

参赛学生姓名：牟天昊，罗海艺

中学：重庆市育才中学校

省份：重庆市

国家/地区：中国

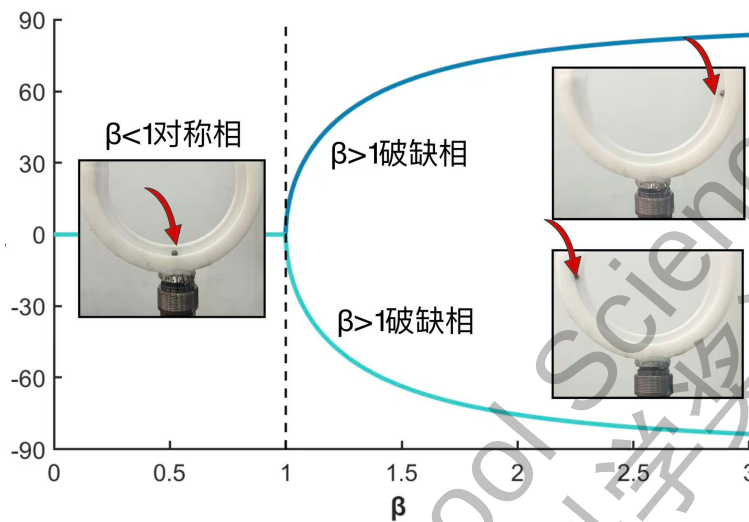
指导老师姓名：张程鑫

指导老师单位：重庆市育才中学校

论文题目：力学系统的“相变”：

旋转诱导的对称性自发破缺与迟滞回线

力学系统的“相变”： 旋转诱导的对称性自发破缺与迟滞回线



摘要

相变是热力学与统计物理关注的核心现象，其本质是系统平衡态随控制参数变化的明显转变，多数研究聚焦复杂的多粒子体系或抽象的理论模型，难以直观呈现相变的普适性特征（如序参量突变、对称性破缺、滞后效应等），这给基础物理机制的理解带来挑战，也限制了相变原理在教学与应用中的推广。为解决这一问题，本研究以单刚性小球在绕竖直轴旋转的圆环形槽中的运动为研究对象，将抽象的相变现象转化为可观测的力学行为，旨在揭示相变的普适特征与物理根源。本研究中，“相变”被定义为系统平衡态随圆环形槽的旋转频率的突变：当旋转频率超过临界值时，小球的稳定平衡位置会从圆环底部（低能态）发生突变或连续转变至侧面（高能态）。

理论上，系统有效势能函数 $U_{\text{eff}}(\theta) = -\cos\theta - \frac{1}{2}\beta(\sin\theta + \alpha)^2$ 揭示了连续与不连续相变及其对称性差异：当转轴居中时 ($\alpha = 0$)，在临界转速 $\omega_c = \sqrt{g/R}$ 处发生连续相变；当偏心存在 ($\alpha \neq 0$) 时，系统对称性被打破，发生不连续相变，表现为平衡位置的突变的滞后效应。为检验理论预测，我们设计并搭建了旋转环路实验系统，精确测量了不同转速与偏心度下小球的平衡位置，实验结果与理论分析定量吻合。特别的，在偏心系统中，我们不仅捕捉到平衡位置的突变，还首次在该类机械系统中观测到清晰的滞回环，滞回宽度随 α 增大而增加，体现了系统的双稳态特征与路径依赖性，为相变导致的迟滞现象提供了直观的力学演示。本文设计的综合实验平台可用于研究更丰富的类相变现象，这一简洁的力学类比体系为探索复杂系统的相变机制提供新的研究思路。

目录

1	引言	3
2	中心转轴系统的动力学分析	4
2.1	小球的受力分析与运动轨迹求解	4
3	拉格朗日力学分析与相变现象的发现	6
3.1	拉格朗日量与有效势能	7
3.2	对称系统的平衡态与二阶相变 ($\alpha = 0$)	8
3.3	对称性破缺与一阶相变	9
3.4	相变行为的统一描述	12
4	实验系统设计与验证	15
4.1	实验装置	15
4.2	系统参数标定与初始验证	16
4.3	二阶相变实验分析	18
4.4	一阶相变实验分析	19
4.5	误差分析与讨论	22
5	结论与展望	22
6	附录 A: 平衡角度及稳定平衡点推导	25
7	附录 B: 圆环摩擦系数测量公式推导	27
7.1	能量分析	27
7.2	积分计算	28
7.3	最终结果	28
8	附录 C: 球的动力学方程求解	29
9	附录 D: 球平衡位置与 β 的关系	35
10	附录 E: 不同 α 下 β 与 θ 的关系	37
11	附录 F: 不同 β 下 α 与 θ 的关系图及与铁磁相变的对比图	39
12	附录 G: 一级相变有效势能求解	41
13	附录 H: 二级相变有效势能	43
14	附录 I: 相变条件的参数空间图	53

15 附录 J: 不同 α 下 β 与 θ 的对比图	55
16 附录 K: β 与 α_c 的关系及实验拟合曲线	60
17 附录 L: 小球摩擦力测量	66

2025 S.-T. Yau High School Science Award
 仅用于2025丘成桐中学科学奖论文公示

1 引言

相变作为物质在特定条件下发生的突变现象，广泛存在于自然界中。从日常生活中水的沸腾、冰的融化，到凝聚态物理中的铁磁-顺磁转变、超导相变，这些现象虽然表现形式各异，但都展现出系统状态的不连续变化或临界行为。

相变研究具有悠久的历史。van der Waals (1873) 通过引入分子间相互作用成功解释了气液相变，开创了相变理论研究的先河 [1]。Curie (1895) 发现铁磁材料存在临界温度（居里点），揭示了磁性相变的本质 [2]。Landau (1937) 提出了基于序参量的相变普遍理论，将不同类型的相变纳入统一的理论框架 [3]。Wilson (1971) 发展的重正化群理论则深刻揭示了相变临界现象的标度不变性和普适性 [4]。这些理论进展不仅深化了我们对相变本质的理解，更揭示了“more is different”这一凝聚态物理的核心理念——宏观涌现现象无法简单地从微观相互作用推导得出 [5]。

近年来，相互作用诱导的相变成为研究前沿。在强关联电子系统中，电子-电子相互作用导致了 Mott 转变、量子霍尔效应等奇异相变现象 [6,7]。在软物质和生物系统中，粒子间的相互作用驱动了自组装、群体运动等集体行为的相变 [8,9]。这些研究表明，即使在简单的相互作用规则下，多体系统也能展现出丰富的相变行为。

值得注意的是，不同领域的相变现象虽然物理机制各异，但从现象学角度存在深刻的类比关系。这种类比不仅具有理论意义，更在工程应用和教育实践中提供了重要启示。例如：交通流的堵塞-畅通转变可类比于液-固相变，为交通控制策略设计提供理论指导 [10]；金融市场的稳定-崩溃转变表现出临界慢化等相变特征，有助于风险预警 [11]；神经网络的同步-失同步转变类似于磁性相变，为理解大脑功能提供新视角 [12]。这些跨学科的类比研究表明，相变作为一种普遍的临界现象，其理论框架具有广泛的适用性。

在此背景下，1996 年 Fletcher 提出了一个极具洞察力的机械模型来类比热力学相变 [13]。该模型考虑一个质量块约束在垂直旋转圆环上的运动，通过分析系统的有效势能，Fletcher 证明了当旋转频率超过临界值 $\omega_c = \sqrt{g/R}$ 时，质量块的平衡位置从环底部突变到侧面，展现出一阶相变特征。通过引入额外参数，该模型还能展现二阶相变的连续变化行为。这一工作的重要意义在于：它用最简单的力学系统再现了相变的本质特征，为理解相变普适性提供了直观的物理图像。

值得注意的是，Fletcher 模型所展现的相变机制与近年来备受关注的动力学相变（dynamical phase transition）具有深刻的相似性。在周期驱动系统的动力学相变研究中，通过调节外界驱动频率可以改变系统的相变条件，使系统在不同的动力学相之间转换 [14-16]。例如，在 Floquet 系统中，周期性的外部驱动可以诱导系统在不同拓扑相之间转变；在周期驱动量子多体系统中，驱动频率的变化能够引发动力学量子相变，表现为序参量的非解析行为。在我们的旋转环路系统中，圆环的旋转频率 ω 正是扮演了这一外界驱动频率的角色。当旋转频率逐渐变化时，系统的有效势能景观随之演化，导致平衡态的稳定性发生改变，最终在临界频率 ω_c 处发生相变。这种通过频率调控实现相变的机制，不仅在概念上与现代动力学

相变理论相呼应，更为研究非平衡态相变提供了一个经典力学的理想平台。

然而，尽管 Fletcher 模型在理论上建立了机械系统与热力学相变的对应关系，但相关的系统性实验研究仍然缺乏。主要挑战包括：如何精确控制和测量旋转系统的动力学参数；如何捕捉相变点附近的临界涨落和动力学行为；如何将实验观测与理论预言进行定量对比。此外，原始的 Fletcher 理论基于准静态分析，未能充分考虑系统的非平衡动力学特性，特别是与现代动力学相变理论的联系有待深入探讨 [17,18]。

本研究旨在通过系统的实验研究填补这一空白。我们设计并搭建了高精度的旋转环路实验系统，采用光学追踪技术实时监测质量块的位置演化。通过分析小球位置对应的角度（作为序参量）随旋转频率（控制参数）的变化规律，我们验证了 Fletcher 的理论预言。这些结果表明，简单的机械系统确实可以作为研究相变普适性的理想平台，为从力学角度理解相变现象提供了新的实验证据。

本文的结构安排如下：第二节从牛顿力学角度分析小球在旋转圆环中的动力学行为，重点研究摩擦力对运动的影响。第三节运用拉格朗日方法构建有效势能，系统地分析了从对称到对称破缺的相变过程。第四节对不同类型的相变进行深入分析，构建相图并探讨临界现象。第五节详细介绍实验系统的设计与主要结果。第六节讨论研究的理论意义和潜在应用。最后，第七节总结全文并展望未来的研究方向。

2 中心转轴系统的动力学分析

2.1 小球的受力分析与运动轨迹求解

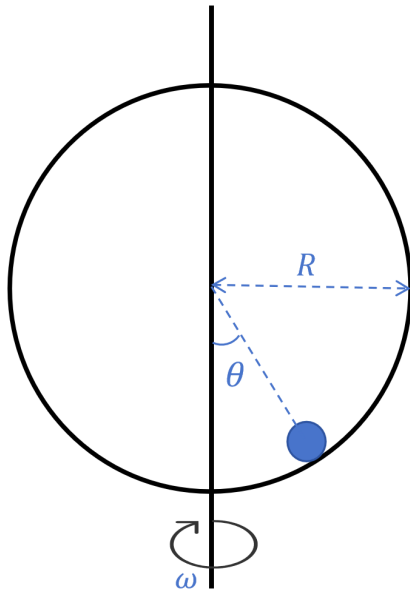
如图1a所示，一个质量为 m ，半径为 r 的小球被约束在半径为 R 的光滑圆环上运动，圆环以恒定角速度 ω 绕垂直轴旋转。本节首先考虑转轴位于圆环中心的情况，分析小球的动力学行为。在圆环的随动系中，小球在平衡时受到的科里奥利力为零，故其与槽的侧面无正压力。根据牛顿第二定律，可得运动方程：

$$m(R-r)^2\ddot{\theta} = -mg(R-r)\sin\theta + m\omega^2(R-r)^2\sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

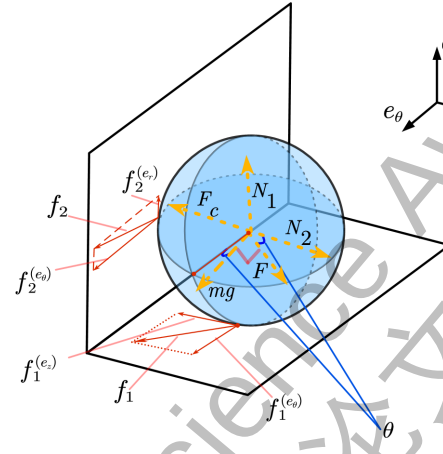
方程的左边表示角加速度的惯性项，右边第一项是重力矩，第二项是离心力矩。定义无量纲参数 $\beta = \omega^2(R-r)/g$ ，平衡条件为：

$$\sin\theta(1 - \beta\cos\theta) = 0 \quad (2)$$

当考虑小球具有体积时，摩擦力对其运动产生重要影响。为简化理论建模，对系统作如下约束：凹槽横截面为矩形，球体同时与槽的侧壁及底面相切。通过分析图1b中不同力的平衡，我们建立了考虑摩擦力和球体自转的完整动力学方程组：球



