

中学：上海市民办平和学校

省份：上海市

国家/地区: 中国

指导老师姓名：韩超群

指导老师单位：上海市民办平和学校

论文题目：磁摆悬挂系统的非线性动力学建模与分析

目录

摘要:	3
引言:	3
正文:	5
1. 理论模型分析.....	5
1.1 磁偶极子模型	5
1.2 电流柱模型	6
1.3 理论模型对比	7
1.4 拉格朗日量的建立.....	8
2. 实验设置.....	10
2.1 实验设置	10
2.2 实验步骤	11
2.3 参数测量	12
2.4 数据分析	13
3. 单磁体固定磁铁结果研究.....	14
单磁体固定磁铁实验现象:	14
3.1 轨迹预测与实验验证	15
3.2 准周期	16
4. 双磁体固定磁铁结果分析.....	19
4.1 无法验证轨迹的混沌系统	19
4.2 分形谷底与实验验证	24
5. 总结与展望.....	30
致谢与综述.....	31
6. 参考文献.....	32
7. 附录.....	32

摘要:

在本研究中，我们对一种磁性辅助悬挂系统的非线性动力学行为进行了深入的实验与理论研究。此系统由一个悬挂于细绳下的磁铁（动磁铁）及一个或两个固定于非磁性、非导电基座上的磁铁构成，在系统中，固定磁铁会对悬挂磁铁施加吸引力。

在构建理论模型阶段，研究首先建立了基于**磁偶极子**和**电流柱模型**的理论框架，通过其性质分析了磁扭矩与磁力。进一步，研究使用拉格朗日方程尝试对悬挂磁铁的轨迹进行预测。在实验方面，我们搭建了光学支架，利用相机追踪磁铁运动，并对磁矩、质量、位置等参数进行了精确测量与标定。在实验中我研究了单个固定磁铁和双固定磁铁的情况，并改变了相应的变量如固定磁铁的位置和摆长等进行探究。

结果与分析中，该研究发现固定的磁铁数量影响了系统的行为。当只有一个固定磁铁时，悬挂磁铁的运动可以被精确预测；而我们为此提出了准周期的概念探究其运动规律的演变。相比之下，当存在两个固定磁铁时，系统变成混沌系统，轨迹无法预测；由此，我们提出分型谷底来预测悬挂磁铁的最终落点。

本研究不仅完整地表征了一种经典的混沌演示实验，其结合高级理论建模与精密实验验证分析的方法，也为理解和预测复杂非线性磁性相互作用的复杂系统提供了分析思路。

关键词:

磁偶极子；电流柱；磁矩；磁力；拉格朗日力学；准周期；混沌模型；分形谷底；势阱；动态轨迹预测

引言:

磁性相互作用是自然界和现代技术中最基本且普遍存在的物理现象之一，从最早指南针的定向到现代物理粒子加速器的运行，其应用遍布各个领域。然而，即使在最简单的配置下，由多个永久磁铁构成的系统也常常表现出复杂的非线性动力学行为，在特定情况下其运动状态对初始条件和系统参数极为敏感。这类系统往往连接了电磁学，理论力学与非线性动力学，为混沌系统及稳定性的研究提供了很好的研究平台。

其中一种值得研究的系统是磁摆：将一个磁铁悬挂起来，使其在一个或两个固定磁铁的上方摆动。磁铁的相互作用力、重力以及阻尼等因素的耦合，使得其可以产生复杂的动力学行为。已有研究表明(Christian & Middleton-

Spencer, 2018)，在多个固定磁铁的情况下，磁摆系统会出现混沌行为。

目前，对于这类结构简单但物理内涵丰富的磁摆系统的研究较少，且已有的少数研究也并没有对磁铁进行精确的建模，而是使用了不考虑磁铁转动的较为粗糙的磁偶极子模型进行近似。不仅如此，已有研究也缺乏对磁摆系统中特定情况的可预测性的探究。同时，在该领域中，也缺少较为精密的实验设备对其进行验证。因此，本研究旨在为磁摆系统确立一个精确的物理模型，从单个固定磁铁出发再逐步加入第二个固定磁铁，探究磁摆系统从可预测到混沌的演变；同时搭建一套较为稳定的实验装置，将模型的预测与真实的实验数据进行比较。

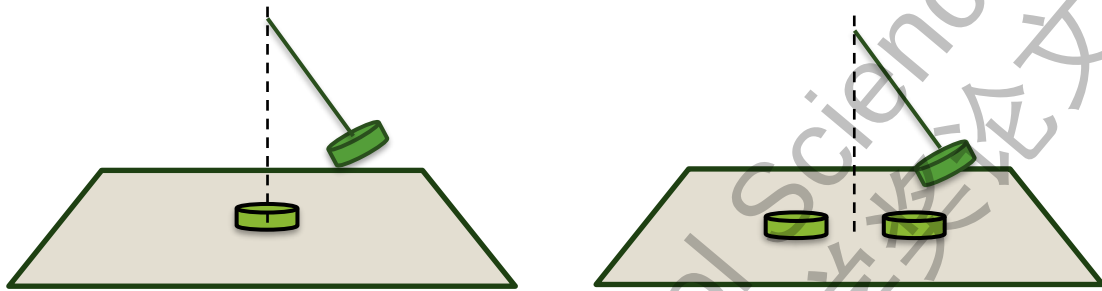


图 1 单磁铁系统与双磁铁系统示意图

本文会首先提出并且比较两种对于磁铁的模型建立，并进一步推导拉格朗日方程来对磁摆的运动轨迹进行基本的预测。接着，本文会详细介绍我们用于探究的实验装置。进一步，基于理论和实验的比较，本文将分别讨论都在单个固定磁铁和双个固定磁铁的情况下，磁摆的运动状态随不同参数的变化。

正文：

1.理论模型分析

1.1 磁偶极子模型

在研究永久磁铁相互作用时，磁偶极子模型是一种常用的近似。在该模型中，每个磁铁被理想化为一个具有磁矩 $\vec{m}$ 的偶极子，而磁矩的大小与方向取决于磁铁的材料性质、体积和磁化方向。

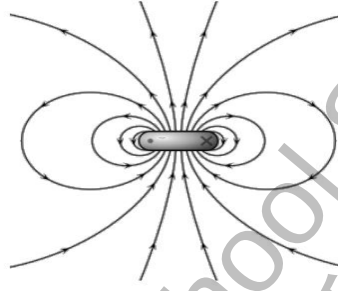


图 2 单磁偶极子磁场分析

对于一个已知磁矩 $\vec{m}$ 的磁偶极子来说，其周围产生的磁感应强度的矢量公式可表达为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

其中 $\vec{r}$ 为从磁偶极子到观测点的位移矢量， $\hat{r}$ 为 $\vec{r}$ 方向的单位矢量

从而我们可以计算出两个被磁偶极子模型建模的磁铁之间的相互作用力和力矩为：

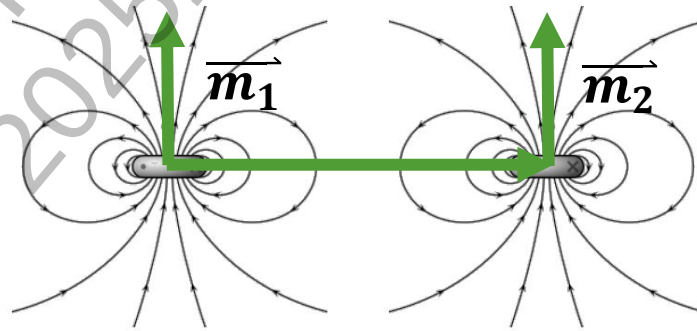


图 3 双磁偶极子磁场分析

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^4} [(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})\vec{m}_1 + (\vec{m}_1 \cdot \hat{r})\vec{m}_2 + (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 5(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r}))\hat{r}]$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1 = \vec{m}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}_1]$$

1.2 电流柱模型

对于磁铁另一种可能的建模是电流圆柱模型。它基于等效电流思想，把均匀磁化的圆柱体的侧壁所产生的磁场等效为其侧壁的一圈电流所产生的。

对于一个电流圆柱所产生的磁铁，根据比奥萨伐尔定律可以求解磁体周围的磁场强度。

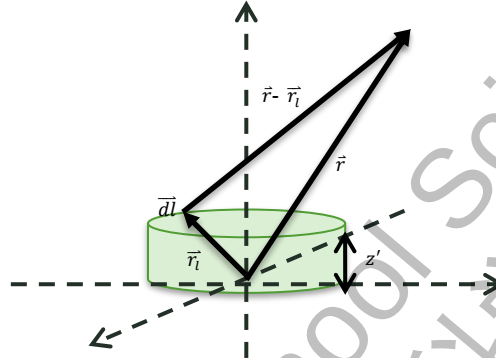


图 4 电流圆柱模型示意图

$$\begin{aligned} B(\vec{r}) &= \int_0^L B_r(\vec{r}; z') dz' \\ &= \int_0^L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{dl(\phi) \times [\vec{r} - (R \cos(\phi), R \sin(\phi), z')]}{|\vec{r} - (R \cos(\phi), R \sin(\phi), z')|^3} dz' \end{aligned}$$

其中 $\vec{r}$ 代表场点位置矢量； $dl(\phi) = R d\phi(-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$ 的含义为在 ϕ 角度处，沿着电流环的切线方向的一个无限小的线段矢量； z' 是源点轴向坐标，意义为当前正在计算的单个电流环在螺线管轴上的位置； $(R \cos(\phi), R \sin(\phi), z')$ 确定了当前积分微元 $dl(\phi)$ 所在的确切位移坐标； $\vec{r} - (R \cos(\phi), R \sin(\phi), z')$ 是相对位移矢量，它是电流微元 $dl(\phi)$ 指向场点 r 的矢量。

于是我们可以基于比奥萨伐尔定律写出计算磁场对载流导体的作用力和扭矩的公式，作用力即通过磁场对通有电流的导线微元部分作用的微分磁力由电流元与磁场矢量的叉积给出。

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) &= I \int \oint d\vec{l} \times \vec{B} dz' \end{aligned}$$

扭矩由相对位置矢量（从枢轴点到导线段的矢量）与作用在该线段上的微分力的叉积计算得出。

$$\begin{aligned}\vec{d\tau} &= \vec{dr_{rel}} \times \vec{dF} = I \vec{dr_{rel}} \times (\vec{dl} \times \vec{B}) \\ \Rightarrow \vec{\tau}(\vec{r}) &= I \int \oint (\vec{r}_p - \vec{r}) \times (\vec{dl} \times \vec{B}) \quad dz'\end{aligned}$$

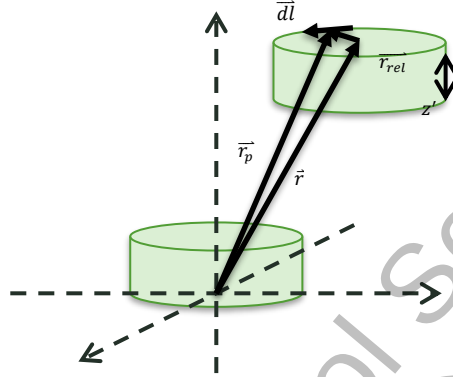


图 6 电流柱扭矩与作用力分析

1.3 理论模型对比

此部分讲对两个模型的磁感应强度进行比较。

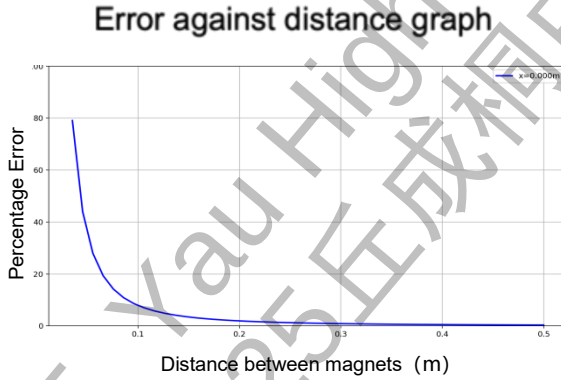


图 7 误差-距离关系图像

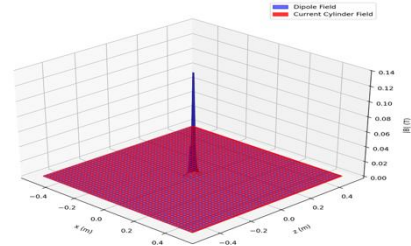


图 8 磁感应强度对比（偶极磁场和电流柱场）

图中所基于的变量：

$$\vec{m} = 1A \cdot m^2$$

$$I = 127A; R = 0.05m$$

从图 7 和图 8 中可以看到，虽然磁偶极子模型的主要优势在于公式简洁、计算效率高，适合快速模拟，它仅在远场近似下成立。在近场区域，因为实际磁铁的有限尺寸不可忽略，会导致模型预测与真实磁场之间出现显著偏差。这是因为，磁偶极子的磁场强度与 r^4 成反比，因此当两磁铁间距减小，其磁场强

度会趋近于无穷，造成巨大的误差。相比之下，电流圆柱模型通过双重积分更精确地考虑了磁体几何结构，能够在近场区提供更可靠的结果。然而，因为其涉及到双重积分，计算代价明显更高。

1.4 拉格朗日量的建立

接下来我们对于磁铁系统进行物理建模。首先，为了考虑磁铁的平动拉格朗日量，我们建立了直角坐标系，将磁铁的悬挂点设置成坐标原点，并把磁铁的坐标设为 (x, y, z) ，如图 9 所示。

