}_{\text{G}}(W_{\text{macro}})(w) = -h([\Phi_{\text{macro}}, w] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}]) = h[\Phi_{\text{macro}}, w] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}]$ 是几何刚度算子。它依赖于宏观变形 W_{macro} ，并作用于微观振动 w_{fast} 。这一项体现了宏观变形产生的面内应力对微观振动刚度的影响。

1.2 固有频率分析

$$\rho h\ddot{w}_{\text{fast}} + D\nabla^4 w_{\text{fast}} = h([\Phi_{\text{macro}}, w_{\text{fast}}] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}]) \quad (9)$$

这是一个关于 w_{fast} 的线性方程。我们可以将其写成更紧凑的算子形式：

$$\mathbf{M}(\ddot{w}_{\text{fast}}) + \mathbf{K}_{\text{L}}(w_{\text{fast}}) + \mathbf{K}_{\text{G}}(W_{\text{macro}})(w_{\text{fast}}) = 0 \quad (10)$$

其中：

- $\mathbf{M} = \rho h$ 是质量算子（一个常数）。
- $\mathbf{K}_L(w) = D\nabla^4 w$ 是线性刚度算子，源于板的抗弯刚度。
- $\mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})(w) = -h([\Phi_{\text{macro}}, w] + [\phi_{\text{fast}}, W_{\text{macro}}])$ 是几何刚度算子。它依赖于宏观变形 W_{macro} ，并作用于微观振动 w_{fast} 。这一项体现了宏观变形产生的面内应力对微观振动刚度的影响。

1.2.1 线性振动方程与特征值问题

方程 (10) 是一个关于 w_{fast} 的线性振动方程。其系数（即几何刚度算子 $\mathbf{K}_G$ ）依赖于慢变的参数 W_{macro} 。根据 ** 准静态近似 **，在 w_{fast} 的一次振动周期内， W_{macro} 的变化可以忽略不计，即视其为一个“冻结”的静态变形。

在此近似下，我们寻找方程 (10) 的谐波解，即固有振动模态：

$$w_{\text{fast}}(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega_{\text{fast}}t} \quad (11)$$

其中 $u(x, y)$ 是振型， ω_{fast} 是该振型对应的固有频率。代入方程 (10)：

$$\mathbf{M}(-\omega_{\text{fast}}^2 u) + \mathbf{K}_L(u) + \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})(u) = 0 \quad (12)$$

整理后得到一个广义特征值问题：

$$[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})](u) = \omega_{\text{fast}}^2 \mathbf{M}(u) \quad (13)$$

1.2.2 频率平方的叠加关系

为了严格推导频率关系，我们使用 ** 瑞利商 (Rayleigh Quotient) **。对于任意一个振型 u ，其对应的频率平方 ω^2 由系统在该振型下的最大势能与最大动能之比确定。

$$\omega^2 = \frac{\langle u, \mathbf{K}(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (14)$$

其中 $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \cdot g dA$ 代表在板域 Ω 上的积分内积。

在我们的问题中，总刚度算子 $\mathbf{K}_{\text{total}} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})$ 。将其代入瑞利商：

$$\omega_{\text{fast}}^2 = \frac{\langle u, [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})](u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (15)$$

$$= \frac{\langle u, \mathbf{K}_L(u) \rangle + \langle u, \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (16)$$

$$= \frac{\langle u, \mathbf{K}_L(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} + \frac{\langle u, \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (17)$$

我们定义：

- ** 线性基频的平方 ω_0^{2**} ：当不存在宏观变形时 ($W_{\text{macro}} = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_G = 0$)，系统的固有频率。

$$\omega_0^2 = \frac{\langle u, \mathbf{K}_L(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (18)$$

- ** 由几何刚度引起的频率增量平方 $\Delta\omega^{2**}$:

$$\Delta\omega^2(W_{\text{macro}}) = \frac{\langle u, \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (19)$$

因此，我们严格地证明了频率平方的叠加关系：

$$\omega_{\text{fast}}^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega^2(W_{\text{macro}}) \quad (20)$$

这表明，快变振动的频率平方等于线性系统的基频平方，加上一个由宏观变形 W_{macro} 决定的修正项。

1.2.3 几何刚度与宏观变形幅值的关系

本节将详细推导几何刚度算子 $\mathbf{K}_G$ 与宏观变形幅值 A_{macro} 之间的定量关系。

我们假设宏观变形可以表示为幅值与模态的乘积：

$$W_{\text{macro}}(x, y, t) = A_{\text{macro}}(t) \cdot \Psi(x, y) \quad (21)$$

其中 $A_{\text{macro}}(t)$ 是慢变的时间幅值， $\Psi(x, y)$ 是归一化的空间模态函数。

我们将 $W = W_{\text{macro}}$ 代入协调方程 (2) 来求解其诱导的宏观应力函数 Φ_{macro} ：

$$\nabla^4 \Phi_{\text{macro}} = E \left[\left(\frac{\partial^2 W_{\text{macro}}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_{\text{macro}}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{\text{macro}}}{\partial y^2} \right] \quad (22)$$