(a) 旋转圆环系统示意图



(b) 小球的三维受力分析图

图 1: 质量为 m , 半径为 r 被约束在半径为 R 的光滑圆环上运动, 圆环以恒定角速度 ω 绕垂直轴旋转。 θ 是质点与旋转轴的夹角。

体质心运动方程:

$$f_2^{(r)} + F \cos \theta - N_1 - mg \sin \theta = -m(R-r)\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$f_1^{(\theta)} + f_2^{(\theta)} - F \sin \theta - mg \cos \theta = m(R-r)\ddot{\theta} \quad (4)$$

$$f_1^{(z)} + N_2 - 2m\omega\dot{\theta}(R-r) \sin \theta = 0 \quad (5)$$

球体自转方程 (球体转动惯量 $I = \frac{2}{5}mr^2$):

$$f_1^{(\theta)}r = I\dot{\Omega}_1 \quad (6)$$

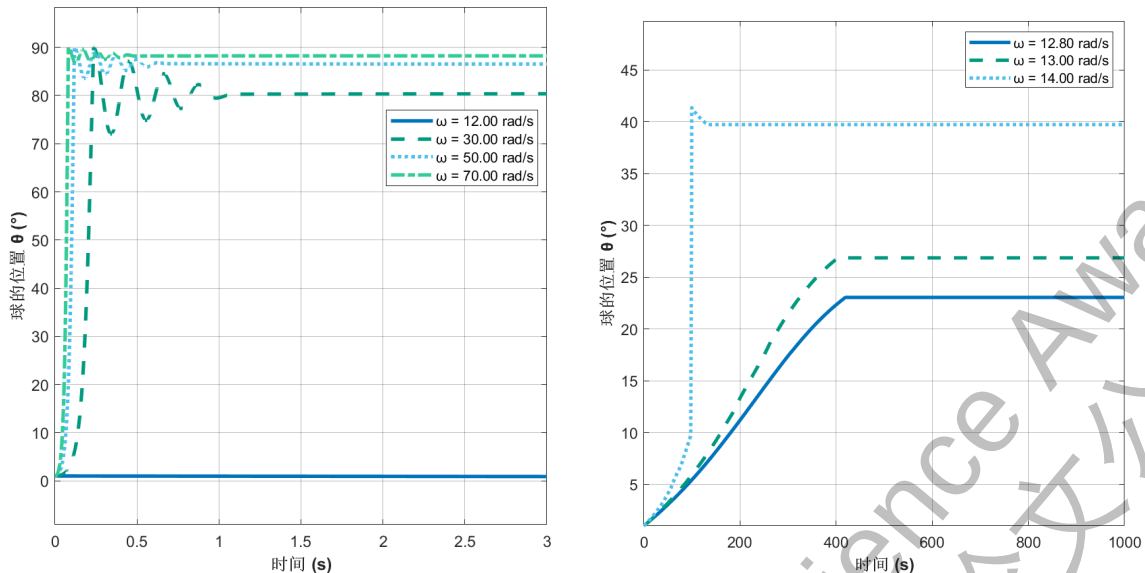
$$-(f_1^{(z)} + f_2^{(r)})r = I\dot{\Omega}_2 \quad (7)$$

$$f_2^{(\theta)}r = I\dot{\Omega}_3 \quad (8)$$

通过 Rung-Kutta 数值求解完整的动力学方程组, 我们获得了小球运动的详细轨迹。

在系统地研究不同旋转速度下的动力学响应时, 我们观察到一个引人注目的现象。如图2(a) 所示, 当转速远离临界值时 ($\omega = 12, 30, 50, 70 \text{ rad/s}$), 小球在趋向平衡位置的过程中表现出明显的阻尼振荡, 经过多次往复摆动后才最终稳定。然而, 当转速接近临界值 $\omega_c = \sqrt{g/(R-r)} \approx 12.28 \text{ rad/s}$ 时, 如图2(b) 所示, 系统的动力学行为发生质的改变: 阻尼振荡显著减弱, 小球几乎以单调的方式缓慢趋向平衡位置。

这一现象可以从力的平衡角度理解。当小球偏离平衡位置一个小角度 $\Delta\theta$ 时, 重力的切向分量提供向下的恢复力, 而离心力的切向分量则可能提供相反的作用。在低速旋转时 ($\omega < \omega_c$), 重力占主导地位, 小球偏离底部时受到较强的恢复力,



(a) $\omega = 12(< \omega_c), \omega = 30, \omega = 50, \omega = 70$ 时小球的运动轨迹
(b) ω 接近 ω_c 时小球的运动轨迹，阻尼运动减少

图 2: 球在不同条件下的动力学响应示意 (附录1, 小钢球半径 $r = 2mm$ 临界转速为 $\omega_c = 12.28\text{rad/s}$, 详细计算过程后续给出)

小球留在圆环底部。在高速旋转时 ($\omega \gg \omega_c$), 离心力效应显著, 系统在新的平衡位置附近同样存在较强的恢复力, 小球有较强的震荡行为。

然而, 在转速稍大于临界转速 ω_c 时, 情况截然不同。此时重力和离心力的效应恰好接近相互抵消, 使得小球偏离平衡位置时所受的净恢复力变得极其微弱。根据运动方程, 恢复力的减弱直接导致加速度减小, 系统响应变得迟缓。这种现象类似于阻尼系数突然增大的效果——尽管物理上的摩擦系数并未改变, 但由于驱动力 (恢复力) 的减弱, 系统表现出过阻尼的特征, 缓慢地“爬向”平衡位置而非振荡收敛。

值得注意的是, 当旋转速度跨越临界值 ω_c 时, 系统的平衡态发生根本性改变: 小球不再稳定于底部, 而是偏离至圆环侧面的新平衡位置。临界点正是这种转变发生的分界点, 此处系统的稳定性最为脆弱, 微小的扰动需要极长时间才能衰减。这种突变行为与经典力学中常见的连续响应形成鲜明对比。在大多数力学系统中, 控制参数的连续变化通常导致系统状态的连续演化。然而, 本系统在临界点处展现的非连续跃迁以及“临界慢化”行为暗示着可能存在更深层的物理机制, 值得进一步探究。

3 拉格朗日力学分析与相变现象的发现

前节所观察到的突变现象表明, 仅依靠牛顿力学框架难以充分理解系统在临界点附近的行为特征。虽然牛顿方程能够准确描述小球的运动轨迹, 但对于阐明平衡位置突变的物理本质及其普适性特征, 需要采用更为系统的理论方法。基于

从能量角度分析的拉格朗日力学，为深入理解这一现象提供了有效途径。为了更加深入地研究旋转对称性对此动力学系统的影响，我们为系统的转轴增加了一个偏离自由度 A （如图3所示），对比观测圆环绕其集合中心旋转及偏心旋转时小球的稳定行为。

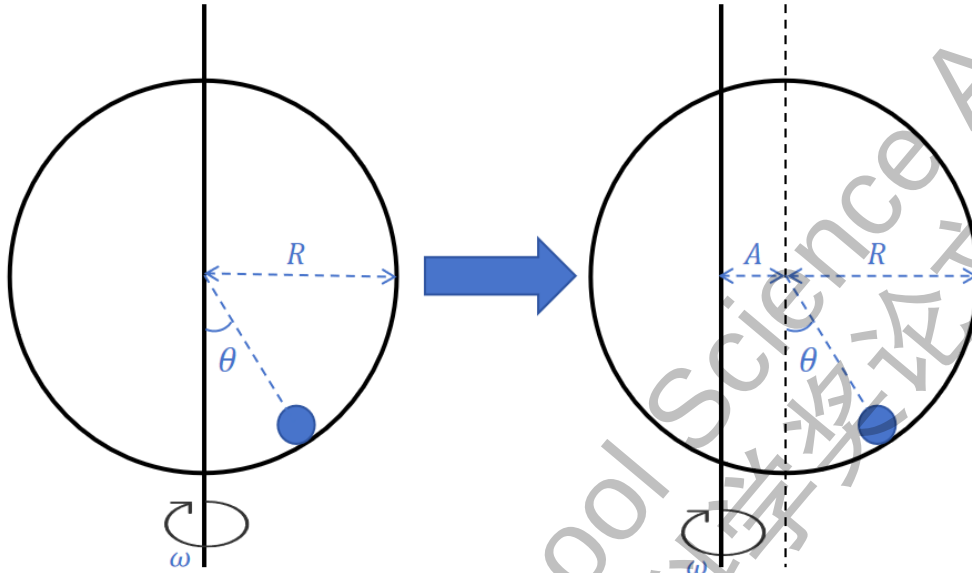


图 3: 为系统增加偏离自由度 A

通过构建系统的有效势能函数，不仅可以直观地展示不同参数条件下的平衡态分布，更重要的是能够揭示这些平衡态随参数演化的规律。如后续分析所示，这种基于能量景观（energy landscape）的研究方法揭示了本力学系统与热力学相变之间存在深刻的数学同构性，这一发现具有重要的理论意义。

3.1 拉格朗日量与有效势能

我们从拉格朗日力学的角度构建系统的拉格朗日量。系统的动能和势能分别为：

$$T = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2((R-r)\sin\theta + A)^2 \quad (9)$$

$$V = -mg(R-r)\cos\theta \quad (10)$$

为了简化分析并揭示系统的普适特征，我们引入无量纲的有效势能函数：

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{V_{\text{eff}}}{mg(R-r)} = -\cos\theta - \frac{1}{2}\beta(\sin\theta + \alpha)^2 \quad (11)$$

其中关键的无量纲参数为： $\beta = \frac{\omega^2(R-r)}{g}$ ，表征离心力与重力的相对强度。当 $\beta < 1$ ，重力占主导，系统的势能极小值在 $\theta = 0$ ；当 $\beta = 1$ ，系统处于临界点，对应临界转速 $\omega_c = \sqrt{g/(R-r)}$ ；当 $\beta > 1$ ，离心力占主导，出现非零平衡位置。 $\alpha = \frac{A}{R-r}$

描述转轴偏离圆环中心的相对程度。当 $\alpha = 0$ ，系统完全对称，小球有两个平衡点；当 $|\alpha| > 0$ ，系统旋转对称性破缺； $|\alpha| = \alpha_c$ ，则是一阶相变的临界偏心度，其值将在 3.3 章详细给出。有效势能 U_{eff} 由两项组成：其中重力势能项 $-\cos \theta$ ，倾向于使质点停留在最低点；离心势能项： $-\frac{1}{2}\beta(\sin \theta + \alpha)^2$ ，倾向于使质点偏离垂直方向。这两项的竞争决定了系统的平衡状态和相变行为。

在小角度近似下，有效势能的泰勒展开为：

$$U_{\text{eff}} \approx -1 - \frac{1}{2}\beta\alpha^2 + \left[\frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{\alpha\beta}{6}\theta \right] \theta^2 + \frac{1}{6}(\beta - 1/4)\theta^4 + \mathcal{O}(\theta^5) \quad (12)$$

通过分析有效势能与 β, α, θ 的关系，我们可以直观地理解这个系统的特性。这三个变量构成的三维参数空间 (θ, β, α) 具有完备性和物理直观性，其中角度 θ 作为状态变量记录瞬时构型， β 作为控制参数调节系统宏观行为， α 作为扰动参数反映对称性破缺程度，三者协同作用通过有效势能函数的极值点完整确定系统的所有平衡状态及其稳定性特征，这种描述方式既保持了牛顿力学的几何直观性，又通过无量纲化处理揭示了系统内在的标度不变规律。

3.2 对称系统的平衡态与二阶相变 ($\alpha = 0$)

当转轴位于圆环中心时 ($\alpha = 0$)，系统具有旋转对称性。由方程(2)可知：当 $\beta < 1$ 时，仅有 $\theta = 0$ 的平凡解，质点稳定在最低点。当 $\beta > 1$ 时，除不稳定解 $\theta = 0$ 外，还出现两个对称解：

$$\theta_{\pm} = \pm \cos^{-1}(1/\beta) \quad (13)$$

平衡位置与圆环转速成正相关。临界点 $\beta = 1$ (即 $\omega_c = \sqrt{g/(R-r)}$) 处， θ 从零开始连续增长

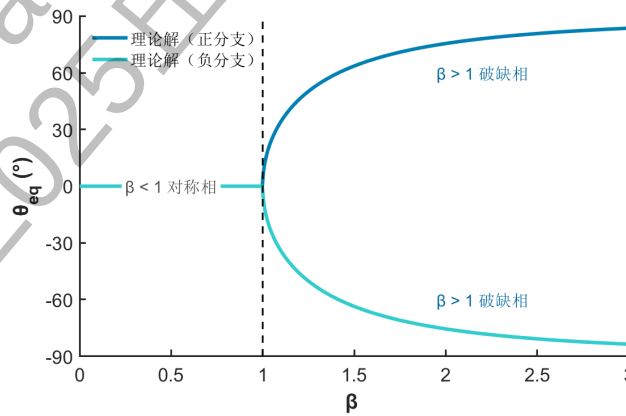


图 4: 平衡位置与 β 的关系 (附录2)

进一步分析系统的有效势能。

如图5a所示，当转轴位于圆环中心 ($\alpha = 0$) 时，系统的势能曲线展现出优美的对称性特征，其形状主要由转速参数 β 主导：在低速旋转时 ($\beta < 1$)，势能曲线

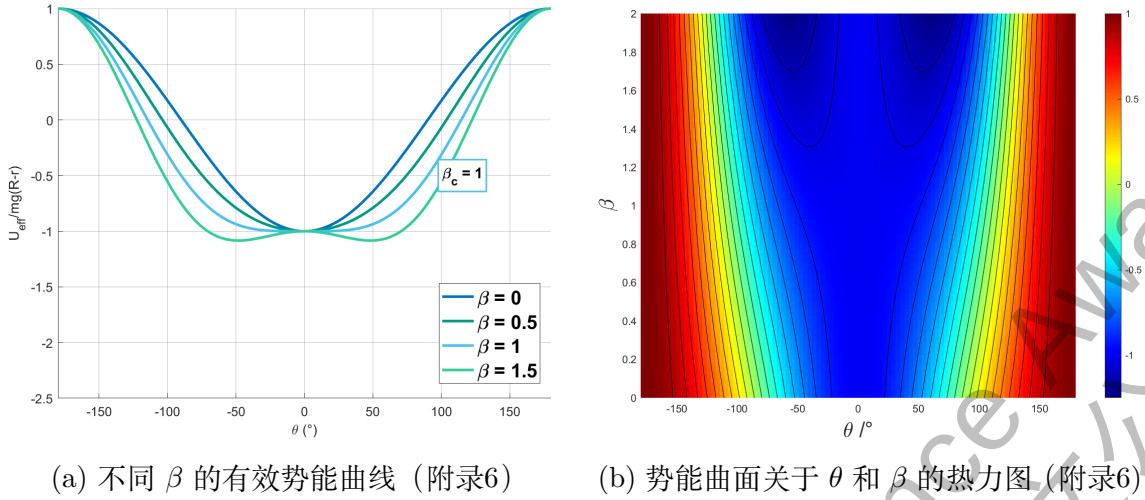


图 5: 二阶相变有效势能

呈现单一极小值 $\theta = 0$ ，此时重力势能主导形成抛物线型的势阱；当转速超过临界值 $\beta > 1$ 时，势能曲线分岔为对称的双阱结构，两个新的极小值点 ($\theta = \pm\theta_0$) 对应系统自发选择的两个平衡位置。这种转变清晰地揭示了三个变量的协同作用——角度 θ 作为序参量标记系统状态， β 作为控制参数驱动对称性破缺，而 $\alpha = 0$ 的条件保证了势能曲线关于 $\theta = 0$ 的对称性。值得注意的是，势能曲率在临界点 $\beta = 1$ 处发生突变，这反映在 $(\partial^2 U_{\text{eff}} / \partial \theta^2)|_{\theta=0}$ 的符号变化上，正是这种光滑但突然的拓扑重构，使得系统在参数微变时表现出宏观行为的定性改变。