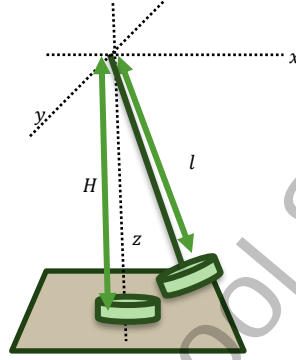


图 9 直角坐标系示意图

结合图 11 中的实验示例看出摆长是始终一致的，接下来可以设置系统中单摆的约束：

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

设悬挂磁铁的质量为 m ，则系统中动能表达式为：

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2}\right)$$

势能表达式（重力势能 mgz 与磁势能 $V_E(x, y)$ ）为：

$$V = mgz + V_E(x, y) = -mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} + V_E(x, y) \quad [z \text{ 向下为负}]$$

由动能与势能可计算拉格朗日量：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{l^2 - x^2 - y^2}\right) + mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} - V_E(x, y)$$

因此，拉格朗日方程为：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= c_i \dot{x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= c_i \dot{y} \end{aligned}$$

其中拉格朗日方程中的 c_i 是未知的阻尼系数，将会在后续实验中被测量。

进一步，为了考虑悬挂磁铁的转动，我们进一步建立了转动的坐标系。具体来说，我们使用欧拉角表示磁矩方位，如图所示。

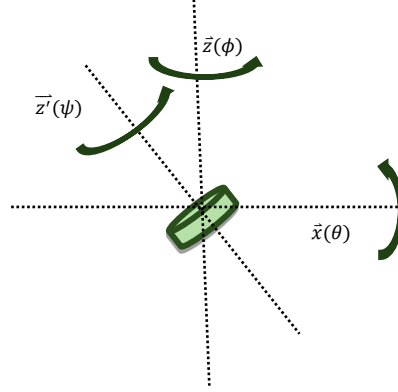


图 10 转动坐标系示意图

这是其中字母的物理含义：

- θ ：章动角（与竖直轴的夹角）
- ϕ ：进动角（绕竖直轴的旋转）
- ψ ：自转角（绕自身轴的旋转）

由此，我们可以得出动能表达式为：

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2$$

势能表达式为：

$$V = -|\vec{m}|B\cos(\theta)$$

拉格朗日量可得：

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2 + |\vec{m}|B\cos(\theta)$$

欧拉拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q = 0$$

可以看到，我们把广义力 Q 设为0，因为忽略鱼线微小转动所带来的能量变化。而为了更好地计算旋转以后的悬挂磁铁的磁矩或者电流圆柱的方向矢量，我们引入罗德里格旋转公式，对其进行系统的数学坐标变换。

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v} \cos(\theta) + (\hat{k} \times \vec{v}) \sin(\theta) + \hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{v})(1 - \cos(\theta))$$

随后我们可以根据这个公式重新计算新的磁矩矢量，并且电流圆柱模型所运用到的双重积分可以为系统提供更加精准模型。

2. 实验设置

2.1 实验设置

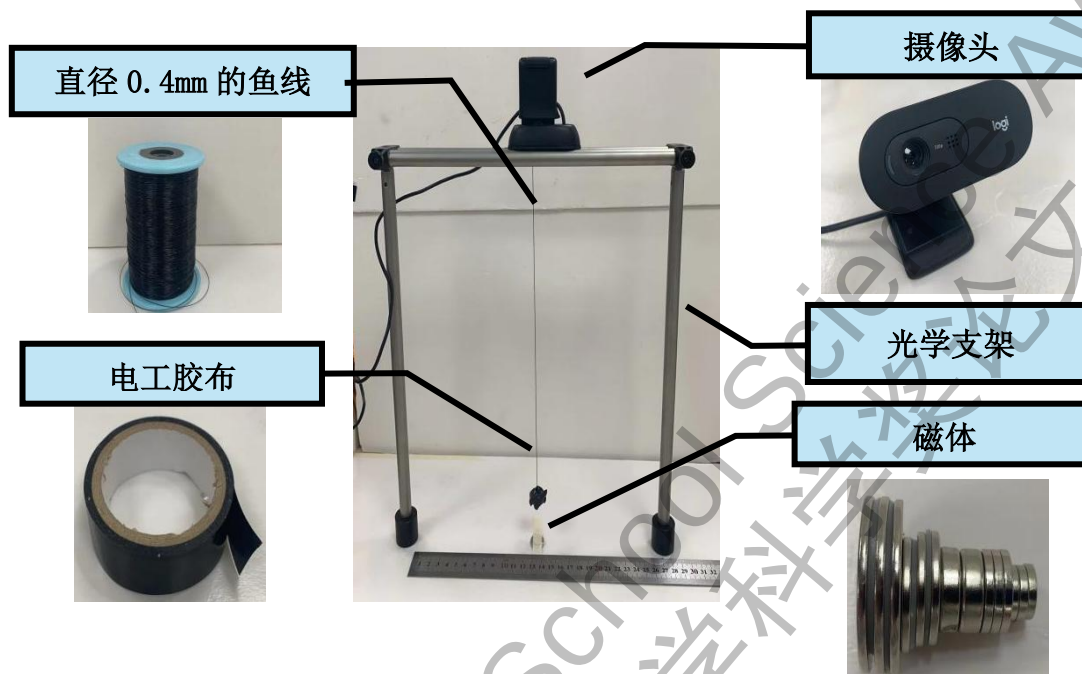


图 11 实验装置示意图

如图，我们根据初始设计的模型搭建了实验装置。

实验所需器材有：

- ◆ 一根直径为 0.4mm 的鱼线
- ◆ 黑色电工胶布
- ◆ 光学支架
- ◆ 固定在光学支架上的摄像头
- ◆ 体积不同的磁体

在这些实验器材中，我们使用杨氏模量较大的鱼线以确保其在实验过程中不会产生形变而导致记录的磁摆位置坐标产生偏差；电工胶布在实验中将完全包裹着磁摆，以方便作为黑色标记为后续视频分析；稳定的光学支架用于固定整个系统；摄像头是实验中采集数据信息的装置，其收集的数据会在校正视察的步骤中被修正；不同体积的磁体可以有效更改固定磁铁周围的磁场强度。

在实验中计算磁矩的公式为：

$$\vec{m} = \frac{B_r}{\mu_0} V \vec{n} = 4\pi R^2 h \frac{B_r}{\mu_0} \vec{n}$$

其中 B_r 是剩余磁感应强度，表示了材料本身的属性。而 $\vec{n}$ 指的是圆柱轴向的单位向量， V 代表的是磁体体积。

若使用的是电流圆柱模型，则等效电流可以用下列公式计算：

$$I = \frac{m}{\pi R^2}$$

计算出结果后，我们将其用特斯拉计所测得结果相互核对以增强实验严谨性。

2.2 实验步骤

我们以如下步骤使用实验器材进行实验：



图 12 实验中激光矫正位置

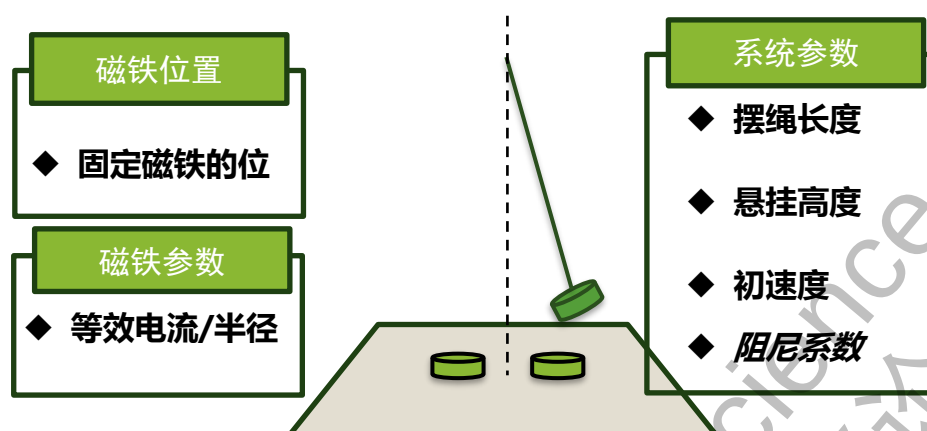
1. 在每一次放置不同参数的固定磁铁时用原先固定好的激光发生装置将磁体与激光对齐。



图 13 塑料夹静止释放磁摆

2. 将磁体用塑料夹子夹起到某一位置后，释放塑料夹，尽量确保磁铁没有初始速度。
3. 在过程中使用摄像头记录实验过程视频，记录坐标。
4. 等待磁摆静止，改变系统的参数。

2.3 参数测量



- 测量系统中的阻尼系数



图 14 测量阻尼系数示意

我们将磁摆固定在光学支架上，使其自由摆动以测得其阻尼系数，阻尼系数单位为 kg s^{-1} 。此时，我们使用线性阻尼模型 $F \propto v$

- 测量磁摆质量



图 15 测量磁摆质量示意

在实验中，我们通过电子天平测量磁摆的质量

2.4 数据分析

2.4.1 追踪打点方式

拍摄完实验视频后，我们再使用 Tracker 软件追踪磁摆位置。其通过逐帧读取视频中的像素位置来提取物体的位移数据。我们将所收集到的位置点覆盖在整个磁摆的图片映像上，得到磁摆在 x 轴与 y 轴的位置变化。

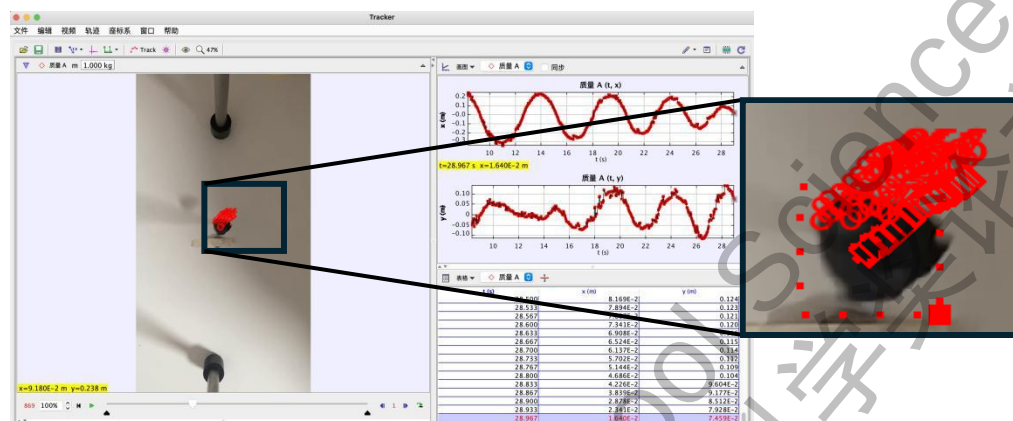


图 16 打点分析示意图

2.4.2 视差矫正

数据收集的原理与实验系统中的运动模式存在区别：由于摄像头是根据单应性来获取系统中磁摆的坐标位置的，但实际的系统是球系统。为了这一视察问题，我们将摄像头所收集到的 (x, y) 坐标代入到公式 $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ ，（ l 为摆绳长度）随即即可求出对应球系统中的坐标点位置。