计算 W_{macro} 的二阶导数并代入协调方程右侧：

$$\text{RHS} = E \left[\left(A_{\text{macro}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(A_{\text{macro}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \left(A_{\text{macro}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right] \quad (23)$$

$$= A_{\text{macro}}(t)^2 \cdot E \left[\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right] \quad (24)$$

因此，协调方程变为： $\nabla^4 \Phi_{\text{macro}} = A_{\text{macro}}(t)^2 \cdot G(x, y)$ ，其中 $G(x, y)$ 是一个纯粹的空间函数。由于 ∇^4 是一个关于空间变量的线性算子，其解 Φ_{macro} 必然与激励项的系数成正比：

$$\Phi_{\text{macro}}(x, y, t) \propto A_{\text{macro}}(t)^2 \quad (25)$$

宏观面内应力由 Φ_{macro} 的二阶导数给出，因此也正比于 $A_{\text{macro}}(t)^2$ 。** 结论 1：由宏观变形 W_{macro} 产生的面内应力场 σ_{macro} ，其大小正比于宏观变形幅值的平方 A_{macro}^2 。 **

1.2.4 从宏观应力到几何刚度

几何刚度 $\mathbf{K}_G$ 来源于宏观应力场 σ_{macro} 在微观振动 w_{fast} 发生时所做的功。这部分功贡献了系统的势能，其表达式为：

$$U_G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\sigma_{x, \text{macro}} \left(\frac{\partial w_{\text{fast}}}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{y, \text{macro}} \left(\frac{\partial w_{\text{fast}}}{\partial y} \right)^2 + 2\sigma_{xy, \text{macro}} \frac{\partial w_{\text{fast}}}{\partial x} \frac{\partial w_{\text{fast}}}{\partial y} \right] dA \quad (26)$$

由于 $\sigma_{\text{macro}} \propto A_{\text{macro}}^2$ ，所以 $U_G \propto A_{\text{macro}}^2$ 。几何刚度算子 $\mathbf{K}_G$ 通过对势能 U_G 关于位移 w_{fast} 进行变分得到，因此也必然正比于 A_{macro}^2 。

$$\mathbf{K}_G(W_{\text{macro}}) \propto A_{\text{macro}}(t)^2 \quad (27)$$

1.2.5 频率-振幅耦合关系 $f(A)$ 的推导

由此，我们已经建立了两个关键关系：

1. 频率平方的叠加关系: $\omega_{\text{fast}}^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega^2(W_{\text{macro}})$ (见方程 20)。
2. 几何刚度与宏观幅值的比例关系: $\mathbf{K}_G(W_{\text{macro}}) \propto A_{\text{macro}}^2$ (见方程 27)。

本节将综合这两个关系，推导出最终的频率-振幅函数 $f(A)$ 。

首先，回顾频率增量平方的定义：

$$\Delta\omega^2(W_{\text{macro}}) = \frac{\langle u, \mathbf{K}_G(W_{\text{macro}})(u) \rangle}{\langle u, \mathbf{M}(u) \rangle} \quad (28)$$

由于几何刚度算子 $\mathbf{K}_G$ 线性地依赖于宏观应力，而宏观应力又正比于 A_{macro}^2 ，那么整个由 $\mathbf{K}_G$ 决定的频率增量项也必然正比于 A_{macro}^2 。我们可以引入一个比例系数 C' ，将此关系写为等式：

$$\Delta\omega^2(W_{\text{macro}}) = C' \cdot A_{\text{macro}}^2 \quad (29)$$

这个比例系数 C' 是一个常数，但它的值取决于系统的固有属性，包括：

- **材料属性**: 杨氏模量 E 、泊松比 ν 、密度 ρ 。
- **几何属性**: 板厚 h 、板的形状和边界条件。
- **模态耦合**: 宏观振动模态 $\Psi(x, y)$ 和微观振动模态 $u(x, y)$ 的空间分布及其相互作用。 C' 的值与这两种模态形状的导数的积分（即内积）有关。

将此关系代入频率平方的叠加公式 (20) 中，我们得到：

$$\omega_{\text{fast}}^2 = \omega_0^2 + C' A_{\text{macro}}^2 \quad (30)$$

这就是描述快变振动频率与慢变振动幅值之间关系的核心方程。它表明，快变频率的平方与慢变幅值的平方呈线性关系。

为了得到频率 ω_{fast} 与幅值 A_{macro} 的直接关系，我们对上式两边取平方根：

$$\omega_{\text{fast}}(A_{\text{macro}}) = \sqrt{\omega_0^2 + C' A_{\text{macro}}^2} \quad (31)$$

为了更清晰地展示其非线性特征，我们可以将线性基频 ω_0 提出：

$$\omega_{\text{fast}}(A_{\text{macro}}) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{C'}{\omega_0^2} A_{\text{macro}}^2} \quad (32)$$

定义一个新的无量纲耦合系数 $\alpha = C'/\omega_0^2$ ，上式可以写成更简洁的形式：

$$\omega_{\text{fast}}(A_{\text{macro}}) = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha A_{\text{macro}}^2} \quad (33)$$

这个方程 $\omega_{\text{fast}}(A_{\text{macro}})$ 就是我们所寻求的频率-振幅耦合函数 $f(A)$ 。它明确地量化了宏观振动幅值 A_{macro} 对微观振动频率 ω_{fast} 的调制作用。