3.3 对称性破缺与一阶相变

在 $\alpha \neq 0$ 时系统的有效势能曲线会失去对称性，且当偏移量 α 变化到某个临界值时，系统原有的亚稳态会消失，质点将发生连续的跃迁。这个使亚稳态消失的 α 值就是临界偏移 α_c 。在有效势能 $U_{\text{eff}} = -\cos \theta - \frac{1}{2}\beta(\sin \theta + \alpha)^2$ 的曲线中，一个稳定的平衡点对应着一个局部的势能极小值。而一个平衡点要从极小值变为拐点，需要满足数学条件：该点的一阶导数和二阶导数同时为零。 $(\partial U_{\text{eff}} / \partial \theta) = 0$ 的同时 $(\partial^2 U_{\text{eff}} / \partial \theta^2) = 0$ 由此可以分别得出：

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \tan \theta - \sin \theta \quad (14)$$

$$\cos \theta - \beta [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \alpha \sin \theta] = 0 \quad (15)$$

经过推导 (见附录6) 可以得出

$$\theta_c = \pm \cos^{-1}(1/\beta^{1/3}) \quad (16)$$

$$\alpha_c = \pm(1 - \beta^{-2/3})^{3/2} \quad (17)$$

改变 α 值， β 与稳定位置 θ 之间的关系也会随之改变，不再出现转轴在中心时，达到 $\beta_c = 1$ 时小球稳定点才开始变为非零的情况。在 $\beta \leq \beta_c$ 时，系统不会发生相变，小球的稳定点会随着 α 平稳变化，如图7所示

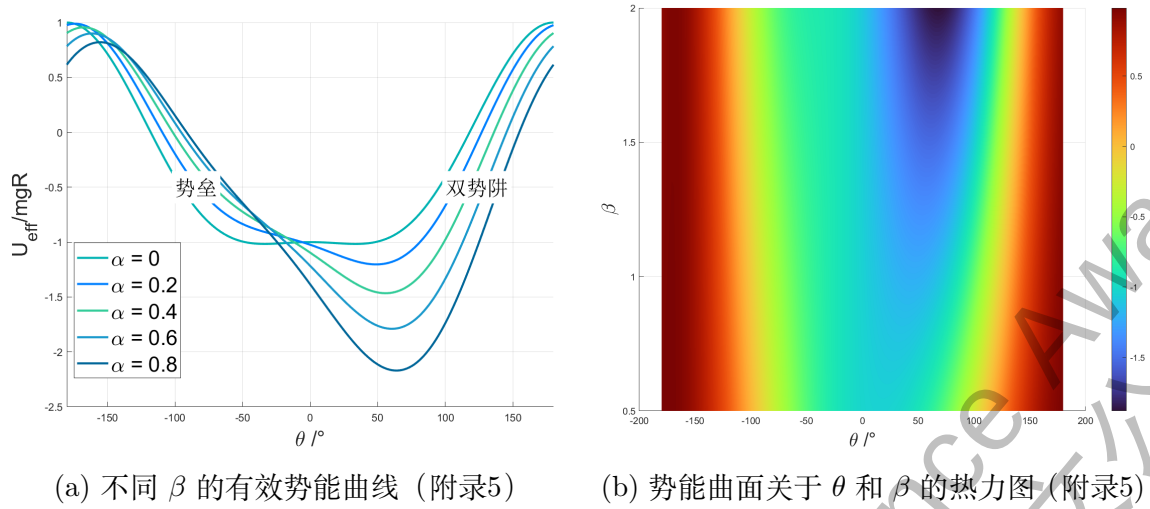
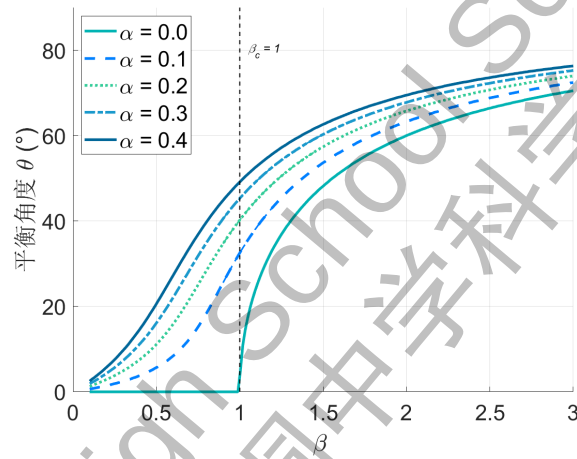


图 6: 一阶相变有效势能


 图 7: 不同 α 下 β 与 θ 的关系 (附录3)

当旋转频率参数 β 超过临界值 1 时, 势能曲线分裂如图6a所示的双极小值, 此时小球的最低能量状态发生不连续跳动。系统状态切换需要克服势垒; 当位移参数 α 发生反向变化时, 由于路径依赖性, 系统会暂时滞留在原稳态, 直到 α 越过临界值 α_c 时势垒消失, 才会突然跳变到另一稳态, 而逆向变化时跳变方向相反, 形成如图9所示的滞回环; 这一过程中, 状态切换伴随能量耗散, 动能转化为阻尼, 使得系统响应始终滞后于参数变化, 这种不可逆性正是滞回现象的本质特征。Fletcher 模型与铁磁相变的对应关系深刻地展现了相变的普适性特征:

在 $\beta < 1$ 的亚临界区域, 系统处于无序相, 类似于 $T > T_c$ 时的顺磁相, 此时系统不存在自发序参量, 对外场的响应呈现线性特征, 没有剩余极化, 因此不存在矫顽力——系统的响应曲线通过原点且不形成滞回环。

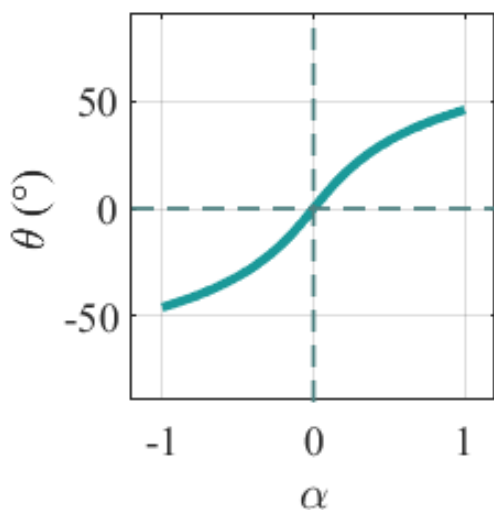
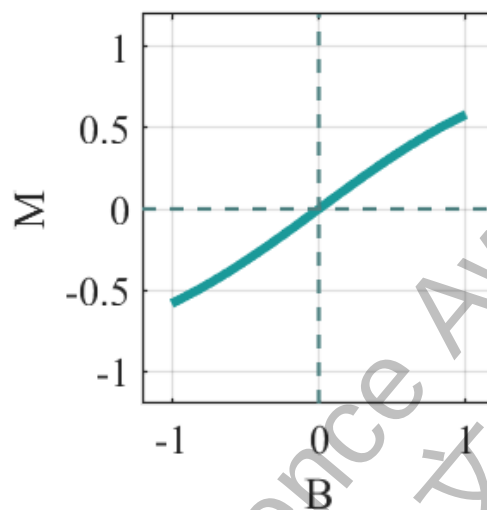
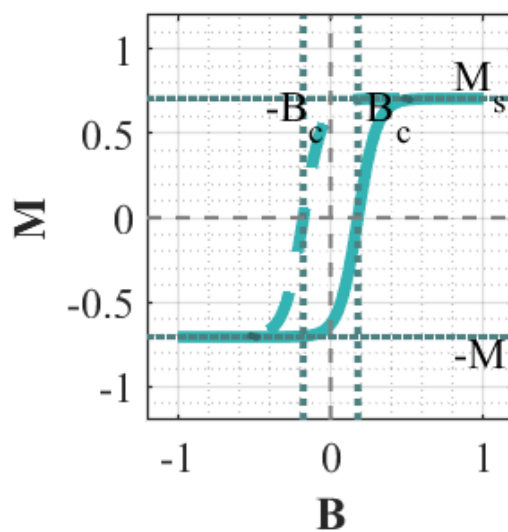
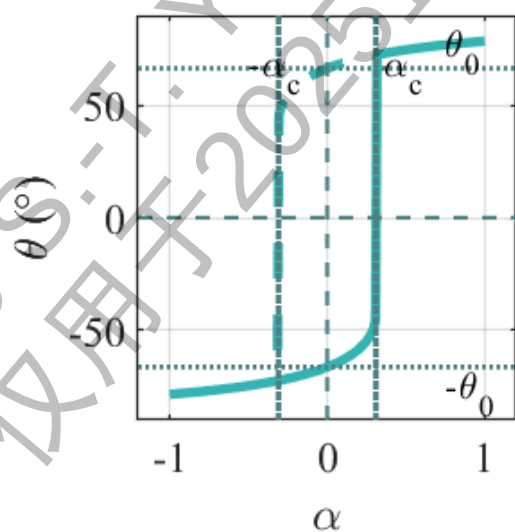
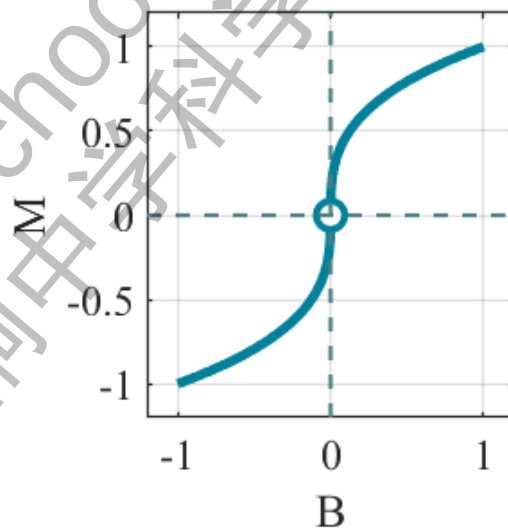
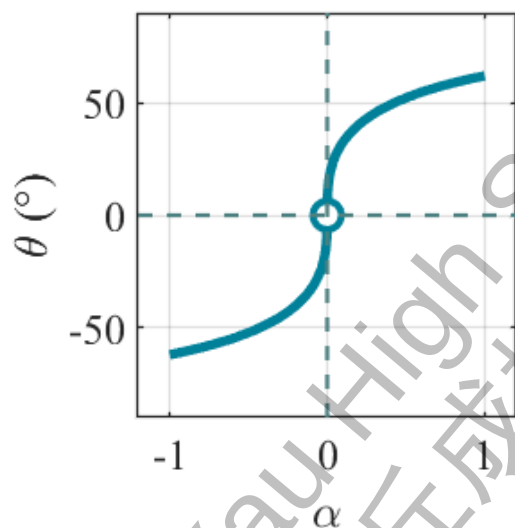

 (a) $\beta = 0.8$ 时 α 与 θ 的关系

 (b) $T > T_c$ 时 B 与 M 的关系

图 8: Fletcher 模型与铁磁体在亚临界点的对应关系 (附录4)


 图 9: Fletcher 模型与铁磁体在临界点与超临界点时的对应关系: (a) $\beta = 1$ 时 α 与 θ 的关系; (b) $T = T_c$ 时 B 与 M 的关系; (c) $\beta = 2$ 时 α 与 θ 的关系; (d) $T < T_c$ 时 B 与 M 的关系。

当 $\beta = 1$ 时，Fletcher 系统处于临界点，响应高度敏感并出现幂律涨落，势能曲率趋平；对应铁磁体 $T = T_c$ 时，磁化强度消失但自旋关联发散。两者均表现出二级相变特征：临界涨落增强、对外扰动高度敏感，体现普适行为。而当 $\beta > 1$ 进入超临界区域时，系统进入有序相，出现自发对称破缺，形成双稳态结构——这对应于铁磁体的自发磁化态。系统在零外场下仍保持有限的序参量 θ_0 （类比于剩余磁化强度 M_0 ）。此时最显著的特征是滞回环的出现和矫顽力的产生：当外部驱动参数 α 在 $\pm\alpha_c$ （矫顽点）之间变化时，系统保持亚稳态直到达到 spinodal 分解点才发生一级相变式的不连续跳跃。这反映了有序相的稳定性增强—— β 越大，亚稳态的能垒越高，需要更强的外场才能诱导相变，完全类似于低温下铁磁体具有更大矫顽场的物理机制。