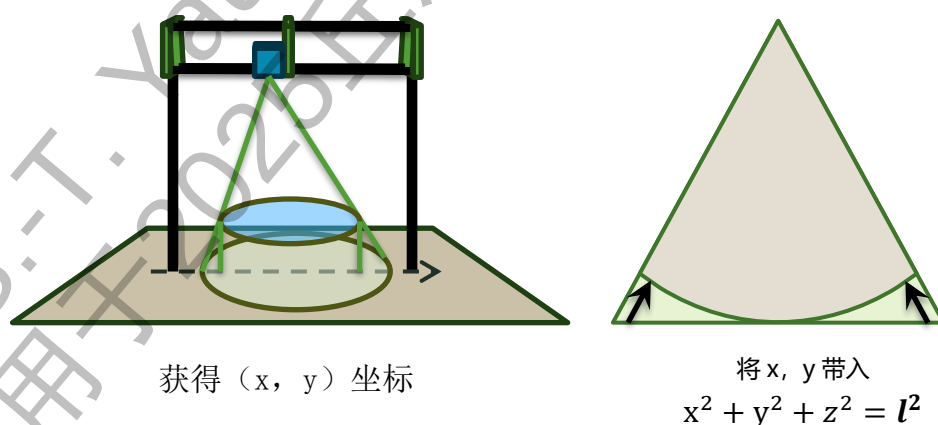


图 17 视察矫正原理

3. 单磁体固定磁铁结果研究

单磁体固定磁铁实验现象：

在单固定磁铁的实验中，我们根据三维空间中 (x, y) 的坐标得出了磁摆的运动轨迹，可以从图中看出有较为明显的椭圆进动趋势。

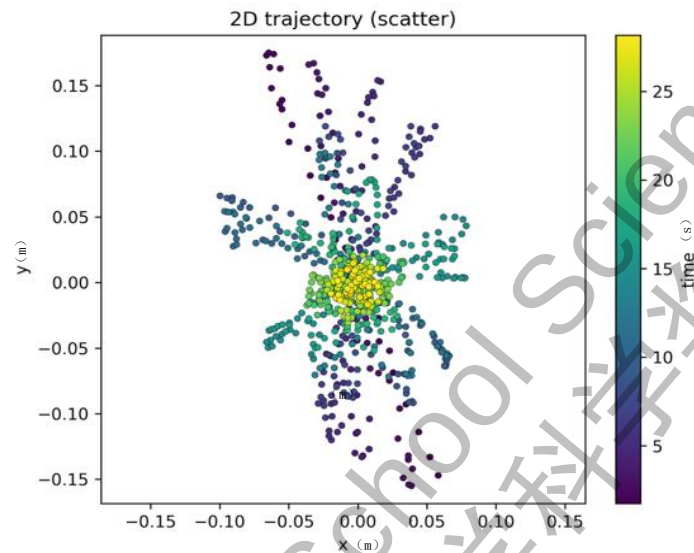


图 18 单磁体运动散点图

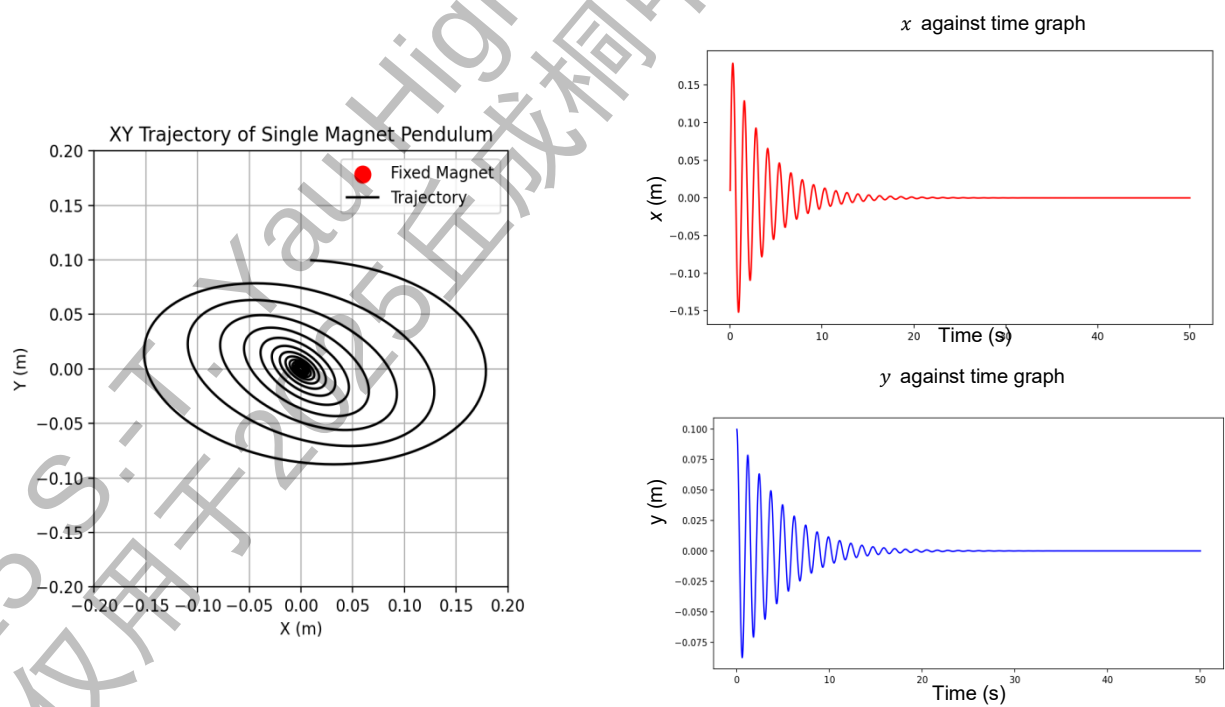


图 19 公式对轨迹的预测示意图

3.1 轨迹预测与实验验证

因为单磁铁系统相对简单，我们使用 1.2 的电流圆柱模型对磁铁进行建模。进一步，我们根据 1.4 中的公式可以预测出磁摆在系统中的运动轨迹。

由 X-T 和 Y-T 图像可见，理论模型对于实验中的磁铁运动轨迹，即两个维度的周期和振幅，做出了较好的预测。同时为了验证这一结论，进行了实验数据与预测轨迹的统计，发现最终磁摆的实验周期平均时间和理论平均时间比较吻合。

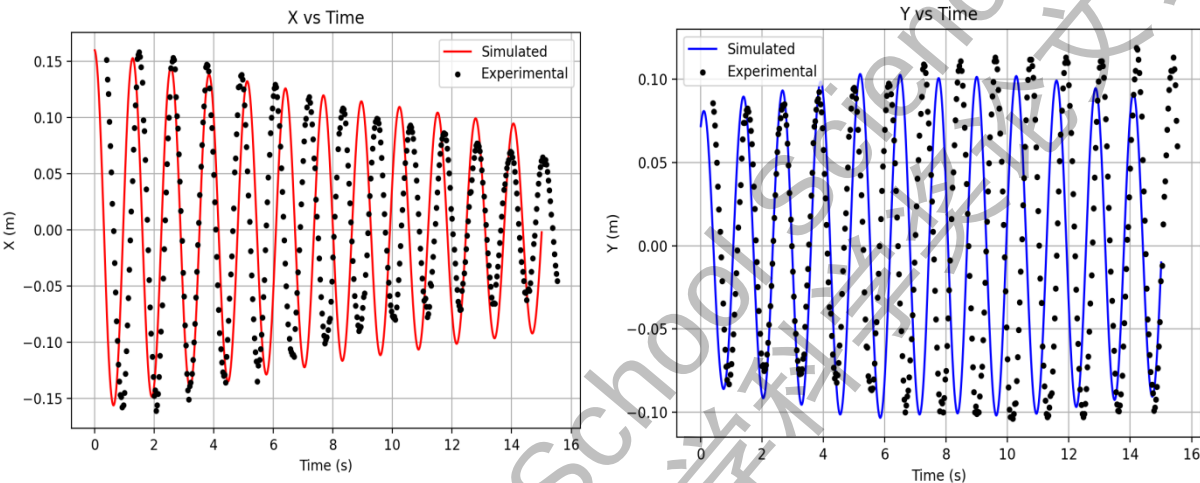


图 20 实验与模拟数据的 X-T 与 Y-T 图像

表 1 单固定磁铁磁体实验变量

磁铁参数	等效电流 (A)	127
	半径 (mm)	5
位置坐标(m)	(0.15, 0.08, 0.0)	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.45
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01
单固定磁铁磁摆周期		
单固定磁铁磁摆周变量	理论	实验
总运动时间 (s)	14.7	15.0±0.5
磁摆周期数	11.85	12.74
平均周期 (s)	1.24	1.18±0.04

3.2 准周期

3.2.1 准周期阶段概述

使用拉格朗日量分析单磁体运动状态后，为了描述和分类该系统的长期振荡行为，我们对磁摆系统对于准周期所展现出来的特征再次进行分析。

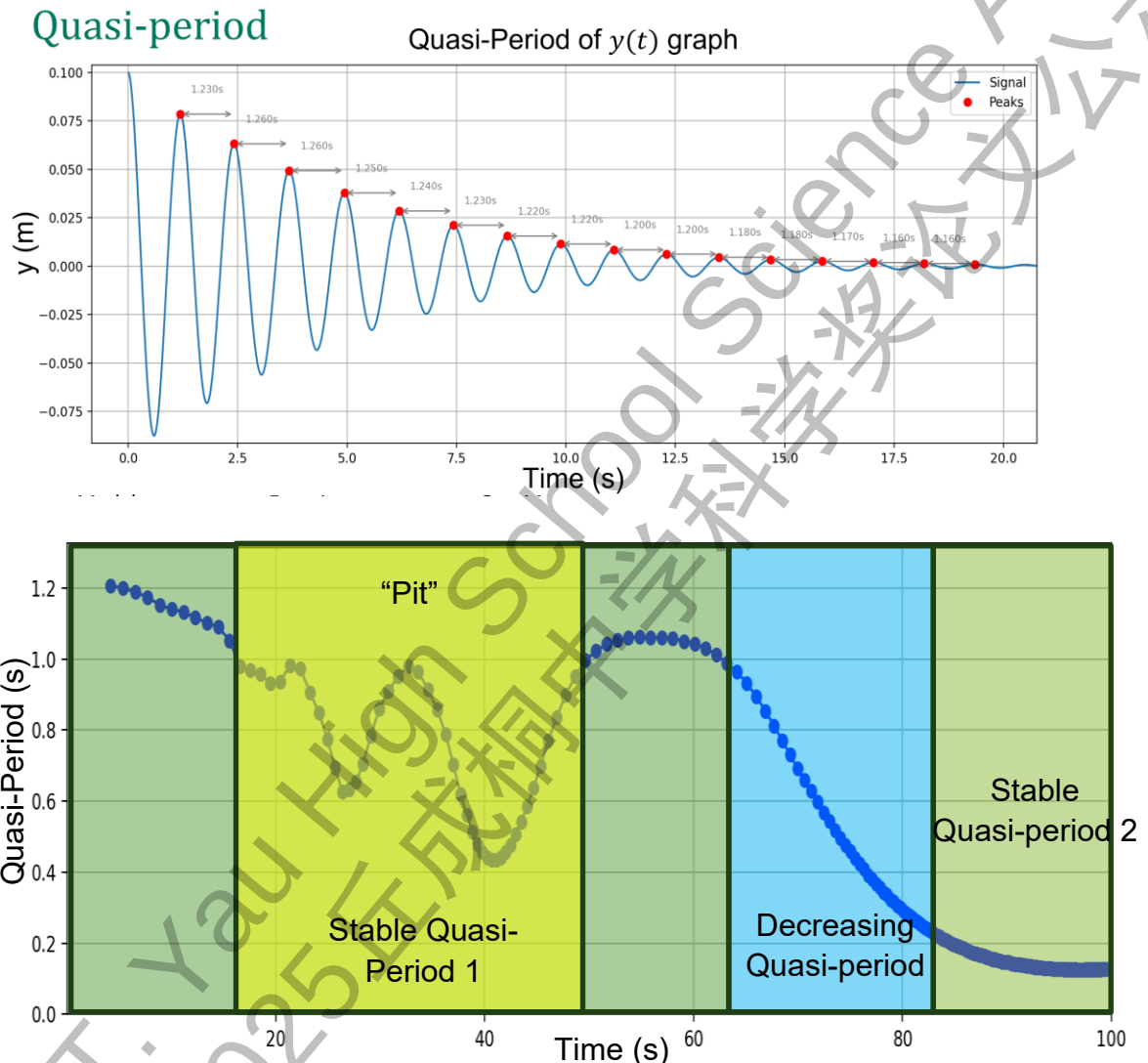


图 21 准周期定义（上）；准周期随时间变化图像（下）

如图 21 上方所示，准周期即为局部最大值之间的时间间隔。而如图 21 下方所示，我们分析了不同区间内的准周期分为三个阶段：第一段稳定准周期，准周期减少阶段，第二段稳定准周期。

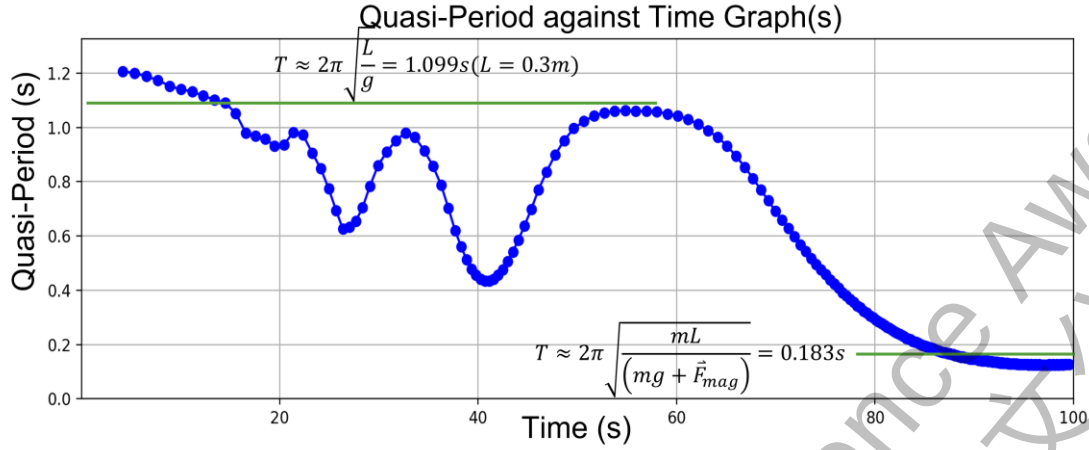


图 22 平均准周期的估计

如图 22，我们先初步根据所得数据量化估计了两个稳定阶段的平均准周期。

若假设了磁铁是一个不受磁力影响的简谐重力摆，则第一段稳定准周期为：

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 1.099s (L = 0.3m)$$

第二段稳定准周期为：

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{mL}{(mg + \vec{F}_{mag})}} = 0.183s$$

此公式依旧基于简谐振动，只不过把磁力纳入了计算

3.2.2 准周期阶段探究

接下来，我们会逐步分析为什么准周期会如图 21 所示的趋势演变。

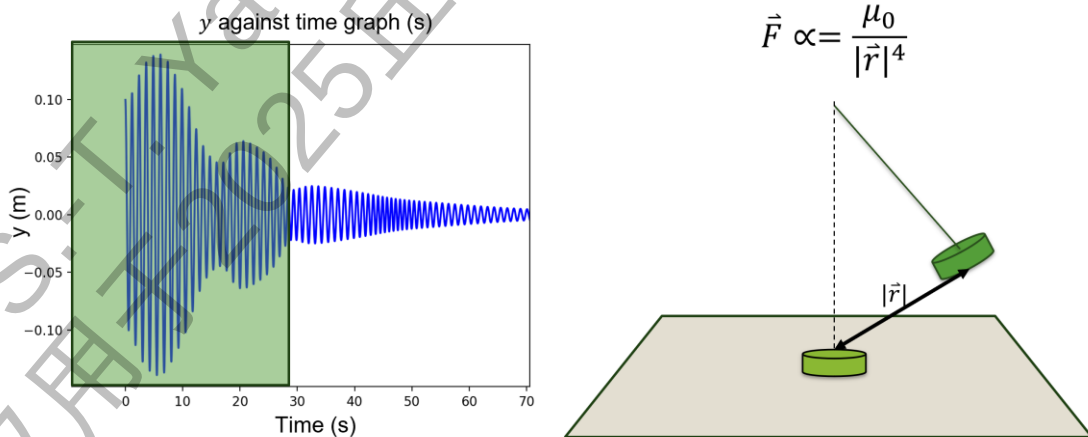


图 23 准周期阶段 1 中磁力可忽略示意图

如图 23 所示在第二段稳定阶段的准周期中，因为磁摆与固定磁铁距离较大，基于关系 $\vec{F} \propto \frac{\mu_0}{|\vec{r}|^4}$ ，固定磁铁所产生的磁力可被忽略，因此周期较大。