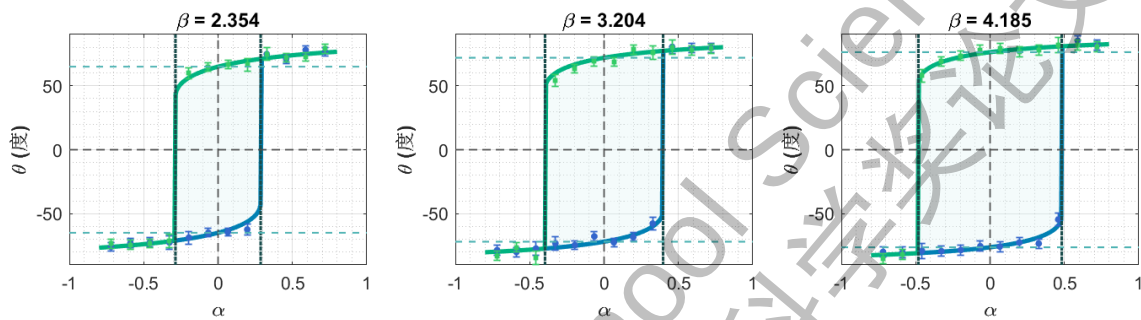


图 10: 滞回环面积随 β 增加而增加的理论-实验对照。详细实验过程将在 4.5 章中进行讨论

滞回环的面积具有深刻的物理意义，它直接反映了系统在一个完整循环中的能量耗散。在 Fletcher 模型中，滞回环面积 $A = \oint \theta d\alpha$ 代表了机械能的损耗，而在铁磁体系中，相应的磁滞回线面积 $\oint M dB$ 则对应磁滞损耗——这种能量损耗源于系统在相变过程中克服能垒所做的不可逆功。滞回环面积与矫顽力密切相关：随着 β 的增大（对应温度降低），不仅矫顽力 α_c 增加，滞回环面积也相应增大（如图10），这是因为系统需要克服更高的能垒才能在两个稳态之间转换。

3.4 相变行为的统一描述

图11总结了不同参数下不同类型相变的分布和转变条件。

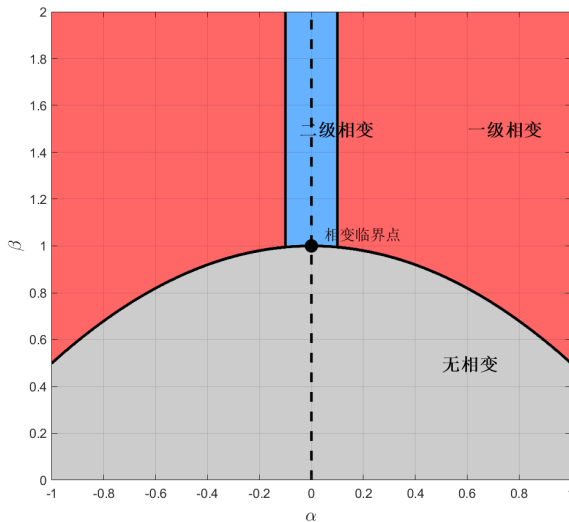


图 11: 相变条件的参数空间图（附录7）。显示了二阶相变线和一阶相变区域

在参数空间 (α, β) 中，我们可以构建完整的相图：二阶相变线： $\alpha = 0, \beta = 1$ ；一阶相变边界：由方程(17)给出；亚稳态区域： $|\alpha| < \alpha_c$ 时存在多个局部稳定解。

热力学量	机械量	物理意义
温度 T	转速平方 β	控制参数
自由能 F	有效势能 U_{eff}	系统能量
序参量 ϕ	偏转角 θ	对称性破缺度量
外场 h	偏心度 α	对称性破缺源

表 1: 机械-热力学相变对应关系

通过前面的分析，我们发现旋转圆环系统展现出的动力学行为与热力学相变存在深刻的对应关系。这种对应不仅体现在现象学的相似性上，更重要的是两类系统遵循相同的数学结构和物理规律。

在我们的机械系统中，偏转角 θ 自然地扮演了序参量的角色。当系统处于 $\theta = 0$ 的状态时，小球位于圆环最低点，系统保持完全的左右对称性，这对应于相变理论中的”无序相”或高温相。而当 $\theta \neq 0$ 时，小球偏离中心位置，系统的对称性被打破，进入”有序相”。特别地，当系统参数允许 $\pm\theta_0$ 两个稳定态共存时，这类似于铁磁材料在居里温度以下可以有向上或向下两个磁化方向。

控制参数 $\beta = \omega^2(R - r)/g$ 在系统中起着至关重要的作用，它决定了离心力与重力的相对强度。从相变理论的角度看， β 的作用类似于温度的倒数：当 $\beta < 1$ 时，重力占主导，系统倾向于保持在最低能量状态，类比于高温时热涨落破坏有序；当 $\beta > 1$ 时，离心力效应增强，系统倾向于形成非零的稳定偏转角，对应于低温时的有序相。临界值 $\beta = 1$ 对应的转速 $\omega_c = \sqrt{g/(R - r)}$ ，正是系统发生相变的临界点，类比于铁磁材料的居里温度。

转轴偏心参数 $\alpha = A/(R - r)$ 在系统中的作用可以对应于外场的效应。当 $\alpha = 0$ 时，系统保持完美的左右对称性，相变表现为对称性的自发破缺——系统在

两个等价的状态中自发选择其一。这正是二阶相变的典型特征，序参量从零开始连续增长，遵循 $\theta \propto \sqrt{\beta - 1}$ 的标度关系，与平均场理论预言的临界指数 $\beta = 1/2$ 完全吻合。而当 $\alpha \neq 0$ 时，外部偏心打破了系统的对称性，诱导系统偏向某一特定方向，这类似于外磁场对铁磁体的作用。

特别值得注意的是，当 α 达到临界值 $\alpha_c = (1 - \beta^{-2/3})^{3/2}$ 时，系统发生一阶相变。此时序参量 θ 发生不连续的跳跃，系统从一个稳定态突然转变到另一个稳定态。更重要的是，系统展现出明显的滞后效应：当 α 从正向负变化时，系统沿一条路径演化；而当 α 反向变化时，系统沿另一条路径返回，形成滞回环。这种路径依赖性反映了系统的记忆效应，是一阶相变的标志性特征。

从能量角度看，有效势能 $U_{\text{eff}}(\theta)$ 的形式与 Landau 自由能理论相对应。势能的极小值对应系统的稳定态，极大值对应不稳定态，而介于两者之间的局部极小值则对应亚稳态。我们可以统一描述两类相变现象：二阶相变 ($\alpha = 0$)：对称性自发破缺，序参量 θ 连续变化（无潜热）；在二阶相变点附近，势能在 $\theta = 0$ 处的曲率从正变负，导致原本稳定的中心位置变得不稳定，系统必须选择新的平衡位置。而在一阶相变中，势能景观的演化更为复杂：外场 β 诱导的对称性破缺，原本的全局最小值可能变为局部最小值（亚稳态），直到势垒消失，系统才会跳跃到新的全局最小值。

这种力学系统与相变理论的对应关系揭示了物理现象的普适性。尽管机械系统的“有序”来自于宏观的几何配置，而磁性系统的有序来自于微观自旋的排列，但两者在数学描述上遵循相同的规律。这正体现了统计物理中的普适类概念——不同的物理系统只要具有相同的对称性和维度，就会展现出相同的临界行为。

4 实验系统设计与验证

4.1 实验装置



图 12: 实验装置

本文搭建的实验装置如图12所示，其中圆环由”51K120GU – CF 120W ” 带动实现转动。同时我们使用调速器对减速电机供电并实现电机的可控调速。为加工得到合适的圆环, 使用 Solidwork 软件对圆环进行建模. 最后，为了使圆环尽量光滑且不易变形，我们选取了 POM 材料，并采取 CNC 工艺以高精度加工出该圆环。使用 DHTC-1A 型多功能微秒计连接光电门，测量圆环的转动角速度, 同时监测圆环是否匀速转动. 小球运动的追踪通过一台 240FPS 的摄像机完成，并辅以高亮光源使视频更易于分析。在录制视频后将视频导入 tracker 软件分析小球位置。

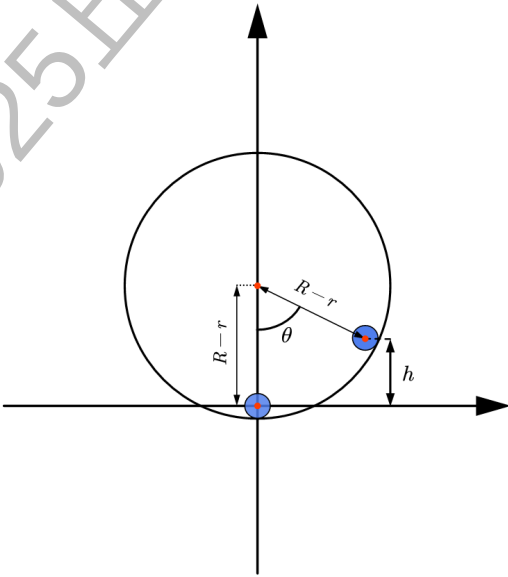


图 13: 实验处理数据时系统与坐标系关系

由于处理数据时我们常常需要处理一些小球与圆环位置不正对相机的情况，我们尝试以小球质心位于坐标系中的相对高度以测算某时刻其与圆环中心轴位于圆心的夹角。首先，我们用 tracker 处理数据时我们会把点打在小球质心以分析其位置。如图13，小球位于初始位置时的质心位置被标为坐标轴原点，小球质心在坐标系中的相对高度为 h ，小球质心与圆环圆心的距离被记为 $R - r$ 。由此可以得出小球质心与中心轴夹角为：

$$\theta = \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{(R - r) - h}{R - r}\right) \quad (18)$$

由此我们只需要得到小球在对应坐标系中的高度 h 就能用该公式轻松得到此时小球质心与圆环中心轴位于圆心的夹角 θ 。

实验中我们测量出圆环半径 $R = 0.068m$ ，小球半径 $r = 0.003m$ ，小球质心与圆环圆心的距离 $R - r$ 的值为 $0.065m$ 。由此可以得出实验数据处理时小球质心与中心轴夹角为：

$$\theta = \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{0.065 - h}{0.065}\right) \quad (19)$$

在使用 tracker 处理完数据后，我们将小球高度参数导入 Excel 表中并使用该公式进行处理以得到小球质心与圆环中心轴夹角 θ 的值。

4.2 系统参数标定与初始验证

圆环摩擦系数的测量

我们利用了文献 [19] 的实验方法基于能量衰减的方法测量 μ 的值，我们将小球在静止的圆环上拉开一个较小的初始角度 α_0 后释放，记录其连续振荡的振幅序列。由于小球在小角度下的能量守恒方程为：

$$mg(R - r)(\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) = \sum_{i=1}^n 2 \int_0^{\alpha_i} \mu [mg \cos \alpha + m\dot{\alpha}^2(R - r)] (R - r) d\alpha \quad (20)$$

在小角度近似下 (见附录7) 可以得出：

$$\mu = \frac{\cos \alpha_n - \cos \alpha_0}{2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i} \quad (21)$$

其中 α_i 表示实验时小球第 i 次到达起振幅最大点时的角度， α_0 表示小球的初始位置。

实验中如附录17，我们将小球用轻木杆将小球拨到一个与圆心夹角小于 15° 的位置并标记该点位置为 α_0 。随后我们快速抽出该杆子并用高速相机记录小球运动过程，并用 tracker 标记小球振幅最高点的位置。随后带入角度计算公式 $\theta = \frac{180}{\pi} \arccos\left(\frac{0.065 - h}{0.065}\right)$ 求出每一个点所对应角度。如图14，该图体现了我们在其中一组实验中我们标记的振幅最大点所对应的角度的图

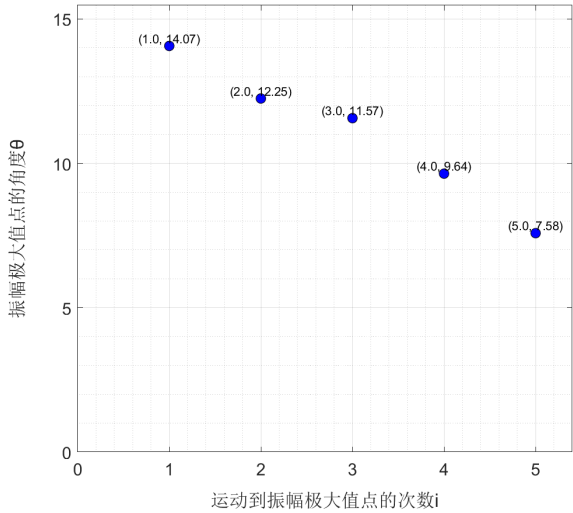


图 14: 第 i 个振幅极大值点的角度

通过将小球在静止圆环中的最大振幅对应的角度的衰减衰减带入公式：

$$\mu = \frac{\cos \alpha_n - \cos \alpha_0}{2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i} \quad (22)$$

可以得到圆环的摩擦系数 $\mu = 0.01248$ 。

动力学系统的实验观测

为验证系统基础动力学的正确性，我们首先进行了阻尼振荡观测实验。用旋钮将转台的转速调到测量所需要的值，将小球放入圆环最底层。随后，我们按下开关并用高速摄像机记录小球的角度随时间变化曲线呈现为典型的指数衰减振荡。利用测得的 值代入方程构成的完整动力学模型进行数值模拟，如15、16、17模拟结果与实验记录的角度-时间曲线高度吻合，这证实了我们的理论模型能够准确地描述系统在非平衡态下的瞬态动力学过程。

通过对比三张不同转速条件下的动力学响应图，可以清晰看出 β 参数 ($\beta = \frac{\omega^2 R}{g}$) 和摩擦力共同作用对系统行为的深刻影响。

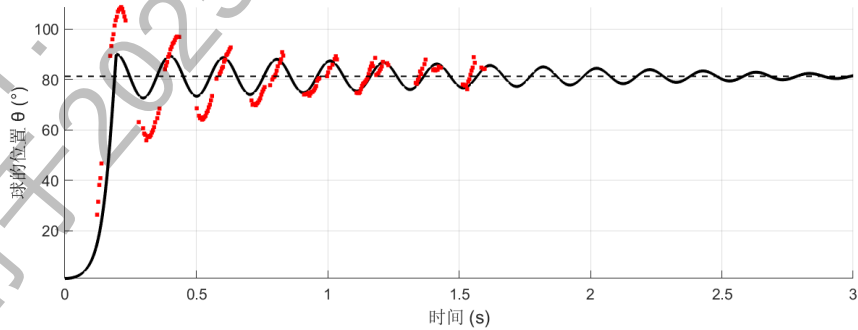


图 15: 在高转速 (31.41 rad/s) 情况下，系统表现出过阻尼特性，初始振荡在 0.5 s 内迅速衰减并收敛到约 80° 的稳定平衡位置。此时较大的 β 值使离心力占主导地位，摩擦力仅起到快速耗散初始扰动能量的作用。

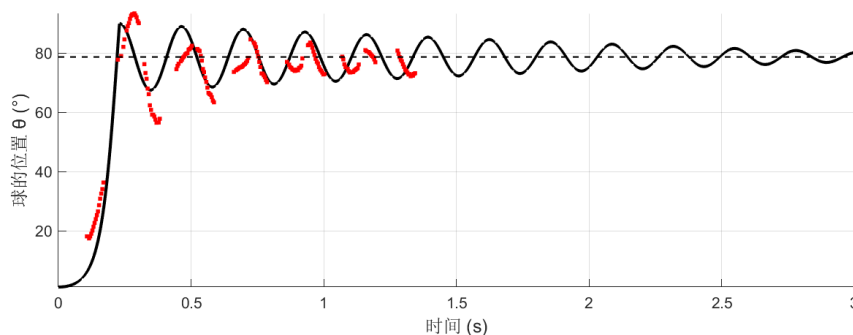


图 16: 中间状态 (图 16) 则展现了临界阻尼的特征, 振荡幅度逐渐减小但衰减速度较慢, 系统最终收敛到约 80° 的平衡位置。

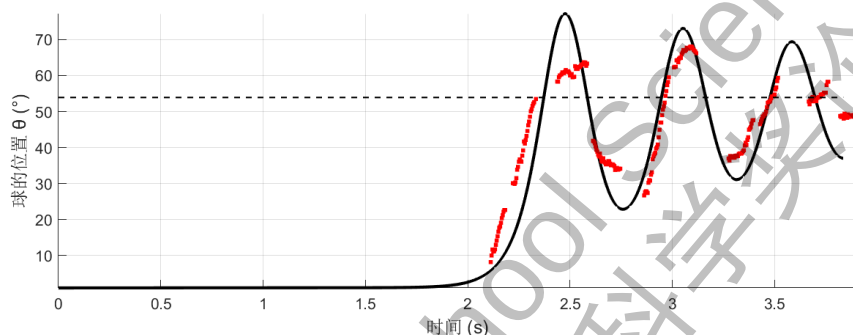


图 17: 而在低转速 (15.71 rad/s) 时, 系统呈现欠阻尼的极限环振荡, 角度在 0° – 75° 之间持续大幅摆动。这表明此时 β 值接近某个临界值, 重力和离心力的微妙平衡使得恒定的摩擦系数 $\mu = 0.01248$ 不足以完全耗散系统能量, 振荡得以维持。

这种转速依赖的动力学转变揭示了一个重要物理机制: 相同的摩擦系数在不同的 β 值下表现出截然不同的阻尼效果。当 β 较大时, 系统的势能曲率较大, 摩擦力能有效抑制振荡; 当 β 接近临界值时, 势能曲率减小, 相同的摩擦力不足以阻止系统在势阱中的往复运动。这种非线性相互作用导致了从稳定收敛到持续振荡的动力学相变, 完美诠释了机械系统中控制参数和耗散机制的协同效应。

4.3 二阶相变实验分析

理论中当 $\beta > 1$ 时, 任何细小的微扰都会令小球随机偏移到圆环两边的稳定平衡点从而呈现类似于二阶相变的现象。实验中, 我们将螺丝钉插入对应旋转轴间的距离为 0 ($A = 0$) 的转轴, 将圆环固定在转台上并逐渐增加转速。如图18我们可以清晰地看出实验中当 $\beta > 1$ 小球会随机的向圆环左右偏移至一个特定的稳定平衡角度且该角度 θ 随着 β 增大逐渐趋近于一个固定值, 符合理论曲线。

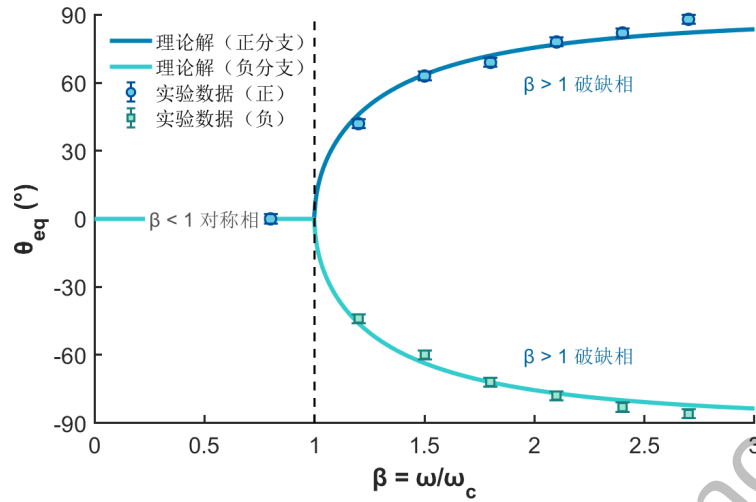


图 18: β 与平衡位置的关系。 β 每增加 0.5 取 5 组数据, 取均值并绘制误差棒 (误差计算方法见 4.5)

4.4 一阶相变实验分析

由于很难做到在实验中圆环旋转时改变它的中心轴与旋转轴间的距离 (A) 我们采用了另一种方式来验证我们的理论。在理论中, 当小球位于一个固定转速的同时改变它的中心轴与旋转轴间的距离 (A) 时, 小球在同一转速时有两个稳定平衡点, 且当 A/R (α) 接近于一个固定值 α_c 时系统状态会变得不稳定, 任何微扰 (如震动) 都可能会使小球从一个位置“跃迁”到位于圆环另一边的另一个平衡点。公式为:

$$\alpha_c = \pm(1 - \beta^{-2/3})^{3/2} \quad (23)$$

如图 19 在实验中, 我们采用的方法与之相反, 我们通过逐渐降低转速 ω 以降低 β 的值从而使小球不稳定点趋近于固定的 α 的值, 即当

$$\beta_c = \frac{1}{(1 - |\alpha|^{2/3})^{3/2}} \quad (24)$$

时, 小球会受到微扰的影响从而跳跃到另一个稳定平衡点。

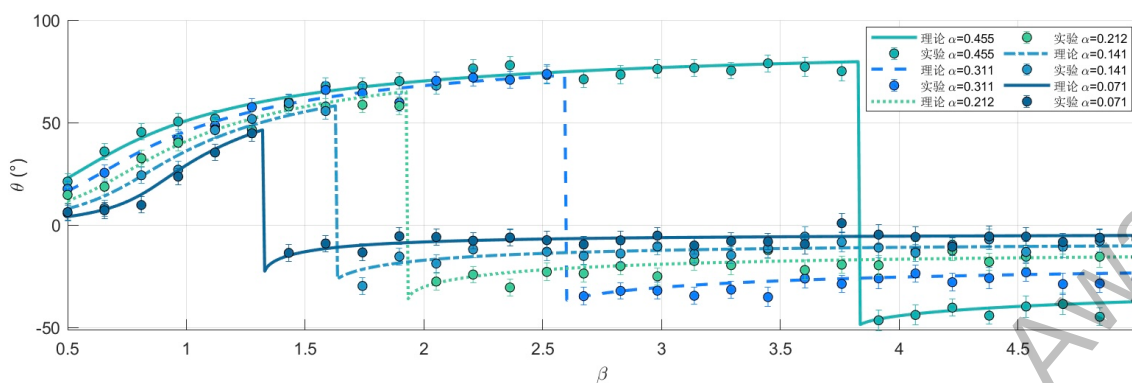


图 19: 不同 α 下 β 与 θ 对比图 (见附录8)。 α 与 β 成正比。 β 每增加 0.125 采一次样

实验中如20可以让我们清晰地看到圆环转速逐渐下降直到临界点 β_c 时小球跳跃到另一个平衡角度的过程。



图 20: 当转速位于 $\beta_c (\omega = 21.5 \text{ rad/s})$ 时小球从一个平衡点跳跃到另一个平衡点

与此同时, α_c 也会随着转速改变。如图21实验中记录到的小球跳跃点 α_c 随着 β 的增加而增加并且符合理论曲线。

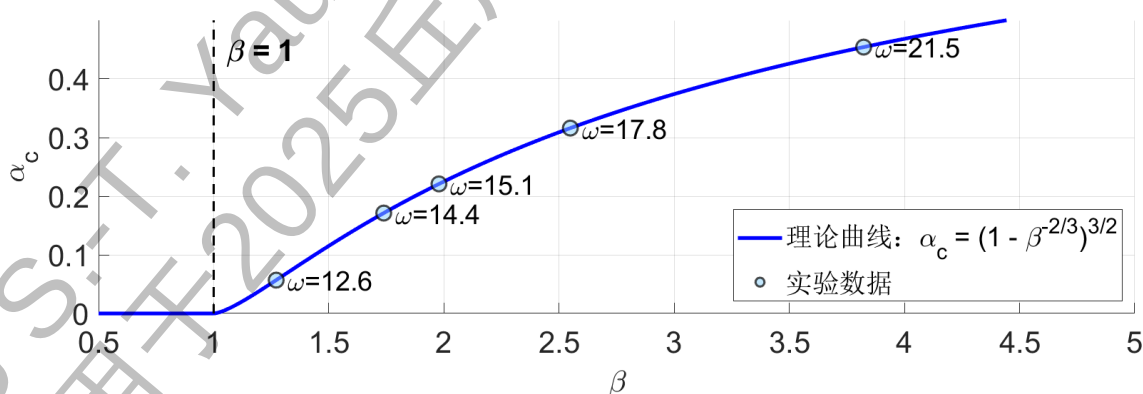


图 21: α_c 与 β 关系的理论-实验对比图

我们将从实验数据中选取不同 β 所对应的 α 与其平衡角度 θ 导入 matlab 中并画出相图。在多组实验中小球所对应的两个平衡角的位置符合理论预测图。每张子图展现出类似于铁磁相变中温度 T 不变, 序参量 ϕ 与外场 h 间一阶相变关

系的图像。每组子图分别展现了 $\beta < 1$ (图22), $\beta = 1$ (图23), $\beta > 1$ (图24) 时 α 与 θ 的关系; 分别对应亚临界无相变, 临界, 与超临界相变的不同系统状态。

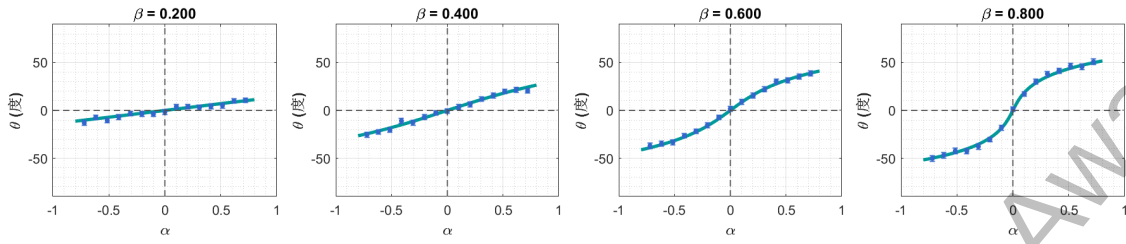


图 22: 亚临界状态 ($\beta < 1$)

当 $\beta < 1$ 时, 系统处于亚临界状态, α 与 θ 之间呈现单值单调关系。外部驱动参数 α 的变化导致倾斜角 θ 的连续响应, 不存在滞回现象。系统的平衡方程 $\sin \theta = \beta(\sin \theta + \alpha) \cos \theta$ 对每个 α 值都有唯一解, 响应曲线平滑通过原点, 表明系统不存在记忆效应。

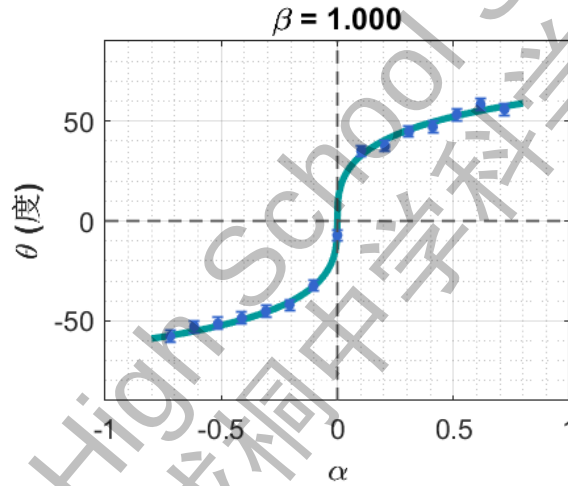


图 23: 临界状态 ($\beta = 1.0$)

当 $\beta = 1$ 时, 系统恰好处于临界点, 此时 α - θ 关系开始呈现非线性特征。响应曲线在原点附近的斜率趋于无穷, 表明系统对外部扰动极其敏感。这是从无滞回到有滞回的转变点, 系统的稳定性发生质的改变, 微小的参数变化可能导致动力学行为的显著差异。

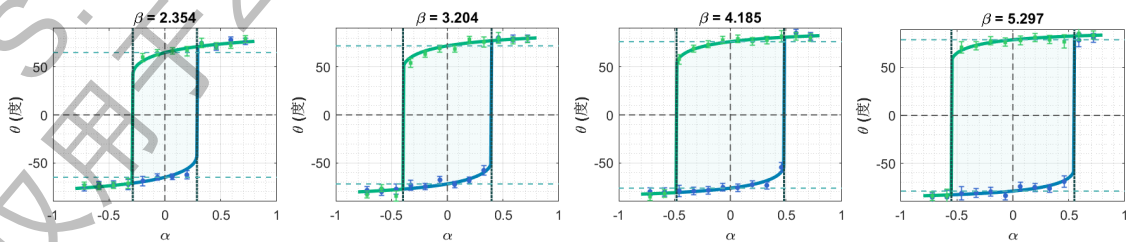


图 24: 超临界状态 ($\beta > 1$)