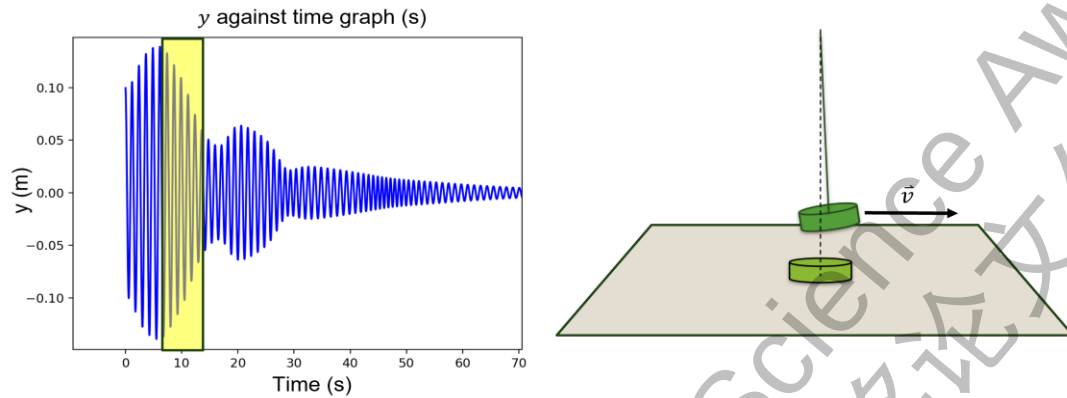


图 24 准周期阶段 1 中，磁摆被吸引示意图

如图 24 所示，在阶段 1 中存在一个“Pit”，即振幅暂时减小的区域，此时固定磁铁与磁摆距离近，吸引力增加，因此周期短暂减小。

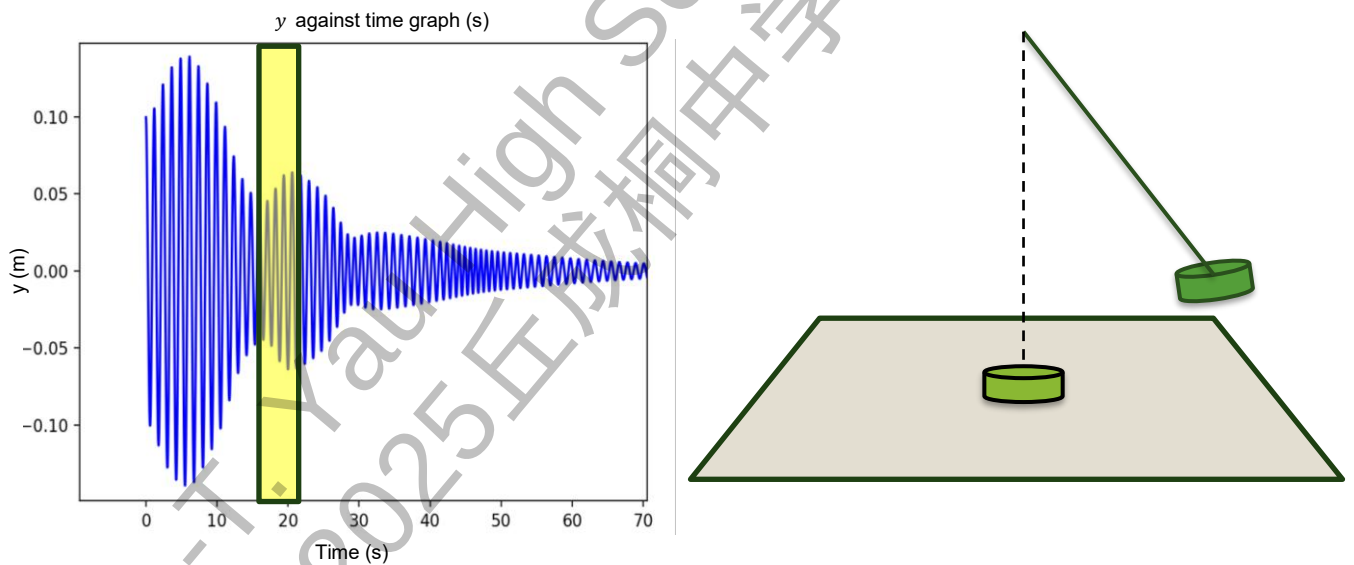


图 25 稳定准周期阶段 2 中，磁摆摆脱固定磁铁示意图

不过，此时因为磁铁的动能足够大，足以使磁摆摆脱固定磁铁的吸引，可以再次增加磁铁间距，从而减少周期。

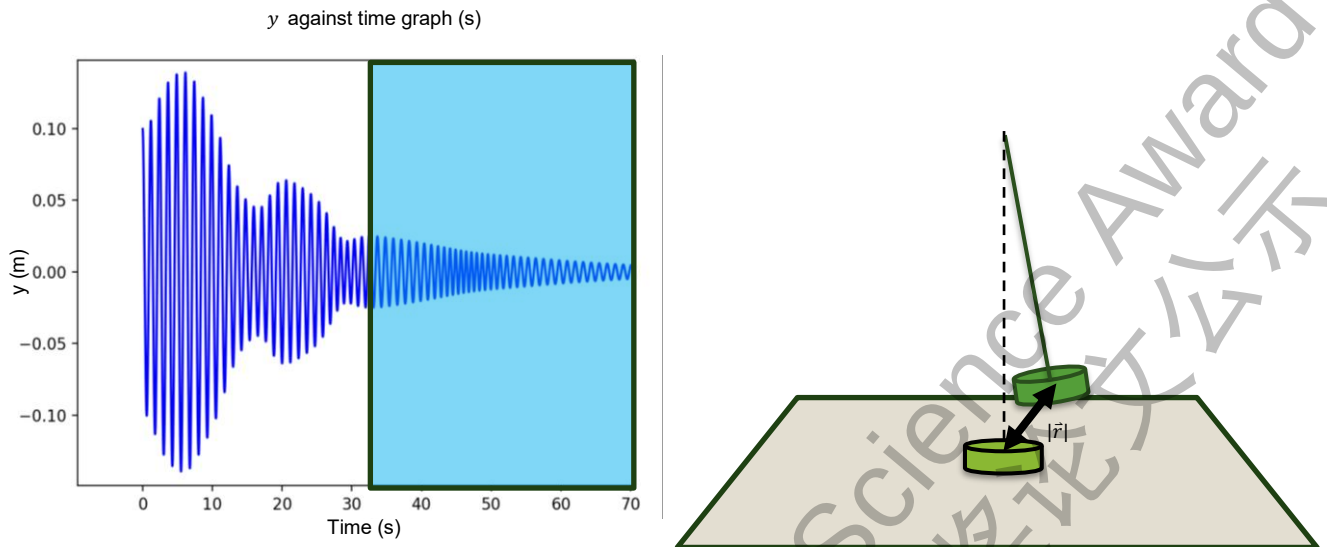


图 26 准周期减少阶段的原因示意图

在准周期减少的阶段中，由于阻尼存在导致磁摆与固定磁铁距离减小，磁力增加，由此周期减小。

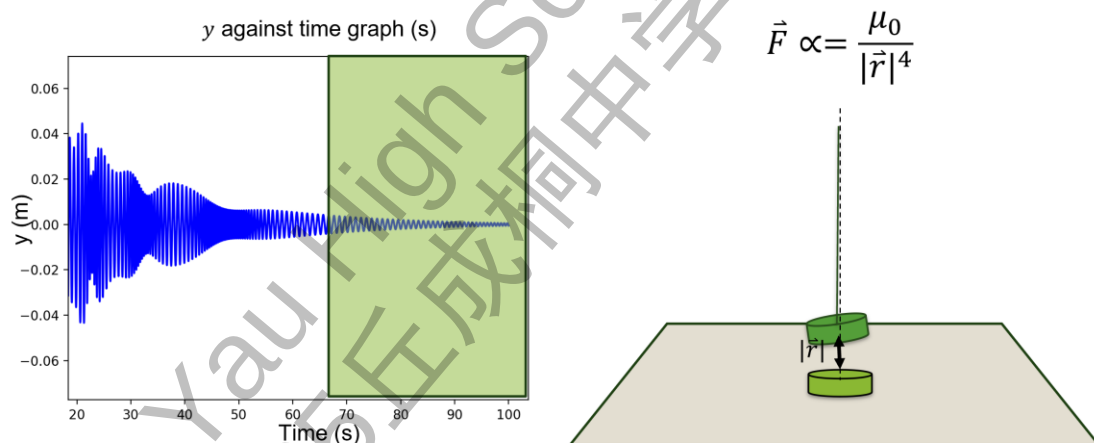


图 27 最终的稳定周期示意图

在第二阶段的稳定准周期中，当磁摆与固定磁铁的距离达到最小值时，两者之间的磁力不会再增大，因此周期也达到了最小值。

4. 双磁体固定磁铁结果分析

4.1 无法验证轨迹的混沌系统

在双固定磁铁实验中，我们再次根据三维空间中 (x, y) 的坐标得出了磁摆的运动轨迹，可以从图中看出其呈现混沌运动轨迹。

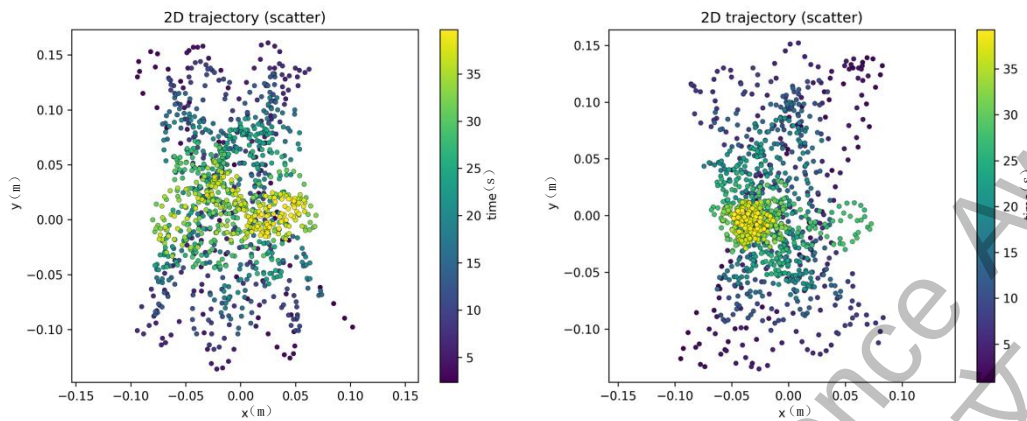


图 28 双磁体运动轨迹散点图

与单磁体研究方向相同，我们将实验中数据点得出的 X-T 图像与 Y-T 图像与轨迹（红线）预测点放在一起，发现定量计算的轨迹预测对于实验数据点是欠拟合的。

在情况 1 中轨迹预测与可以与最终位置拟合，但轨迹预测并不合适。在情况 2 中的轨迹预测与实验数据点从始至终并不相符。

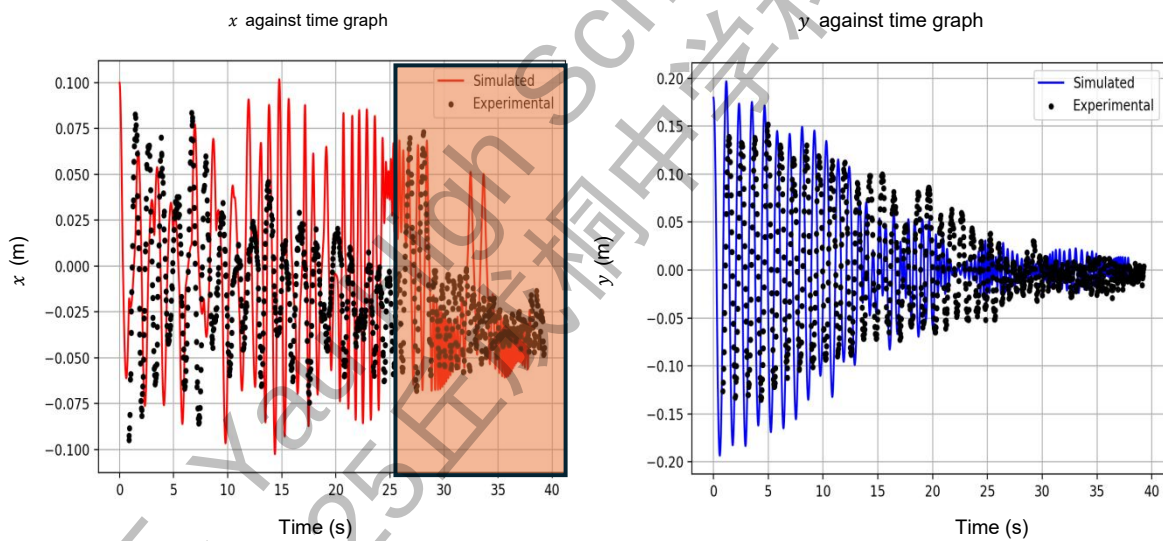


图 29 情况 1 中轨迹预测与实验数据

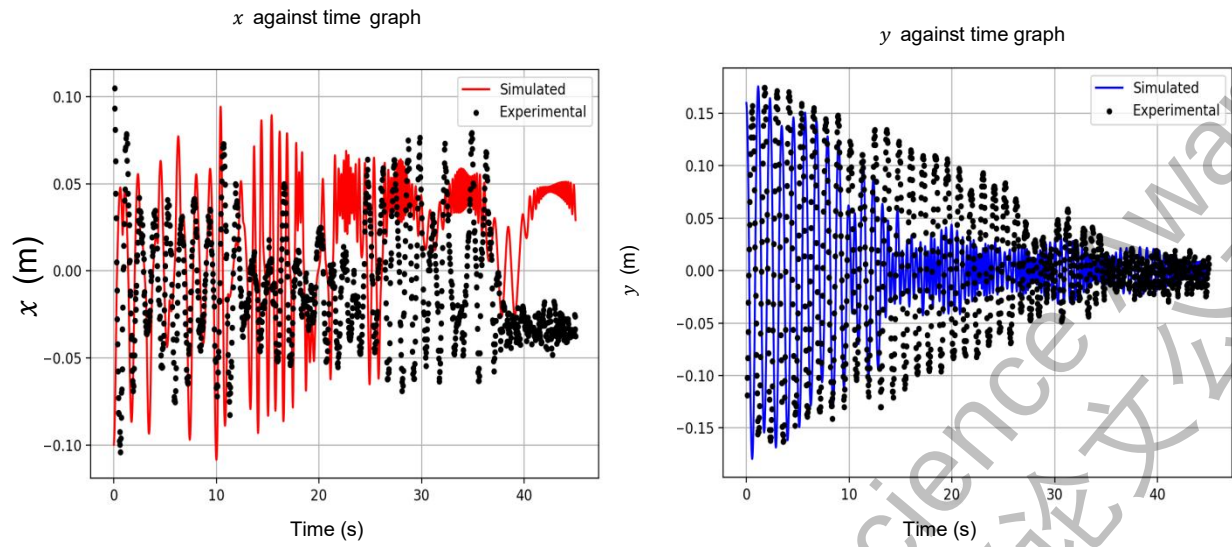


图 30 情况 2 中轨迹预测与实验数据

双固定磁铁磁摆在不同情况下与预测轨迹产生了不同的结果，为了研究此现象，我们引入李雅普诺夫指数来探究该系统的混沌运动状态。我们用 $|\delta(\mathbf{A})| \approx e^{\lambda t} |\delta_0|$ 来描述动力系统中对初始条件的敏感性，其中 δ_0 是在初始时间 $t=0$ 时，磁摆受到的微扰的大小； $\delta(\mathbf{A})$ 表示经过一段时间后磁摆的微扰的大小； λ 是李雅普诺夫指数，其量化了微扰被放大的程度。我们基于公式计算出 x 坐标和 y 坐标上的李雅普诺夫指数，绘制三维相图后发现李雅普诺夫指数大于 0，意味着初始的微扰会在系统中被放大，处于混沌状态。

表 2 李雅普诺夫指数计算参数表

磁铁参数	磁矩	$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{m_2} = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$
	质量 (g)	20
位置坐标(m)		$(-0.1, 0.0, 0.0) \text{ \& } (0.1, 0.0, 0.0)$