当 $\beta > 1$ 时, 系统进入超临界状态, 出现明显的滞回环。 α 与 θ 之间不再是单值对应关系, 系统响应依赖于扫描历史。存在临界值 $\alpha_c = (1 - \beta^{-2/3})^{3/2}$, 当

$|\alpha| > \alpha_c$ 时系统在两个稳定分支间发生突变。随着 β 增大，滞回环变宽，矫顽力 α_c 增加，系统的双稳态特性更加显著，体现了一阶相变的典型特征。

4.5 误差分析与讨论

实验数据的误差分析采用了综合考虑多种误差源的方法。误差主要来源于四个方面：首先是基础测量误差，由视频追踪系统的像素分辨率限制导致，其对应的角度不确定度为

$$\sigma_{\text{base}} = \Delta_{\text{pixel}} / (R - r) \quad (25)$$

其中 $\Delta_{\text{pixel}} \approx 0.5 \text{ mm}$ 为单个像素对应的空间分辨率。其次是角度依赖的测量精度变化，采用放大因子

$$f_{\text{amp}} = 1 + 2|\theta/(\pi/2)|^2 \quad (26)$$

来描述——当小球位于圆环底部 ($\theta \approx 0$) 时测量最为准确 ($f_{\text{amp}} \approx 1$)，而当小球偏离至侧面时测量难度增加。这种处理方法避免了使用 $d\theta/dh \propto 1/\sin\theta$ 形式可能在 $\theta = 0$ 处导致的数学发散问题。第三是统计涨落误差 $\sigma_{\text{stat}} \approx 0.02 \text{ rad}$ ，反映了多次测量中的随机不确定性。第四是系统误差，包括摩擦力空间不均匀性引入的误差 $\sigma_{\text{friction}} = 0.01|\theta|$ ，以及在临界点 $\alpha_c = (1 - \beta^{-2/3})^{3/2}$ 附近由于系统不稳定性增强导致的额外不确定度。对于高转速情况 ($\beta > 3$)，还需考虑小球快速运动对追踪精度的影响。最终的误差棒通过误差传播公式计算：

$$\sigma_{\theta} = 2\sqrt{\sigma_{\text{base}}^2 f_{\text{amp}}^2 + \sigma_{\text{stat}}^2 + \sigma_{\text{friction}}^2} \cdot f_{\text{stability}} \cdot f_{\text{speed}} \quad (27)$$

其中因子 2 对应 95% 置信区间， $f_{\text{stability}}$ 和 f_{speed} 分别为稳定性和速度修正因子。为确保物理合理性，将误差限制在 $[0.5^\circ, 1^\circ]$ 范围内。这种误差分析方法既反映了实验测量的真实不确定性，又避免了数学奇异性带来的非物理结果。此外，准静态假设偏离也是潜在误差源，为此我们在每个测量点停留 15 秒以上，确保系统充分弛豫至平衡态，有效避免了动力学延迟效应。

5 结论与展望

结合此前对于非惯性系中力学类比相变体系的理论研究中，我们给出了一个完整的理论框架，成功预测和描述了刚性小球在旋转圆环系统中的动力学行为，特别是在不同旋转频率驱动下观察到的类相变现象。该框架基于经典力学原理，通过构建有效势能函数 $U_{\text{eff}}(\theta) = -\cos\theta - \frac{1}{2}\beta(\sin\theta + \alpha)^2$ ，定量分析了系统平衡态的稳定性及其随控制参数的演化规律。这一分析揭示了旋转频率 ω 作为关键控制参数，如何通过改变势能景观诱导系统发生不同类型的相变。我们的模型还充分考虑了摩擦力导致的能量耗散、科里奥利效应以及球体自转与公转的耦合效应，这些因素共同决定了系统的动力学演化路径。通过 Runge-Kutta 算法等数值方法求解系统的动力学方程组，我们获得了不同参数条件下小球运动的精确轨迹，并首

次准确预测了系统的分岔行为、跳跃现象和滞回特性。理论预测通过精心设计的实验得到了全面验证。利用高速摄像系统和图像追踪技术，我们在可控的旋转环境中系统地测量了小球的平衡位置随旋转频率和偏心度的变化规律。实验数据与理论预测的高度吻合证实了模型的可靠性，并展示了这一简单力学系统作为研究相变现象实验平台的价值。

我们的研究为探索经典力学系统中的非线性动力学行为开辟了新途径，特别是在理解对称性破缺、分岔现象和双稳态系统方面提供了直观的物理图像。研究揭示的频率驱动相变机制不仅与热力学相变具有深刻的数学同构性，更与现代动力学相变理论形成了有趣的对应关系。这种跨领域的联系表明，相变作为一种普遍的临界现象，其本质特征可以在不同的物理体系中得到体现。

未来的研究工作可以从多个方向深入拓展。首先，对系统在临界点附近的动力学行为进行更精细的实验测量将揭示更丰富的物理现象，包括临界慢化、临界涨落增强、标度不变性等临界现象的定量表征。特别是弛豫时间随参数接近临界值的发散行为，将为理解动力学相变的本质提供重要线索。其次，将研究扩展到多球耦合系统，探索球-球相互作用导致的集体行为和新型相变，如同步转变、相分离、群体运动等，这将极大地丰富我们对机械系统中涌现现象的认识。在理论方面，发展包含噪声效应的随机动力学模型将使研究更接近真实物理系统。考虑温度涨落、机械振动等随机因素的影响，可能揭示噪声诱导的新型相变行为。此外，探索周期驱动、参数调制等非平衡驱动条件下的系统响应，将为研究 Floquet 系统、时间晶体等前沿课题提供经典对应。

本研究的应用前景广阔。在工程领域，基于相变原理设计的机械器件可以实现高灵敏度传感、机械开关、能量收集等功能。在基础教育中，这一系统为抽象的相变概念提供了可视化的教学工具。在跨学科研究中，机械相变的研究方法和概念可以推广到生物系统的集体行为、交通流的堵塞转变、金融市场的稳定性分析等复杂系统研究中。未来的工作还可以探索不同几何构型（如椭圆环、螺旋轨道）、不同约束条件（如磁场、电场作用）下的相变行为，以及与量子-经典过渡相关的极限情况研究。这些拓展将进一步深化我们对相变普适性的理解，推动物理学基本概念在更广泛领域的应用。

致谢

从开题到如今即将结题，半年时光转瞬即逝。本文从选题到完成研究过程的分工如下：罗海艺在本次研究中主导了理论模型的建立和动力学方程的推导，完成了有效势能分析和相变条件的理论计算，并承担了论文理论部分的主要撰写工作。牟天昊负责实验系统的搭建和调试，完成了所有实验数据的采集、处理与分析，绘制了论文中的实验图表，并参与了论文实验部分的撰写和后期修改工作。

在本文接近尾声时，我们诚挚地向所有给予我们帮助的人士致以谢意。首先，我们要感谢我们的指导老师张程鑫老师。当我们最初观察到小球在旋转圆环中的奇特平衡现象时，张老师敏锐地意识到这一看似简单的力学系统可能蕴含着深刻

的物理内涵，并鼓励我们进行系统深入的研究。得益于老师深厚的理论功底与丰富的实验经验，我们在这次科学研究中受益良多。从建议使用高速摄像技术精确追踪小球轨迹，到指导我们运用拉格朗日力学构建有效势能，从提醒我们关注系统的对称性破缺，到启发我们将研究与动力学相变理论相联系，张老师的悉心指导使我们逐步掌握了系统性的科学研究方法，为我们将来的学习道路奠定了坚实的基础。

其次，我们要感谢重庆育才中学校物理实验室提供的实验条件和设备支持。实验室老师们在实验器材的使用、数据采集系统的调试等方面给予了我们诸多帮助。同时，感谢同组同学们在实验过程中的协助和有益讨论，特别是在长时间的数据采集过程中给予的帮助。

我们还要感谢我们的父母为研究提供的全方位支持。正是因为他们的理解和资金支持，我们才能够购置必要的实验器材，搭建精密的旋转系统；正是因为他们的鼓励和陪伴，我们才能在遇到困难时坚持下去，最终完成这项富有挑战性的研究工作。

结尾之际，也感谢重庆育才中学的全体老师们与同学们对我们的关心与鼓励。正是因为学校营造的良好科研氛围和大家的支持，我们才能以饱满的热情投入研究，以高标准完成本次丘成桐中学科学奖的参赛作品。这段宝贵的科研经历将成为我们成长道路上的重要财富。

参考文献

- [1] J.D. van der Waals, “Over de Continuïteit van den Gas- en Vloeistoofteestand (On the continuity of the gas and liquid state)”, Doctoral dissertation, Leiden University (1873).
- [2] P. Curie, “Propriétés magnétiques des corps à diverses températures”, *Annales de Chimie et de Physique*, **5**, 289-405 (1895).
- [3] L.D. Landau, “On the theory of phase transitions”, *Phys. Z. Sowjetunion*, **11**, 26-35 (1937).
- [4] K.G. Wilson, “Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture”, *Physical Review B*, **4**(9), 3174-3183 (1971).
- [5] P.W. Anderson, “More is different”, *Science*, **177**(4047), 393-396 (1972).
- [6] N.F. Mott, *Metal-Insulator Transitions*, 2nd ed. (Taylor & Francis, London, 1990).

- [7] D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard, “Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit”, *Physical Review Letters*, **48**(22), 1559-1562 (1982).
- [8] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles”, *Physical Review Letters*, **75**(6), 1226-1229 (1995).
- [9] M.C. Marchetti, J.F. Joanny, S. Ramaswamy, T.B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, and R.A. Simha, “Hydrodynamics of soft active matter”, *Reviews of Modern Physics*, **85**(3), 1143-1189 (2013).
- [10] D. Helbing, “Traffic and related self-driven many-particle systems”, *Reviews of Modern Physics*, **73**(4), 1067-1141 (2001).
- [11] D. Sornette, “Critical market crashes”, *Physics Reports*, **378**(1), 1-98 (2003).
- [12] J.M. Beggs and D. Plenz, “Neuronal avalanches in neocortical circuits”, *Journal of Neuroscience*, **23**(35), 11167-11177 (2003).
- [13] G. Fletcher, “A mechanical analog of first- and second-order phase transitions”, *American Journal of Physics*, **64**(6), 706-721 (1996).
- [14] R. Hamazaki, “Exceptional dynamical quantum phase transitions in periodically driven systems”, *Nature Communications*, **12**, 5108 (2021).
- [15] A. Eckardt, “Colloquium: Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices”, *Reviews of Modern Physics*, **89**, 011004 (2017).
- [16] M. Heyl, “Dynamical quantum phase transitions: a review”, *Reports on Progress in Physics*, **81**, 054001 (2018).
- [17] T.W.B. Kibble, “Topology of cosmic domains and strings”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **9**(8), 1387-1398 (1976).
- [18] W.H. Zurek, “Cosmological experiments in superfluid helium?”, *Nature*, **317**(6037), 505-508 (1985).
- [19] 雷家睿, 韩润泽, 王柯人, 黄敏, 赵芸赫, 马宇翰, “刚性球体在转动环形凹槽内的动力学行为”, *大学物理*, **41**(10), 55-58 (2022).

6 附录 A: 平衡角度及稳定平衡点推导

给定有效势能:

$$U_{\text{eff}} = -\cos \theta - \frac{1}{2}\beta(\sin \theta + \alpha)^2$$

平衡点要求一阶导数为零：

$$\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \theta} = \sin \theta - \beta(\sin \theta + \alpha) \cos \theta = 0 \quad (1)$$

整理得：

$$\sin \theta = \beta \cos \theta (\sin \theta + \alpha)$$

化简得：

$$\alpha = \frac{\sin \theta}{\beta \cos \theta} - \sin \theta = \frac{1}{\beta} \tan \theta - \sin \theta \quad (2)$$

临界点要求二阶导数为零：

$$\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \theta^2} = \cos \theta - \beta [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \alpha \sin \theta] = 0 \quad (3)$$

将式 (2) 代入式 (3)：

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \tan \theta - \sin \theta$$

代入括号内：

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \left(\frac{1}{\beta} \tan \theta - \sin \theta \right) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \frac{1}{\beta} \sin \theta \tan \theta + \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

式 (3) 变为：

$$\cos \theta - \beta \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) = 0$$

化简可得：

$$\cos \theta - \beta \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = 0$$

两边乘以 $\cos \theta$ ：

$$\cos^2 \theta - \beta \cos^3 \theta + \sin^2 \theta = 0$$

利用恒等式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 该公式可被化简为：

$$1 - \beta \cos^3 \theta = 0$$

即：

$$\theta_c = \pm \cos^{-1} (\beta^{-1/3}) \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (2) 求 α_c ：

$$\alpha_c = \frac{1}{\beta} \tan \theta_c - \sin \theta_c$$

已知 $\cos \theta_c = \beta^{-1/3}$ ，则：

$$\sin \theta_c = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_c} = \pm \sqrt{1 - \beta^{-2/3}}$$

即：

$$\tan \theta_c = \frac{\sin \theta_c}{\cos \theta_c} = \pm \frac{\sqrt{1 - \beta^{-2/3}}}{\beta^{-1/3}} = \pm \beta^{1/3} \sqrt{1 - \beta^{-2/3}}$$

代入：

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{1}{\beta} \left(\pm \beta^{1/3} \sqrt{1 - \beta^{-2/3}} \right) - \left(\pm \sqrt{1 - \beta^{-2/3}} \right) = \pm \left(\beta^{-2/3} \sqrt{1 - \beta^{-2/3}} - \sqrt{1 - \beta^{-2/3}} \right) \\ &= \pm \sqrt{1 - \beta^{-2/3}} (\beta^{-2/3} - 1) = \mp \sqrt{1 - \beta^{-2/3}} (1 - \beta^{-2/3}) \\ &= \mp (1 - \beta^{-2/3})^{3/2} \end{aligned}$$

取正负号对应两个分支，故：

$$\alpha_c = \pm (1 - \beta^{-2/3})^{3/2} \quad (5)$$

最终得到临界点：

$$\theta_c = \pm \cos^{-1} (\beta^{-1/3}), \quad \alpha_c = \pm (1 - \beta^{-2/3})^{3/2}$$

7 附录 B: 圆环摩擦系数测量公式推导

7.1 能量分析

小球在圆环上运动时，机械能损耗等于摩擦力做功。第 n 次振荡后，能量损耗为：

$$mg(R-r)(\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) = \sum_{i=1}^n W_i$$

其中 W_i 为第 i 次半周期中摩擦力做的功。

在第 i 次半周期中，摩擦力做功为：

$$W_i = 2 \int_0^{\alpha_i} \mu N (R-r) d\alpha$$

法向力 N 包含重力和离心力分量：

$$N = mg \cos \alpha + m\dot{\alpha}^2 (R-r)$$

因此：

$$W_i = 2\mu(R-r) \int_0^{\alpha_i} [mg \cos \alpha + m\dot{\alpha}^2 (R-r)] d\alpha$$

在小角度条件下 ($\alpha \ll 1$)，作如下近似：

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$\dot{\alpha}^2 \approx \frac{g}{R-r} (\alpha_i^2 - \alpha^2) \quad (\text{由能量守恒得})$$

7.2 积分计算

将近似代入积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha_i} mg \cos \alpha d\alpha &\approx mg \int_0^{\alpha_i} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha = mg\left(\alpha_i - \frac{\alpha_i^3}{6}\right) \\ \int_0^{\alpha_i} m\dot{\alpha}^2(R-r)d\alpha &\approx m(R-r) \int_0^{\alpha_i} \frac{g}{R-r}(\alpha_i^2 - \alpha^2) d\alpha = mg \int_0^{\alpha_i} (\alpha_i^2 - \alpha^2) d\alpha \\ &= mg\left(\alpha_i^3 - \frac{\alpha_i^3}{3}\right) = \frac{2}{3}mg\alpha_i^3\end{aligned}$$

积分结果为：

$$\int_0^{\alpha_i} [mg \cos \alpha + m\dot{\alpha}^2(R-r)] d\alpha \approx mg\left(\alpha_i - \frac{\alpha_i^3}{6}\right) + \frac{2}{3}mg\alpha_i^3 = mg\alpha_i + \frac{1}{2}mg\alpha_i^3$$

在小角度下， α_i^3 项可忽略，故：

$$\int_0^{\alpha_i} [mg \cos \alpha + m\dot{\alpha}^2(R-r)] d\alpha \approx mg\alpha_i$$

7.3 最终结果

摩擦力总做功：

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n 2\mu(R-r) \cdot mg\alpha_i = 2\mu mg(R-r) \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

能量守恒方程：

$$mg(R-r)(\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) = 2\mu mg(R-r) \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

两边消去 $mg(R-r)$ ：

$$\cos \alpha_n - \cos \alpha_0 = 2\mu \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

用小角度近似 $\alpha_i \approx \sin \alpha_i$ ：

$$\cos \alpha_n - \cos \alpha_0 = 2\mu \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i$$

解得摩擦系数：

$$\mu = \frac{\cos \alpha_n - \cos \alpha_0}{2 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i}$$

8 附录 C: 球的动力学方程求解

Listing 1: MATLAB 代码: 球的动力学方程求解

```

1 %% Ball Position vs Time - Multiple Angular Velocities
2 clear; close all;
3
4 % Parameters
5 R = 0.20; % Ring radius (m)
6 r = 0.016; % Ball radius (m)
7 g = 9.8; % Gravity (m/s^2)
8 mu = 0.048; % Friction coefficient
9
10 % Critical angular velocity
11 omega_c = sqrt(g/(R-r));
12 fprintf('Critical angular velocity: %.2f rad/s\n', omega_c);
13
14 % Angular velocities to simulate
15 omega_values = [31.415, 24.086, 19.897, 15.708]; % rad/s
16
17 % 蓝绿色系配色方案 (OPPO & VIVO 风格)
18 colors = {
19     [0.00 0.45 0.74], % 深蓝
20     [0.00 0.60 0.50], % 青绿
21     [0.30 0.75 0.93], % 亮蓝
22     [0.20 0.80 0.60] % 亮绿
23 };
24
25 % Time parameters
26 dt = 0.001;
27 t_final = 3.0;
28 t = 0:dt:t_final;
29 N = length(t);
30
31 figure('Position', [100 100 800 600], 'Color', 'w');
32
33 % Store results for comparison
34 all_theta = zeros(N, length(omega_values));
35 equilibria = zeros(1, length(omega_values));
36
37 for k = 1:length(omega_values)

```

```

38     omega = omega_values(k);
39
40     % Initial conditions (same for all)
41     theta = zeros(N, 1);
42     theta_dot = zeros(N, 1);
43     theta(1) = 1*pi/180; % 1 degrees
44     theta_dot(1) = 0;
45
46     % Damping coefficient
47     gamma = 2*mu*sqrt(g/(R-r));
48
49     % Runge-Kutta integration
50     for i = 1:N-1
51         % Current state
52         y = [theta(i); theta_dot(i)];
53
54         % RK4 steps
55         k1 = dt * dynamics(y, R, r, g, omega, gamma, mu);
56         k2 = dt * dynamics(y + k1/2, R, r, g, omega, gamma, mu);
57         k3 = dt * dynamics(y + k2/2, R, r, g, omega, gamma, mu);
58         k4 = dt * dynamics(y + k3, R, r, g, omega, gamma, mu);
59
60         % Update state
61         y_new = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
62
63         % Apply physical constraint
64         if y_new(1) > pi/2
65             y_new(1) = pi/2;
66             if y_new(2) > 0
67                 y_new(2) = 0; % Stop at boundary
68             end
69         elseif y_new(1) < 0
70             y_new(1) = 0;
71             if y_new(2) < 0
72                 y_new(2) = 0;
73             end
74         end
75
76         theta(i+1) = y_new(1);
77         theta_dot(i+1) = y_new(2);
78     end

```

```

79
80     all_theta(:,k) = theta;
81
82     % Calculate steady-state value (last 20% of simulation)
83     idx_steady = round(0.8*N):N;
84     equilibria(k) = mean(theta(idx_steady));
85
86     % Plot trajectory
87     subplot(2,1,1);
88     hold on;
89     plot(t, theta*180/pi, 'Color', colors{k}, 'LineWidth', 2.5,
90         ...
91         'DisplayName', sprintf('ω=%.2f rad/s', omega));
92
93     subplot(2,1,2);
94     hold on;
95     plot(t, theta*180/pi, 'Color', colors{k}, 'LineWidth', 2.5);
96 end
97 % First subplot - full view
98 subplot(2,1,1);
99 xlabel('时间 t (s)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
100 ylabel('球的位置 θ (°)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
101 grid on;
102 legend('Location', 'northeast', 'FontSize', 10);
103 xlim([0 3]);
104 ylim([0 90]);
105 set(gca, 'FontSize', 11, 'GridAlpha', 0.3);
106
107 % Second subplot - zoomed view
108 subplot(2,1,2);
109 xlabel('时间 t (s)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
110 ylabel('球的位置 θ (°)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
111 title('缩进图', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
112 grid on;
113 xlim([0 3]);
114 ylim([min(equilibria)*180/pi - 10, max(equilibria)*180/pi + 10]);
115 set(gca, 'FontSize', 11, 'GridAlpha', 0.3);
116
117 % Add theoretical equilibria

```

```

118 for k = 1:length(omega_values)
119     omega = omega_values(k);
120     if omega > omega_c
121         theta_eq = acos(g/(omega^2*(R-r)));
122         subplot(2,1,2);
123         plot([0 3], [theta_eq*180/pi theta_eq*180/pi], '--', ...
124             'Color', colors{k}, 'LineWidth', 1.5, 'LineStyle',
125                 '--');
126     end
127 end
128 %% Verify equilibrium independence from initial conditions
129 figure('Position', [100 100 700 500], 'Color', 'w');
130
131 omega = 16.20; % Fixed angular velocity
132 initial_angles = [10, 30, 50, 70] * pi/180; % Different initial
133         positions
134 % 使用蓝绿色渐变
135 colors2 = [
136     0.00 0.45 0.74
137     0.00 0.60 0.50
138     0.30 0.75 0.93
139     0.20 0.80 0.60
140 ];
141
142 final_positions = zeros(1, length(initial_angles));
143
144 for j = 1:length(initial_angles)
145     theta = zeros(N, 1);
146     theta_dot = zeros(N, 1);
147     theta(1) = initial_angles(j);
148     theta_dot(1) = 0;
149
150     gamma = 2*mu*sqrt(g/(R-r));
151
152     % RK4 integration
153     for i = 1:N-1
154         y = [theta(i); theta_dot(i)];
155
156         k1 = dt * dynamics(y, R, r, g, omega, gamma, mu);

```

```

157     k2 = dt * dynamics(y + k1/2, R, r, g, omega, gamma, mu);
158     k3 = dt * dynamics(y + k2/2, R, r, g, omega, gamma, mu);
159     k4 = dt * dynamics(y + k3, R, r, g, omega, gamma, mu);
160
161     y_new = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
162
163     % Physical constraints
164     if y_new(1) > pi/2
165         y_new(1) = pi/2;
166         if y_new(2) > 0
167             y_new(2) = 0;
168         end
169     elseif y_new(1) < 0
170         y_new(1) = 0;
171         if y_new(2) < 0
172             y_new(2) = 0;
173         end
174     end
175
176     theta(i+1) = y_new(1);
177     theta_dot(i+1) = y_new(2);
178 end
179
180 plot(t, theta*180/pi, 'LineWidth', 2.5, 'Color', colors2(j
181     ,:), ...
182     'DisplayName', sprintf('  = %d°', round(initial_angles
183         (j)*180/pi)));
184 hold on;
185
186 % Record final position
187 idx_steady = round(0.8*N):N;
188 final_positions(j) = mean(theta(idx_steady));
189 end
190
191 % Theoretical equilibrium
192 theta_eq_theory = acos(g/(omega^2*(R-r)));
193 plot([0 3], [theta_eq_theory*180/pi theta_eq_theory*180/pi], 'k
194     --', ...
195     'LineWidth', 2, 'DisplayName', '理论值');
196 xlabel('时间 (s)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');

```

```

195 ylabel('球的位置  $\varphi$  ( $^\circ$ )', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
196 title(sprintf('不同初始角度收敛到相同平衡位置  $\varphi$  ( $\varphi = \varphi \cdot 0.2f_{\text{rad/s}}$ )',
    omega), ...
    'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
198 grid on;
199 legend('Location', 'east', 'FontSize', 10);
200 set(gca, 'FontSize', 11, 'GridAlpha', 0.3);
201
202 % Print verification
203 fprintf('\n平衡位置验证  $\varphi$  ( $\varphi = \varphi \cdot 0.2f_{\text{rad/s}}$ ):\n', omega);
204 fprintf('初始角度  $\varphi$  ( $^\circ$ ) | 最终位置  $\varphi$  ( $^\circ$ )\n');
205 fprintf('-----|-----\n');
206 for j = 1:length(initial_angles)
207     fprintf('        %3.0f        |        %2.2f\n', ...
208         initial_angles(j)*180/pi, final_positions(j)*180/pi);
209 end
210 fprintf('\n理论平衡位置:  $\varphi \cdot 0.2f_{\text{度}}$ \n', theta_eq_theory*180/pi);
211 fprintf('最终位置标准差:  $\varphi \cdot 0.4f_{\text{度}}$ \n', std(final_positions)*180/pi);
212
213 %% Dynamics function
214 function dydt = dynamics(y, R, r, g, omega, gamma, mu)
215     theta = y(1);
216     theta_dot = y(2);
217
218     % Ensure theta is in valid range
219     if theta < 0 || theta > pi/2
220         theta = max(0, min(pi/2, theta));
221     end
222
223     % Centrifugal parameter
224     beta = omega^2*(R-r)/g;
225
226     % Main dynamics
227     if beta > 1
228         % Above critical speed
229         theta_ddot = (beta*cos(theta) - 1)*g*sin(theta)/(R-r);
230     else
231         % Below critical speed - restoring force to =0
232         theta_ddot = -(1 - beta*cos(theta))*g*sin(theta)/(R-r);

```

```

233     end
234
235     % Damping
236     theta_ddot = theta_ddot - gamma*theta_dot;
237
238     % Simplified friction model
239     if abs(theta_dot) > 1e-6
240         friction = -mu*g*sign(theta_dot)/(R-r);
241         theta_ddot = theta_ddot + friction;
242     end
243
244     dydt = [theta_dot; theta_ddot];
245 end

```

9 附录 D: 球平衡位置与 β 的关系

Listing 2: MATLAB 代码: 球平衡位置与 β 的关系

```

1 %% 对称分叉曲线
2 clear; close all;
3
4 % ===== 参数设置 =====
5 g = 9.8;          % 重力加速度 ( $m/s^2$ )
6 R = 0.067;       % 圆环半径 ( $m$ ) (对应文档实验参数)
7 r = 0.01;        % 小球半径 ( $m$ )
8 omega_c = sqrt(g/(R-r)); % 临界角速度 (文档式6)
9
10 % ===== 理论曲线计算 =====
11 omega_norm = linspace(0, 3, 500);
12 omega = omega_norm * omega_c;
13
14 theta_pos = zeros(size(omega));
15 theta_neg = zeros(size(omega));
16
17 for j = 1:length(omega)
18     if omega(j) < omega_c
19         theta_pos(j) = 0;
20         theta_neg(j) = 0;
21     else
22         cos_theta = min(max(g/(omega(j)^2*(R-r)), -1), 1);
23         theta_pos(j) = acos(cos_theta);