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.45
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01

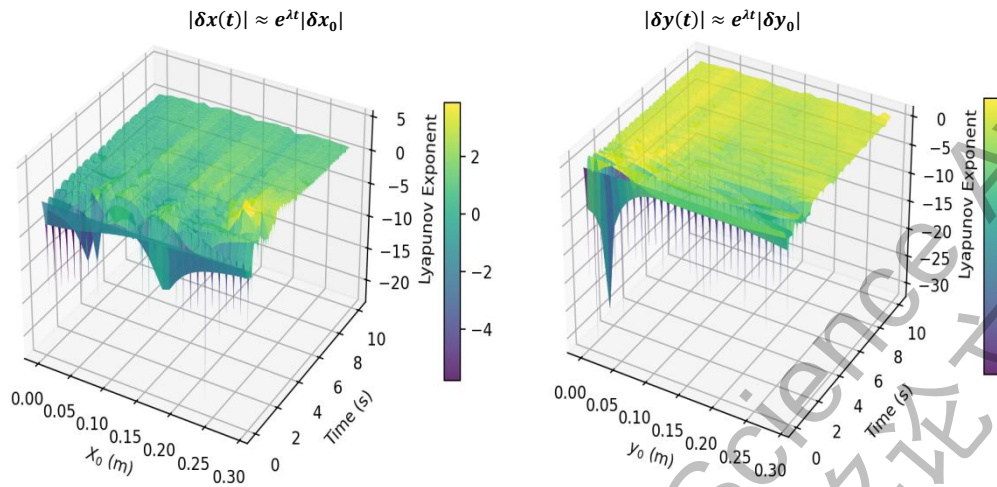


图 31x 和 y 自由度上李雅普诺夫指数随时间演化图

得出系统混沌状态的结论后，定量分析全部的轨迹不再可能，于是我们引入分形谷底（Fractal Basin）这一物理概念，预测悬挂磁铁的最终落点。因为图像绘制涉及上条轨迹预测，我们使用磁偶极子模型对磁铁进行建模来增加计算效率。

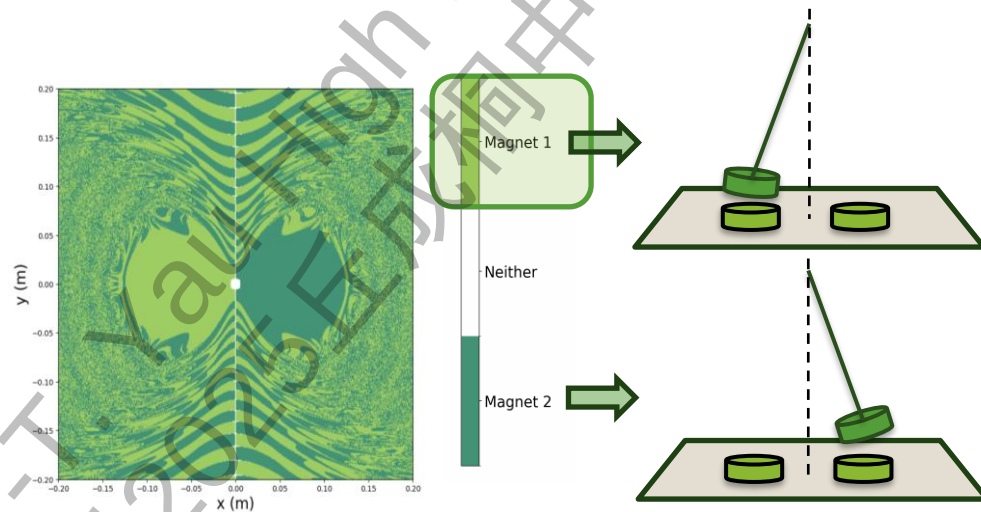


图 32 分形谷底意义演示

如图 32 的左图所示，如果磁铁的初始位置是在深绿色的色块上方，那意味着磁铁的最终落点是被右边的磁铁吸引；若其初始位置在浅绿色的色块上方，则意味着磁铁的最终落点是被左边的磁铁吸引；而若它在白色色块上方，就说明磁铁最终落点在中间而非被任何一个磁铁吸引。

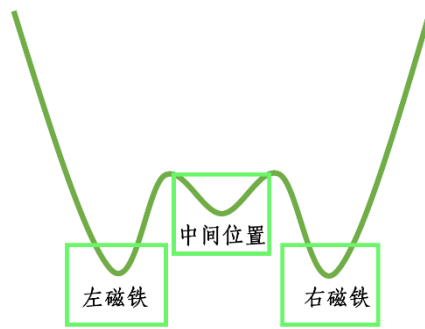


图 33 势阱与分型谷底的对应图

要理解磁铁最后的最终位置，我们可以引入势能阱的概念。磁铁在运动的过程中不断受到阻尼作用，能量逐渐损耗。当它处于某个势阱中时，因为能量无法越过“势垒”，它就会被困在该势阱中，停留在其底部能量最低的位置。

磁铁最终静止在某一位置，意味着其由于阻尼的作用能量越来越小，因此无法克服其所在的势阱，被“捕获”。这就是图 32 中浅绿色或深绿色区域的含义，即在不同的初始位置静止释放，磁铁最终会落入的稳定磁铁势阱。而白色区域则代表另一种特殊的情况，即重力势能使得系统在中形成了另一个势阱。因此，有可能磁铁不会被任何一个磁铁吸引，而是进入了重力的势阱低谷。

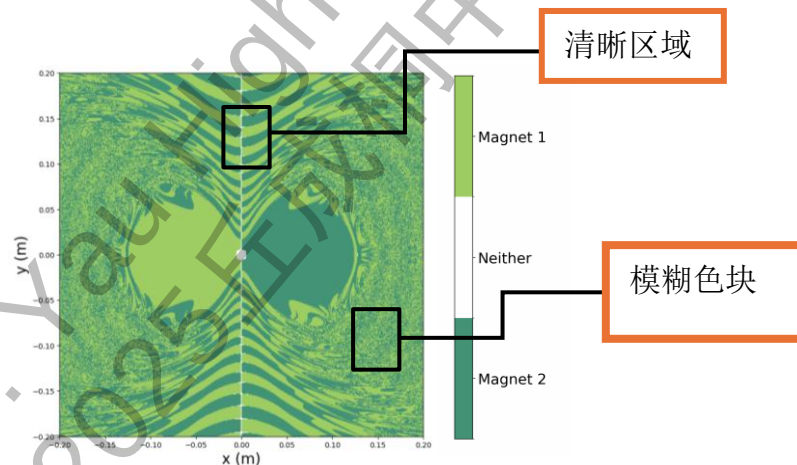


图 34 分形图中的清晰区域与模糊色块的对比

在将分形谷底图像与实验数据和理论相对应时，存在一个现象：当图像上的分形图形较为清晰时，此时前述理论预测与实验数据对应符合情况 1，即最终位置与理论预测相符。在分形谷底图中，部分区域是存在模糊情况的：部分区域的浅绿与深绿交迭，呈现无序状态。在这种情况下，前述理论甚至无法实验中磁摆的最终落点，对应情况 2。

不仅如此，我们还提出了对于情况 2 中的磁铁最终落点的预测优化。因为磁铁在清晰区域暂时静止的效果等同于从同等位置静止释放，因此在探究在模糊色块上方的磁铁的运动轨迹的时候，只要其在某一清晰色块上方瞬时静止，我们就可以提前预测该磁铁的最终落点。

为了验证分型谷底，我们将实验数据与理论图相对应，发现实验数据整体与分形图对应完好，但在部分边际情况与模糊处容易产生不一致。这对应了我们前面对分形图性质的结论，即在模糊区域时，最终位置更难被预测。

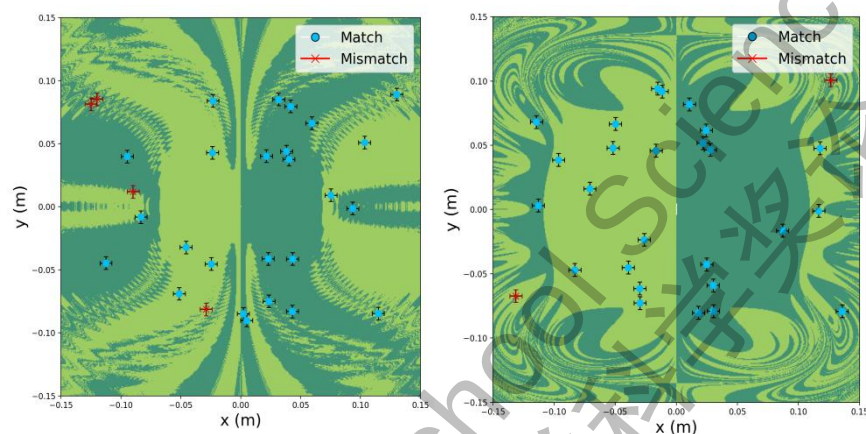


图 35 分形谷底的验证

4.2 分形谷底与实验验证

该部分将会分析分型谷底是如何随着摆长，阻尼，初速度，物体质量，物体间距等变量的关系发生变化的。如图 36 所示，空白区域随着磁摆绳长变长而减小，清晰区域面积变大。结合图 37 中的势阱图可以发现，这是因为随着摆绳长度变长，磁摆运动同一段距离的重力势能差会变小，而磁势能渐渐主导对磁摆运动的影响。

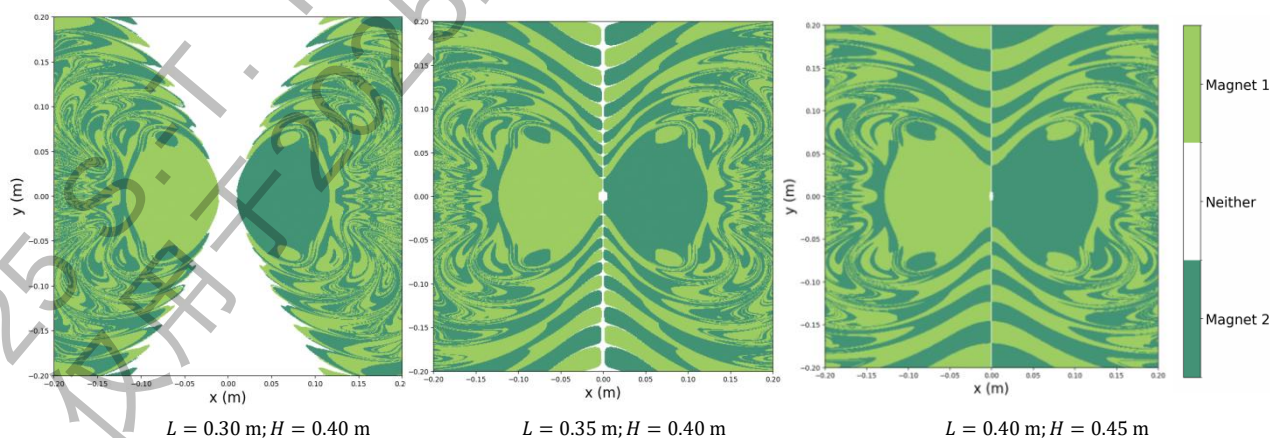


图 36 磁摆线长度变化后分形谷底所呈现的变化趋势

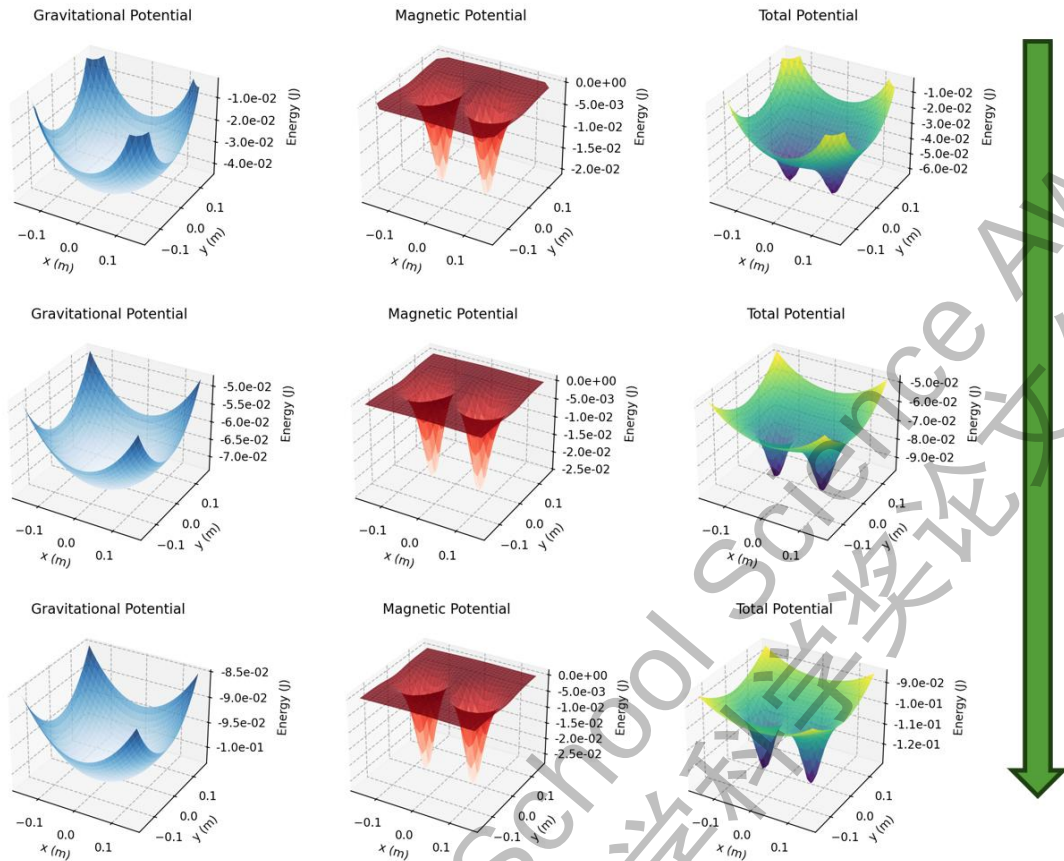


图 37 随着摆线长度变化，系统中势阱所产生的变化趋势

如下面图 38 所示，随着悬挂高度增加，分形谷底的趋势为白色面积先减小，再增大。这是因为当磁摆悬挂高度过低时，磁铁磁矩与相互位移矢量的夹角 θ 趋近于直角，导致磁铁之间吸引力减小，磁摆难以被捕捉。当高度逐渐增加，磁力逐渐增加，对悬挂磁铁的影响超过重力，从而白色区域减小。然而，随着悬挂高度的进一步增高，因此磁铁间距变大，磁力显著减小，重力再次主导，因此就会出现全白，即磁摆没有被任何一个磁铁吸引的情况。

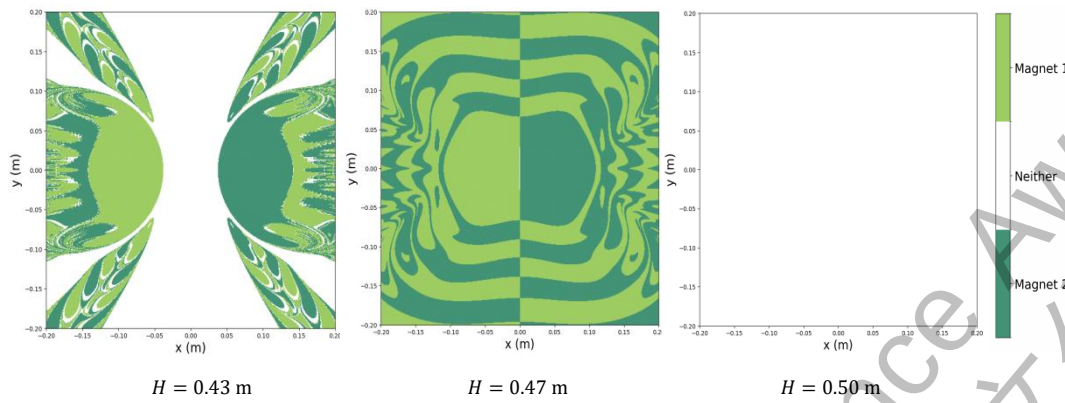


图 38 悬挂高度变化后分形谷底所呈现的变化趋势

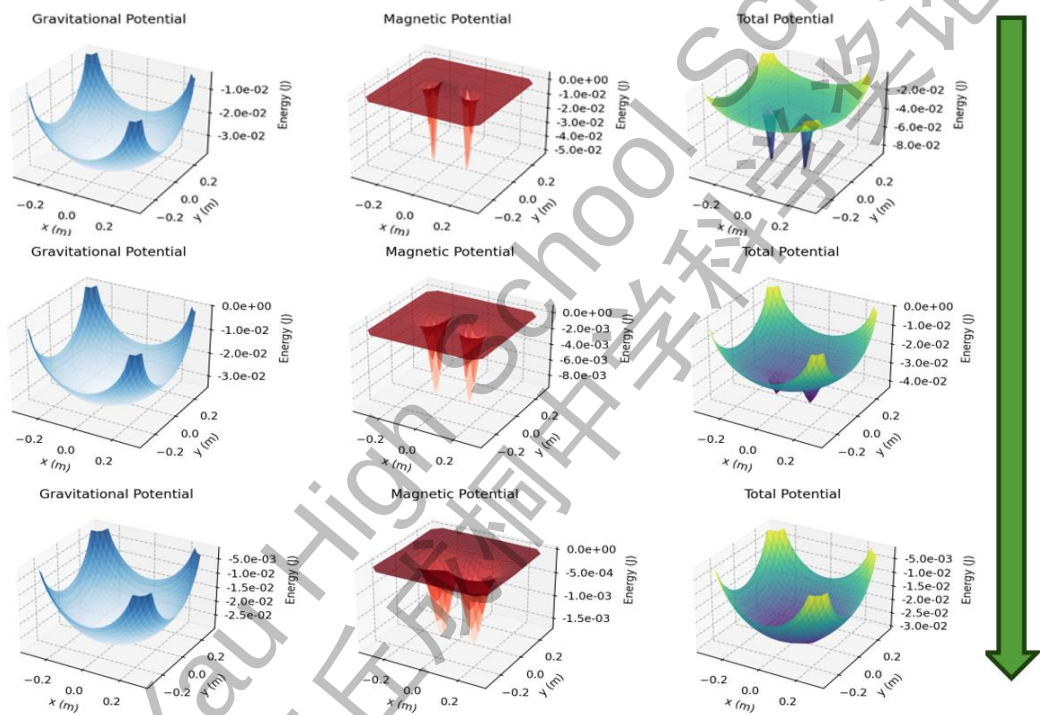


图 39 随着悬挂高度变化，系统中势阱所产生的变化趋势

如图 40 所示, 根据公式 $F = -k\dot{v}$, 我们在理论模拟中逐渐调整 k 的大小, 发现随着阻尼系数 k 增大, 清晰区域增大。我们认为这是因为随着能量耗散加剧, 运动轨迹逐渐变得可被预测。

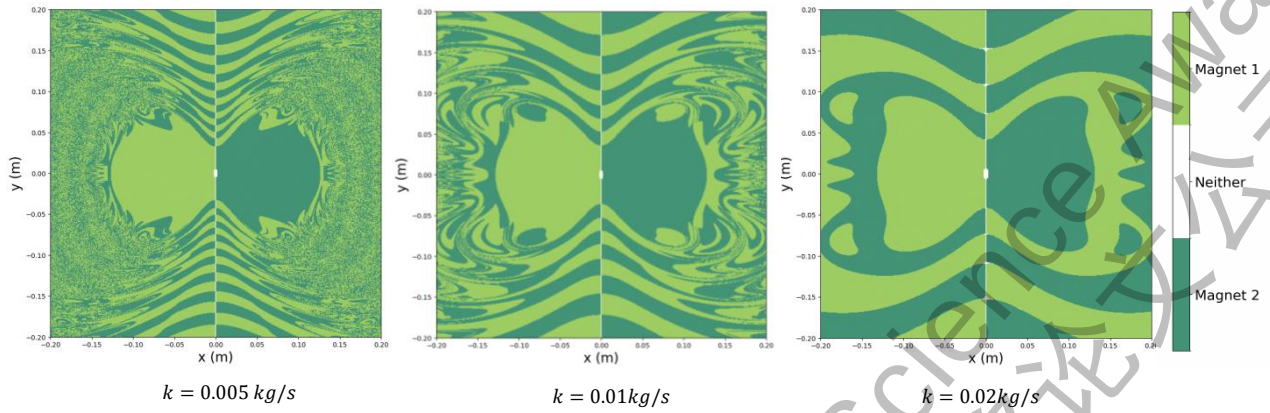


图 40 随着阻尼系数增大分形谷底所呈现的变化趋势

如图 41 所示, 随着 x 或 y 轴方向的初速度增大, 分型谷底除了呈现非对称样式以外, 清晰区域也在减小。这也就意味着当系统动能增大, 能量更高时, 系统会变得更加不可预测, 与我们的预测一致。

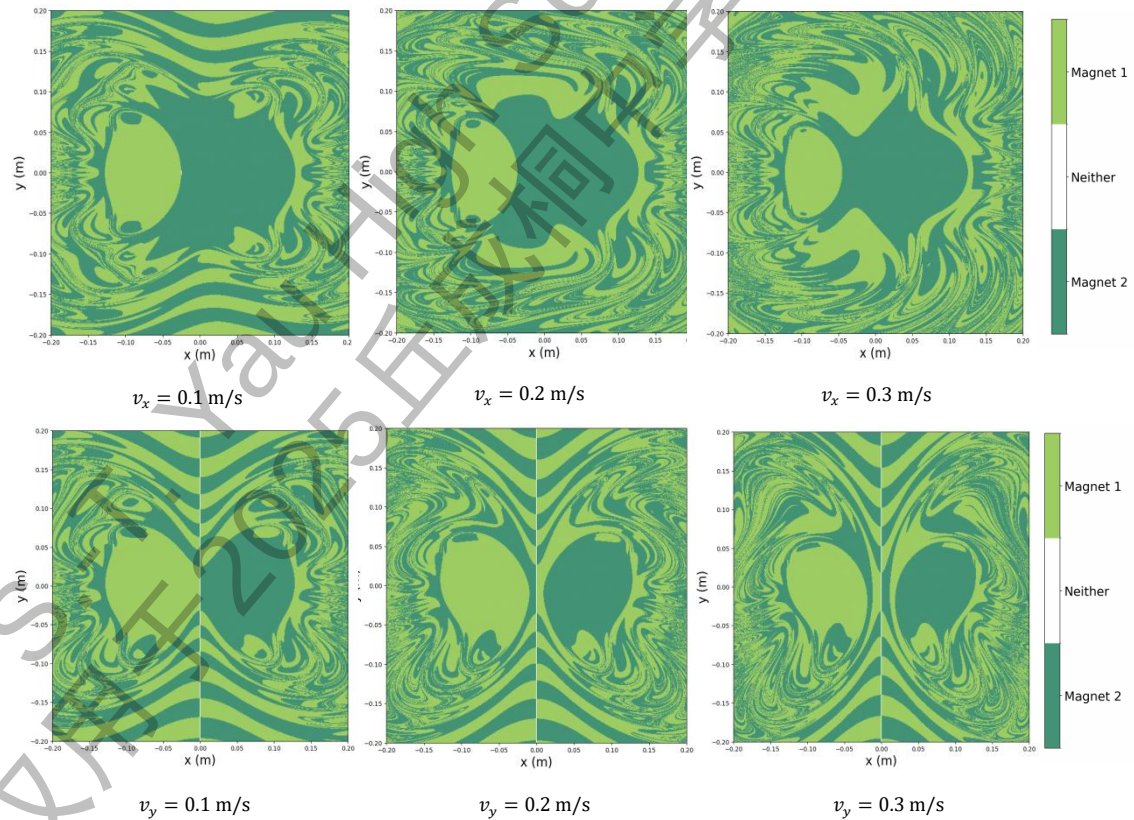


图 41 随着 x 或 y 轴初速度增大分形谷底所呈现的变化趋势

如图 42 所示, 磁铁质量增加后, (1) 清晰的分形区域减小且 (2) 白色区域增加。(1) 合理是因为, 质量增加后整个系统的能量增加, 耗散更慢, 因此更加不可预测。(2) 也合理, 因为磁铁质量增加以后, 在磁力不变的情况下, 重力占主导作用, 使得重力势阱更加显著, 白色区域增加。

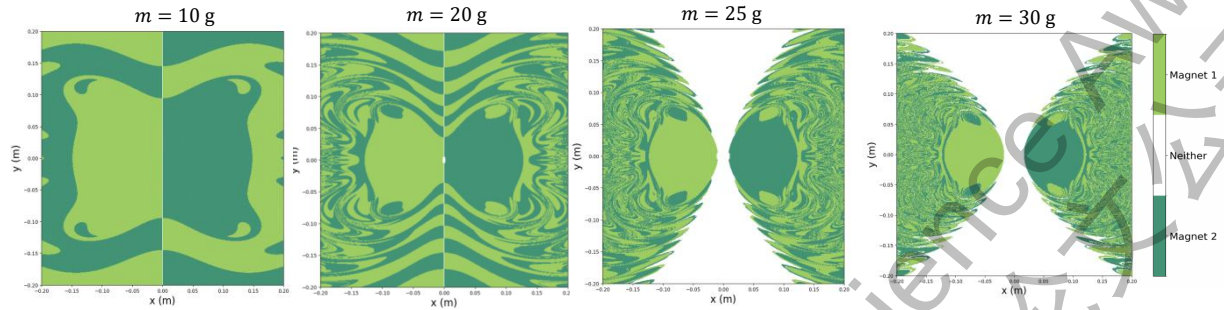


图 42 随着固定磁铁质量增加, 分形谷底所呈现的变化趋势

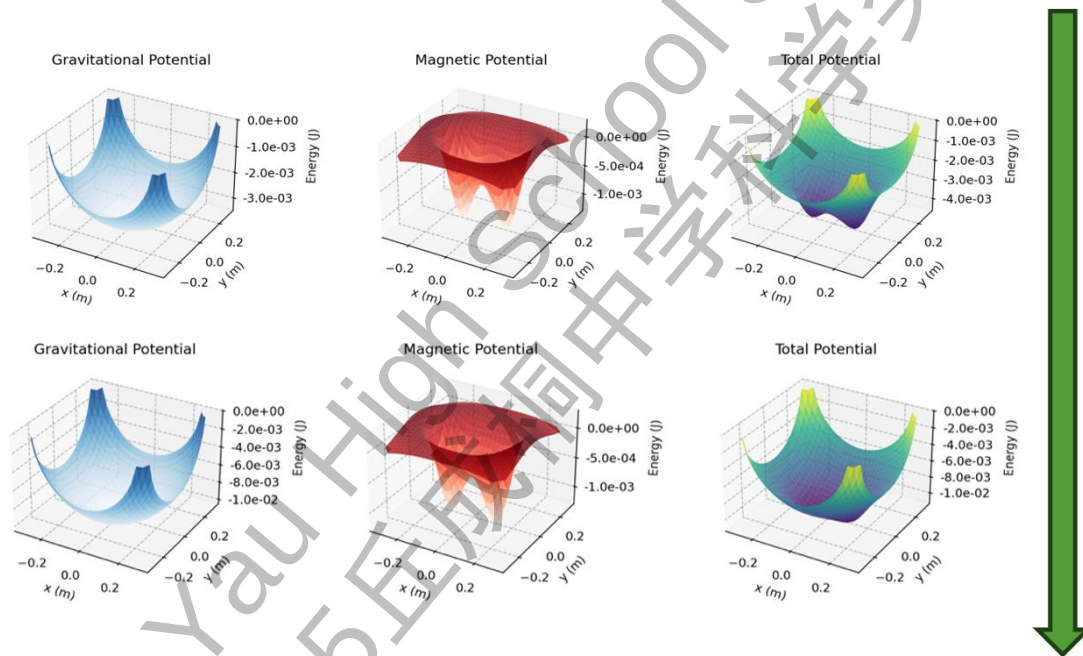


图 43 随着固定磁铁质量变化, 系统中势阱所产生的变化趋势

如图 44 所示, 当双固定磁铁之间的距离增加时, 白色区域和分形区域都增加。这是因为当双磁铁非常靠近时, 其磁场耦合复杂, 势垒减小, 因此更难预测其最终被哪个磁铁捕获。然而, 随着其间距增加, 势阱的区分更加清晰, 可预测性增加。而最后白色区域增加是因为当磁铁间距过大, 磁力会明显减弱, 此时重力占主导作用。

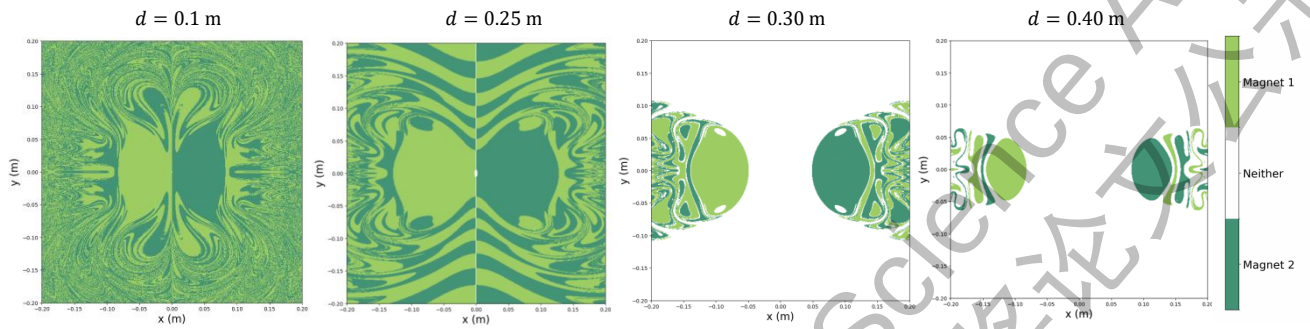


图 44 随着两固定磁铁之间距离增加, 分形谷底所呈现的变化趋势

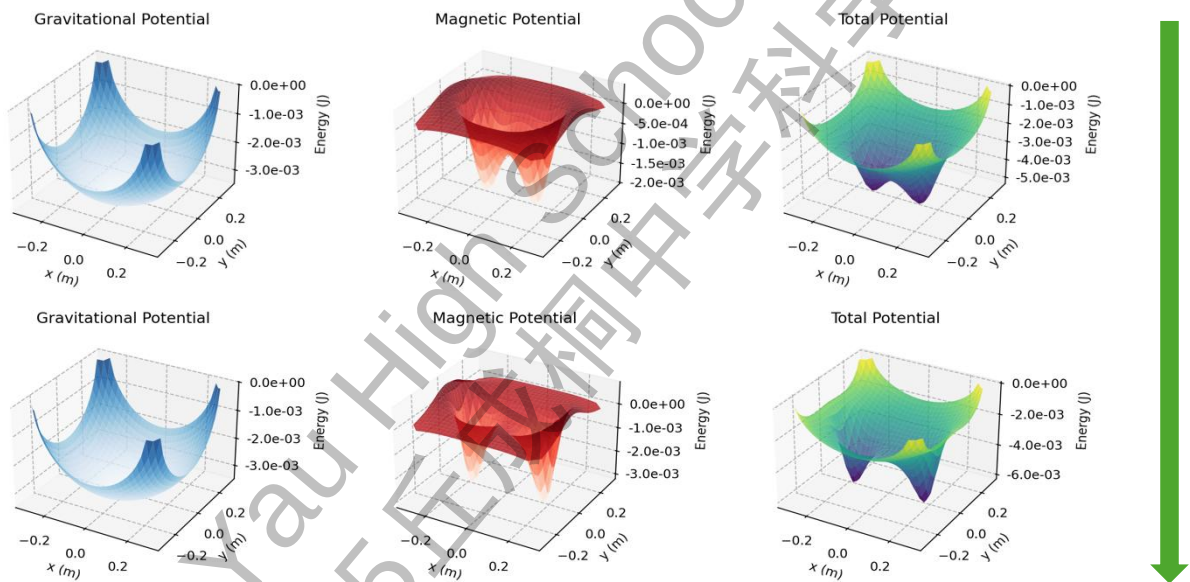


图 45 随着固定磁铁之间距离变化, 系统中势阱所产生的变化趋势

5. 总结与展望

本研究通过精密实验与理论建模相结合的方法，系统地探究了磁性辅助悬挂系统丰富的动力学行为，特别是其在单磁铁配置下的准周期运动与双磁铁配置下的混沌特性。首先，我们建立了磁偶极子与电流柱这两大研究磁摆运动状态的基本理论模型。在分析单个固定磁铁的系统中，为了计算的精确性，我们使用电流圆柱模型研究单固定磁铁系统，并通过计算拉格朗日量预测了其运动轨迹，也探究了磁摆所展现的准周期性质。在双固定磁铁的研究中，为了提高计算的速度，我们使用了磁偶极子模型进行建模；同时，我们引入李雅普诺夫指数确定其系统混沌的性质，为研究上述两种情况产生的原因绘制分形谷底图，在分形图中，我们通过在实验中改变单一变量的方式，探究了不同变量对磁摆系统混沌性质的影响。虽然我们在此研究中只探究了单磁铁和双磁铁的情况，但是因为增加磁铁数量只会增加系统的复杂程度和非线性特征，因此分型谷底的方法和混沌的结论适用于多个磁铁情况

在此研究中有几大亮点：

第一，我们构建了相较于已有研究更为完善的预测模型，同时考虑了悬挂磁铁的平动和转动，从而对单个固定磁铁情况中悬挂磁铁的运动轨迹给出了非常精准的预测。不仅如此，我们基于该预测，用准周期这一核心特征对系统的运动趋势的变化进行了深入的讨论。

第二，在验证双固定磁铁系统是混沌的基础上，我们提出并实验验证分形谷底，对混沌系统依旧做出了一定的预测。进一步，我们还进行了更深入的变量分析，探讨了能量损耗和可预测性之间的深刻关系。

第三，我们设计了一套装置简单，但是较为精准的实验装置。这可以后续研究者的复刻以及进一步研究打下了坚实的基础。

致谢与综述

这道题是 2025 年 IYPT 的第九题。从最开始准备 CYPT 国赛，到国家集训队，到最后带到 IYPT 的国际赛场，我们持续地讨论和研究这道题目。从中我也体验到了从提出理论，实验验证，再到理论实验不一致以后调整理论的完整科研逻辑闭环。

一开始对于磁铁建模的选择其实就困扰了我们很久。一方面我们知道电流圆柱模型可以给出更加精确的预测，然而其磁场的计算和洛伦兹力的计算都要使用双重积分，大大地增加了程序的运算量。因此，我们后续选择在单磁铁模型中仅仅需要一次轨迹预测的情况下使用磁偶极子模型，而在双磁铁模型的分型谷底模型中选择电流圆柱模型。因为编译型语言与解释型语言的差异，为了加速运算速度，我们最后将 Python 程序改成了 C++ 代码。

而在设计实验的过程中我们也遇到了一些问题。为了确保不存在电磁阻尼，我们一开始其实尝试使用一些塑料的支架来固定系统。然而，我们发现在磁铁晃动的过程中存在着大量的不稳定的情况。因此我们后续使用了金属制的光学支架来确保系统的稳定性，并通过估算验证电磁阻尼对系统的影响忽略不计。

在科研的过程中，我非常感谢指导老师对于我物理框架性思维，和我们一起探讨结论的合理性，以及进行算法迭代的方法。论文的文献调研，整体的做题思路，所有的程序思路和绘图，以及数据分析均由方飞阳一人完成；实验的设计和具体操作是与王井然一起实现的；而对于编程思路的实际落实则由何欣镭辅助。最后的论文撰写由王井然写主要内容，方飞阳打磨审核，何欣镭排版。

6.参考文献

- [1] Tuckerman, M. E. (2023). Statistical mechanics: Theory and molecular simulation (2nd ed.). Oxford University Press.
- [2] Christian J M, Middleton-Spencer H A J. The magnetic pendulum: a tabletop demonstration of chaos[J]. Chalkdust Magazine, 2018, 8.

7.附录

*雷诺数

为了验证线性空气阻力的适用性，我们引入了雷诺系数。

$$Re = \frac{\rho v_{\max} L}{\mu} \approx \frac{1.3 \times 2 \times 5 \times 10^{-3}}{1.8 \times 10^{-5}} = 700 < 1000$$

ρ = 空气密度

L = 长度特征（直径）

$v_{\max}$ = 最大速度

μ = 空气动力粘滞度

因为其小于 1000，我们认为线性阻尼的假设是合理的。

***估算物理量大小**

固定磁铁周围的磁感强度大小：

$$B_{max} = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\hat{r} - \vec{m}] \approx 4\pi \times \frac{10^{-7}}{4\pi(0.05)^3} = 8 \times 10^{-4} T$$

磁铁的电阻：

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho 2\pi R}{thicknes \times diameter} \approx \frac{1.5 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 5 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3} \times 10^{-2}} = 2.3 \times 10^{-3} \Omega$$

磁体磁矩：

$$\vec{m} = 4\pi R^2 h \frac{B_r}{\mu_0} \vec{n} = \frac{4\pi \times (75 \times 10^{-3})^2 \times 3 \times 10^{-3} \times 1.3}{4\pi \times 10^{-7}} = 2.2 A \cdot m^2$$

涡流阻尼：

磁铁：

$$P_{mag} = \frac{B_{max}^2 l^2 v^2}{R} \approx \frac{(8 \times 10^{-4})^2 \times 0.03^2 \times 1^2}{2.4 \times 10^{-3}} = 2.4 \times 10^{-7} w$$

光学支架：

$$P_{opt} = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \approx \frac{(1 \times 10^{-4})^2 \times 0.03^2 \times 1^2}{1.4 \times 10^{-3}} = 6.4 \times 10^{-9} w$$

阻尼比率：

$$P_{air} = Fv \approx 3 \times 10^{-5} w$$

$$\frac{P_{air}}{P_{mag}} \approx 10^2$$

$$\frac{P_{air}}{P_{opt}} \approx 10^4$$

因此我们认为涡流阻尼相较于空气阻尼可忽略不计

***轨迹预测核心代码**

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4 from scipy.constants import g, mu_0, pi
5 from tqdm import tqdm
6
7 # === 系统参数 ===
8 line_length = 0.4
9 hanging_point = np.array([0.0, 0.0, 0.5])
10 m = 0.1
11 damping_coefficient = 0.02
12 initial_speed = 0
13 velocity_threshold = 0.003
14
15 # === 磁铁参数 ===
16 pos_magnet_B = np.array([-0.05, 0.0, 0.0])
17 pos_magnet_D = np.array([0.05, 0.0, 0.0])
18 m_B = np.array([0.0, 0.0, 10.0])
19 m_D = np.array([0.0, 0.0, 10.0])
20
21 # === 磁偶极子力 ===
22 def dipole_force(m1, m2, r1, r2):
23     R = r2 - r1
24     R_mag = np.linalg.norm(R)
25     if R_mag == 0:
26         return np.zeros(3)
27     R_hat = R / R_mag
28     mu = mu_0 / (4 * pi)
29     term1 = np.dot(m2, R_hat) * m1
30     term2 = np.dot(m1, m2) * R_hat
31     term3 = np.dot(m1, R_hat) * m2
32     term4 = 5 * np.dot(m1, R_hat) * np.dot(m2, R_hat) * R_hat
33     return (3 * mu / R_mag**4) * (term1 + term2 + term3 - term4)
34
35 # === 判断函数 ===
36 def simulate_and_classify(x, y):
37     if x**2 + y**2 >= line_length**2:
38         return np.nan
39
40     z = hanging_point[2] - np.sqrt(line_length**2 - x**2 - y**2)
41     pos_init = np.array([x, y, z])
42     vel_dir = np.cross(pos_init - hanging_point, [0, 0, 1])
43     vel_dir = vel_dir / (np.linalg.norm(vel_dir) + 1e-8)
44     vel_init = vel_dir * initial_speed
45     y0 = np.concatenate([pos_init, vel_init])
46

```

```

47     def motion_with_tension(t, y):
48         pos = y[:3]
49         vel = y[3:]
50         radial = pos - hanging_point
51         radial_unit = radial / np.linalg.norm(radial)
52         m_C = radial_unit
53         gravity = np.array([0, 0, -m * g])
54         magnetic = dipole_force(m_B, m_C, pos_magnet_B, pos) + dipole_force(m_D,
55                                     m_C, pos_magnet_D, pos)
56         damping = -damping_coefficient * vel
57         F_ext = gravity + magnetic + damping
58         v2 = np.dot(vel, vel)
59         tension = m * v2 / line_length + np.dot(F_ext, radial_unit)
60         acc = (F_ext - tension * radial_unit) / m
61         return np.concatenate([vel, acc])
62
63     def stop(t, y):
64         return np.linalg.norm(y[3:]) - velocity_threshold
65     stop.terminal = True
66     stop.direction = -1
67
68     sol = solve_ivp(motion_with_tension, [0, 10], y0, events=stop, max_step=0.05)
69     final_pos = sol.y[:3, -1]
70     return 1 if np.linalg.norm(final_pos - pos_magnet_B) <
71            np.linalg.norm(final_pos - pos_magnet_D) else 0
72
73 # === 扫描相图 ===
74 res = 50
75 x_vals = np.linspace(-0.2, 0.2, res)
76 y_vals = np.linspace(-0.2, 0.2, res)
77 Z = np.zeros((res, res))
78
79 for i, x in enumerate(tqdm(x_vals, desc="Simulating grid")):
80     for j, y in enumerate(y_vals):
81         Z[j, i] = simulate_and_classify(x, y)
82
83 # === 绘图 ===
84 plt.figure(figsize=(8, 6))
85 plt.imshow(Z, extent=[-0.2, 0.2, -0.2, 0.2], origin='lower', cmap='coolwarm',
86            alpha=0.8)
87 plt.xlabel("Initial x (m)")
88 plt.ylabel("Initial y (m)")
89 plt.title("Attraction Region: 0 = D (Red), 1 = B (Blue)")
90 plt.colorbar(label="Final Magnet")
91 plt.grid(True)
92 plt.show()

```

*李雅普诺夫指数计算代码

```

1  from dipole_terra import *
2
3  dx = 0.02
4  Nx = 10 # number in each direction
5  dy = 0.02
6  Ny = 10
7
8  Sx = -Nx*dx
9  Sy = -Ny*dy
10
11 field = np.zeros((Ny*2,Nx*2))
12
13 e = Experiment()
14
15 import matplotlib.pyplot as plt
16 from renderer import *
17
18 T,Pos = e.simulation(0.05,0.1)
19 print(Pos[-1])
20 print(len(T))
21 render_trajectory(T,Pos,magnets=e.magnets,speed=1,size=0.2)
22
23 '''T,Pos = e.simulation(-0.13,0.1)
24 print(Pos[-1])
25 print(len(T))
26 render_trajectory(T,Pos,magnets=e.magnets,speed=1,size=0.2)'''
27
28
29 for ix in range(-Nx,Nx):
30     for iy in range(-Ny,Ny):
31         x = ix*dx
32         y = iy*dy
33         #print(x,y)
34         T,Pos = e.simulation(x,y)
35         print(len(T))
36         field[Ny+iy][Nx+ix] = Pos[-1][0]
37
38 import matplotlib.pyplot as plt
39 fig, ax = plt.subplots()
40 im = ax.imshow(field, cmap="bwr")
41 ax.set_box_aspect(1)
42 fig.tight_layout()
43 plt.show()
44

```

```

1 dx = 1e-5 # 微扰
2 Dx = 0.01 # 数据点间隔
3 N = 30 # 数据点数量
4
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from dipole_one_terry import *
8
9 e = Experiment()
10
11 X = np.arange(0, Dx*N, Dx)
12 T = []
13 Poss = []
14
15 for x in np.arange(0, Dx*N, Dx):
16     e.__init__()
17     e.pos[0] = x
18     T, Pos = e.simulation()
19     Pos1 = np.array([i[0] for i in Pos])
20     e.__init__()
21     e.pos[0] = x+dx
22     T, Pos = e.simulation()
23     dPos = np.array([i[0] for i in Pos]) - Pos1
24     dPosrel = dPos/dx
25     dPosrel = np.log(abs(dPosrel))
26     dPosrel = dPosrel / T
27     Poss.append(np.array(dPosrel))
28
29 fig = plt.figure()
30 ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
31 ax.set_xlabel("$X_0$ (m)")
32 ax.set_ylabel("Time (s)")
33 ax.set_zlabel("Lyapunov Exponent")
34 x, y = np.meshgrid(X, T)
35 surf = ax.plot_surface(x, y, np.swapaxes(np.array(Poss), 0, 1), cmap="viridis",
36                        alpha=0.8)
37 cbar = fig.colorbar(surf, ax=ax,
38                    shrink=0.6, # Adjusts height (0-1)
39                    aspect=15, # Makes bar thinner
40                    pad=0.1)
41 plt.show()

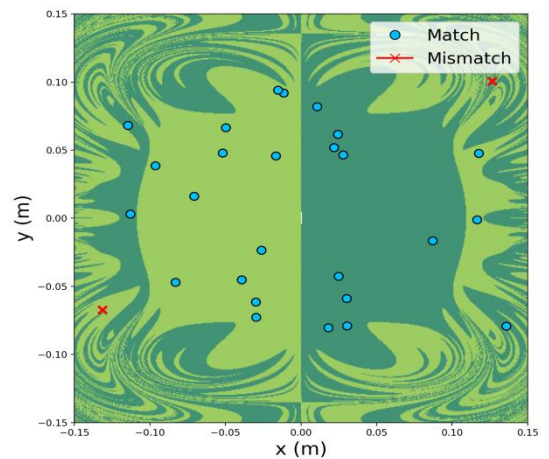
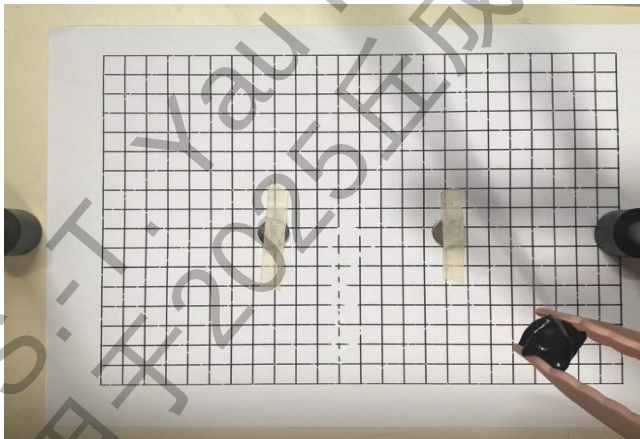
```

*实验中磁摆的轨迹前 0.3 秒数据的收集（数据示例）

0.01	0.0997979	0.199595	0.118033
0.02	0.0993941	0.198784	0.117426
0.03	0.0987889	0.19757	0.116523
0.04	0.0979824	0.195952	0.115333
0.05	0.0969747	0.19393	0.113865
0.06	0.0957659	0.191505	0.112132
0.07	0.0943562	0.188676	0.110149
0.08	0.0927457	0.185444	0.107935
0.09	0.0909351	0.18181	0.105506
0.1	0.088925	0.177776	0.102886
0.11	0.0867165	0.173343	0.100096
0.12	0.0843111	0.168514	0.0971618
0.13	0.0817109	0.163293	0.0941084
0.14	0.0789186	0.157685	0.0909634
0.15	0.0759376	0.151697	0.0877549
0.16	0.0727722	0.145336	0.0845119
0.17	0.0694275	0.138613	0.0812638
0.18	0.0659096	0.131537	0.0780405
0.19	0.0622258	0.124123	0.0748715
0.2	0.0583844	0.116385	0.071786
0.21	0.0543952	0.108339	0.0688127
0.22	0.0502692	0.100005	0.0659791
0.23	0.0460192	0.0914007	0.0633113
0.24	0.0416595	0.0825488	0.060834
0.25	0.0372061	0.0734721	0.0585699
0.26	0.0326768	0.0641951	0.0565394
0.27	0.0280903	0.0547443	0.0547608
0.28	0.0234651	0.0451486	0.0532495
0.29	0.018818	0.0354387	0.0520176
0.3	0.0141626	0.0256472	0.0510744

*测量变量

*分型谷底的实验验证



在针对于分形谷底的验证中，我们对于实验中初始条件的控制是近似的，并非精确控制初始条件，因为在实际操作实验中，难以精确设定机械误差和测量限制。我们根据分形谷底追踪系统的位置，通过跟踪系统精确值和校正视差来减少误差以确保数据可靠性。

*分型谷底的实验变量

表 3 摆线长度探究参数表

磁铁参数	磁矩	$\overline{m_1} = \overline{m_2} = 3A \cdot m^2$
	质量 (g)	20
位置坐标(m)	(-0.1, 0.0, 0.0) & (0.1, 0.0, 0.0)	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.25/0.3/0.35/0.4 m
	悬挂高度 H (m)	0.3/0.35/0.4/0.45 m
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01

表 4 悬挂高度探究参数表

磁铁参数	磁矩	$\overline{m_1} = \overline{m_2} = 3A \cdot m^2$
	质量 (g)	20
位置坐标(m)	(-0.1, 0.0, 0.0) & (0.1, 0.0, 0.0)	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.43/0.45/0.47/0.5
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01

表 5 阻尼系数探究参数表

磁铁参数	磁矩	$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{m_2} = 3A \cdot m^2$
	质量 (g)	20
位置坐标(m)	(-0.1, 0.0, 0.0) & (0.1, 0.0, 0.0)	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.45
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.005/0.01/0.02/0.05

表 6 初速度探究参数表

磁铁参数	磁矩	$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{m_2} = 3A \cdot m^2$
	质量 (g)	20
位置坐标(m)	(-0.1, 0.0, 0.0) & (0.1, 0.0, 0.0)	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.45
	初始释放速度 (m/s)	$v_x = 0.1/0.2/0.3$ $v_y = 0.1/0.2/0.3$
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01

表 7 固定磁铁质量探究参数表

磁铁参数	磁矩	$\overline{m_1} = \overline{m_2} = 3A \cdot m^2$
	质量 (g)	10/20/40
位置坐标(m)	$(-0.1, 0.0, 0.0) \ \& \ (0.1, 0.0, 0.0)$	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.45
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01

表 8 固定磁铁距离探究参数表

磁铁参数	磁矩	$\overline{m_1} = \overline{m_2} = 3A \cdot m^2$
	质量 (g)	20
间距 d (m)	0.1/0.25/0.3/0.4	
系统参数	摆绳绳长 L (m)	0.4
	悬挂高度 H (m)	0.45
	初始释放速度 (m/s)	0
	系统阻尼系数 k (kg/s)	0.01