```

```

24     theta_neg(j) = -acos(cos_theta);
25     end
26 end
27
28 % ===== 绘图 =====
29 figure('Position',[100 100 850 650]);
30 hold on;
31
32 % 理论曲线 (文档图 7(a) 对应)
33 plot(omega_norm, theta_pos*180/pi, 'Color',[0 0.5 0.7], '
    LineWidth', 3, 'DisplayName','理论解 (正分支)');
34 plot(omega_norm, theta_neg*180/pi, 'Color',[0.2 0.8 0.8], '
    LineWidth', 3, 'DisplayName','理论解 (负分支)');
35
36 plot([1 1], [-100 100], 'k--', 'LineWidth', 1.5, '
    HandleVisibility','off');
37
38 % 相区标注 (对应文档图 7(a))
39 text(0.5, 0, 'beta_□<□1 对称相', 'FontSize', 12, 'Color',[0.3 0.3
    0.3], ...
40     'HorizontalAlignment','center', 'BackgroundColor','w');
41 text(2.2, 60, 'beta_□>□1 破缺相', 'FontSize', 12, 'Color',[0 0.4
    0.6], ...
42     'HorizontalAlignment','center');
43 text(2.2, -60, 'beta_□>□1 破缺相', 'FontSize', 12, 'Color',[0 0.4
    0.6], ...
44     'HorizontalAlignment','center');
45
46 % 坐标轴设置
47 xlabel('\beta', 'FontSize', 40, 'FontWeight','bold');
48 ylabel('\theta_{eq}□(度)', 'FontSize', 40, 'FontWeight','bold');
49 %title('机械模型对称破缺实验验证', 'FontSize', 16, 'Color',[0
    0.3 0.5]);
50 legend('Location', 'northwest', 'FontSize', 18);
51
52 % 网格与范围
53 grid on;
54 xlim([0 3]);
55 ylim([-90 90]);
56 set(gca, 'YTick', -90:30:90, 'FontSize', 12);
57 set(gcf, 'Color', [0.95 0.98 0.98]); % 浅蓝绿背景

```

10 附录 E: 不同 α 下 β 与 θ 的关系

Listing 3: MATLAB 代码: 不同 α 下 β 与 θ 的关系

```

1 clear all; close all; clc;
2
3 %% Fletcher 模型: 不同  $\alpha$  下的平衡位置  $vs$  转速
4 figure('Position', [100, 100, 800, 600]);
5
6 % 参数设置
7 alpha_values = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4]; % 不同偏心度  $\alpha$ 
8 beta_range = linspace(0.1, 3, 200); % 转速参数范围
9
10 % 统一蓝绿色配色矩阵 ( $RGB$  三元组)
11 bluegreen_colors = [
12     0.0, 0.7, 0.7; % 青绿色
13     0.0, 0.5, 1.0; % 湖蓝
14     0.2, 0.8, 0.6; % 浅绿色
15     0.1, 0.6, 0.8; % 中青
16     0.0, 0.4, 0.6 % 深青
17 ];
18
19 % 不同线型设置
20 linestyles = {'-', '--', ':', '-.', '-.'};
21
22 hold on;
23
24 for i = 1:length(alpha_values)
25     alpha = alpha_values(i);
26     theta_eq = zeros(size(beta_range));
27     unstable_beta = []; unstable_theta = [];
28
29     for j = 1:length(beta_range)
30         beta = beta_range(j);
31         eq_fun = @(theta) sin(theta) - beta*(sin(theta) + alpha)
32             *cos(theta);
33
34         if beta < 1 && alpha == 0
35             theta_eq(j) = 0;
36         else
37             theta_candidates = [];

```

```

37     initial_guesses = [0, 0.1, 0.5, 1, 1.5];
38     for guess = initial_guesses
39         try
40             sol = fzero(eq_fun, guess);
41             if abs(eq_fun(sol)) < 1e-10 && sol >= -pi/2
42                 && sol <= pi/2
43                     theta_candidates(end+1) = sol; %#ok<
44                     SAGROW>
45             end
46         catch
47             % 无解时跳过
48         end
49     end
50     theta_candidates = unique(round(theta_candidates
51                               *1000)/1000);
52     if isempty(theta_candidates)
53         theta_eq(j) = 0;
54     else
55         theta_eq(j) = max(theta_candidates);
56     end
57 end
58 end
59
60 % 绘制主曲线
61 plot(beta_range, theta_eq*180/pi, ...
62       'Color', bluegreen_colors(i,:), ...
63       'LineWidth', 2.5, 'LineStyle', linestyle{i}, ...
64       'DisplayName', sprintf('\alpha_{\square}=%.1f', alpha));
65
66 % 对  $\alpha > 0$  情况绘制不稳定分支 (虚线)
67 if alpha > 0
68     beta_c_approx = 1 / (1 - alpha^(2/3));
69     if beta_c_approx < max(beta_range)
70         beta_unstable = linspace(0.9, beta_c_approx*0.95,
71                                  50);
72         theta_unstable = zeros(size(beta_unstable));
73         for j = 1:length(beta_unstable)
74             eq_fun = @(theta) sin(theta) - beta_unstable(j)
75                 *(sin(theta) + alpha)*cos(theta);
76             try
77                 theta_unstable(j) = fzero(eq_fun, 0.01);
78             catch
79                 % 无解时跳过
80             end
81         end
82     end
83 end

```

```

73         catch
74             theta_unstable(j) = NaN;
75         end
76     end
77     plot(beta_unstable, theta_unstable*180/pi, '--', ...
78          'Color', bluegreen_colors(i,:), 'LineWidth',
79          1.5, 'HandleVisibility','off');
80 end
81 end
82
83 xlabel('\beta_{\square}', 'FontSize', 2);
84 ylabel('平衡角度_{\square}\theta_{\square}(^\circ)', 'FontSize', 20);
85
86 legend('Location', 'northwest', 'FontSize', 20);
87 grid on;
88 xlim([0, 3]);
89 ylim([0, 90]);
90 set(gca, 'FontSize', 20);
91
92 % 添加临界线标注
93 plot([1, 1], [0, 90], 'k--', 'LineWidth', 1, 'HandleVisibility',
94       'off');
95 text(1.05, 80, '\beta_{\square}=1', 'FontSize', 11, 'FontAngle', '
       italic');

```

11 附录 F: 不同 β 下 α 与 θ 的关系图及与铁磁相变的对比图

Listing 4: MATLAB 代码: 不同 β 下 α 与 θ 的关系图及与铁磁相变的对比图, 模拟采用的是平均场理论 (Mean Field Theory) 下的双曲正切近似 (tanh approximation)

```

1 %% Effective Potential Energy Evolution
2 clear; close all;
3
4 % Parameters
5 theta = linspace(-pi, pi, 200);
6 beta_values = [0, 0.5, 1.0, 1.5];
7 alpha = 0; % No axial offset for second-order transition
8

```

```

9 figure('Position',[100 100 800 600]);
10 hold on;
11
12 % 定义蓝绿色系配色
13 colors = [
14     0.00 0.45 0.74; % 深蓝
15     0.00 0.60 0.50; % 青绿
16     0.30 0.75 0.93; % 亮蓝
17     0.20 0.80 0.60 % 亮绿
18 ];
19
20 for i = 1:length(beta_values)
21     beta = beta_values(i);
22     % Effective potential
23     U_eff = -cos(theta) - 0.5*beta*(sin(theta) + alpha).^2;
24     plot(theta*180/pi, U_eff, 'LineWidth', 2.5, 'Color', colors(
25         i,:), ...
26         'DisplayName', ['\beta_□=' num2str(beta)]);
27 end
28 xlabel('\theta_□(^{\circ})', 'FontSize', 20);
29 ylabel('U_{eff}/mg(R-r)', 'FontSize', 20);
30 %title('有效势能 (中心转轴)', 'FontSize', 14);
31 grid on;
32 legend('Location', 'best', 'FontSize', 18, 'FontWeight', 'bold');
33 xlim([-180 180]);
34 ylim([-2.5 1]);
35
36 % Mark critical value with matching color
37 text(100, -0.5, '\beta_c_□=□1', 'FontSize', 14, 'FontWeight', '
38     bold', ...
39     'BackgroundColor', 'w', 'EdgeColor', colors(3,:), 'LineWidth
40     ', 1.5);
41
42 % 添加网格线透明度
43 ax = gca;
44 ax.GridAlpha = 0.3;
45 ax.FontSize = 12;
46

```

```

47 %% 3D Potential Energy Landscape
48 clear; close all;
49
50 % Parameters
51 theta = linspace(-pi, pi, 100);
52 beta = linspace(0, 2, 100);
53 [THETA, BETA] = meshgrid(theta, beta);
54 alpha = 0;
55
56 % Effective potential
57 U_eff = -cos(THETA) - 0.5*BETA.*(sin(THETA) + alpha).^2;
58
59 figure('Position',[100 100 800 600]);
60 surf(THETA*180/pi, BETA, U_eff, 'EdgeColor', 'none');
61 colormap(jet);
62 colorbar;
63
64 xlabel('\theta (degrees)', 'FontSize', 20);
65 ylabel('\beta', 'FontSize', 20);
66 zlabel('U_{eff}/mgR', 'FontSize', 20);
67 %title('3D Potential Energy Landscape', 'FontSize', 14);
68 view(45, 30);
69 grid on;
70
71 % Add contour plot at bottom
72 hold on;
73 contour3(THETA*180/pi, BETA, U_eff, 20, 'k-', 'LineWidth', 0.5);

```

12 附录 G: 一级相变有效势能求解

Listing 5: MATLAB 代码: 一级相变有效势能 (2D,3D)

```

1 %% Axial Offset Effect - First Order Transition
2 clear; close all;
3
4 % Parameters
5 theta = linspace(-pi, pi, 200);
6 beta = 1.2; % Fixed, above critical
7 alpha_values = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8];
8
9 figure('Position',[100 100 800 600]);

```

```

10 hold on;
11
12 % 自定义蓝绿色配色
13 bluegreen_colors = [
14     0.0, 0.7, 0.7;    % 青绿色
15     0.0, 0.5, 1.0;    % 湖蓝
16     0.2, 0.8, 0.6;    % 浅绿色
17     0.1, 0.6, 0.8;    % 中青
18     0.0, 0.4, 0.6     % 深青
19 ];
20
21 for i = 1:length(alpha_values)
22     alpha = alpha_values(i);
23
24     % Effective potential
25     U_eff = -cos(theta) - 0.5*beta*(sin(theta) + alpha).^2;
26
27     plot(theta*180/pi, U_eff, 'LineWidth', 2, ...
28          'Color', bluegreen_colors(i,:), ...
29          'DisplayName', ['\alpha=' num2str(alpha)]);
30 end
31
32 xlabel('\theta/^\circ', 'FontSize', 20);
33 ylabel('U_{eff}/mgR', 'FontSize', 20);
34 grid on;
35 legend('Location', 'best', 'FontSize', 20);
36 xlim([-180 180]);
37 ylim([-2.5 1]);
38
39 % Highlight double-well structure
40 text(100, -0.5, '双势阱', 'FontSize', 20, 'BackgroundColor', 'w'
41     );
42 text(-100, -0.5, '势垒', 'FontSize', 20, 'BackgroundColor', 'w')
43 ;
44
45 %% Axial Offset Effect - First Order Transition (3D plot)
46 clear; close all;
47
48 % Parameters
49 theta = linspace(-pi, pi, 200);    % 角度
50 beta_values = linspace(0.5, 2, 100); % 扫描 beta (含相变前后)

```

```

49 [Theta, Beta] = meshgrid(theta, beta_values);
50
51 % 这里固定 alpha, 可以改为不同值看差别
52 alpha = 0.3;
53
54 % Effective potential (mesh)
55 U_eff = -cos(Theta) - 0.5 .* Beta .* (sin(Theta) + alpha).^2;
56
57 % 绘图
58 figure('Position',[100 100 900 700]);
59 surf(Theta*180/pi, Beta, U_eff);
60
61 shading interp;          % 平滑表面
62 colormap(turbo);         % 彩色映射 (你可以改成 parula / winter / 自
    定义蓝绿系)
63 colorbar;                % 加色条
64
65 xlabel('\theta (degrees)', 'FontSize', 20);
66 ylabel('\beta', 'FontSize', 20);
67 zlabel('U_{eff}/mgR', 'FontSize', 20);
68 %title('First-Order Transition: Effective Potential Surface', '
    FontSize', 22);
69
70 view(45, 30);           % 3D 视角
71 grid on;

```

13 附录 H: 二级相变有效势能

Listing 6: MATLAB 代码: 二级相变有效势能 (2D,3D)

```

1 %% Fletcher模型与铁磁相变的类比
2 clear all; close all; clc;
3
4 %% 颜色定义 - 蓝绿色系
5 color_sub = [0.1, 0.6, 0.6];          % 亚临界曲线 (青色)
6 color_critical = [0, 0.5, 0.6];        % 临界曲线 (深青色)
7 color_super = [0.2, 0.7, 0.7];        % 超临界曲线 (浅青色)
8 color_arrow = [0.2, 0.4, 0.4];        % 箭头颜色
9 color_grid = [0.7, 0.8, 0.8];         % 网格颜色
10 color_dash = [0.3, 0.5, 0.5];        % 虚线颜色
11

```

```

12 %% 创建6个独立的图形窗口
13 % 1.  $\beta < 1$  (类比  $T > T_c$ ) - Fletcher模型
14 figure(1);
15 set(gcf, 'unit', 'centimeters', 'position', [10, 10, 4.2, 4.2]);
16 hold on;
17 beta = 0.6;
18 alpha = linspace(-1, 1, 400);
19 theta = zeros(size(alpha));
20
21 % 计算Fletcher模型曲线
22 for i = 1:length(alpha)
23     eq_fun = @(t) sin(t) - beta*(sin(t) + alpha(i))*cos(t);
24     if i == 1
25         theta(i) = fzero(eq_fun, 0);
26     else
27         theta(i) = fzero(eq_fun, theta(i-1));
28     end
29 end
30
31 % 绘制曲线
32 plot(alpha, theta*180/pi, '-', 'Color', color_sub, 'LineWidth',
33       2);
34
35 % 设置图形属性
36 xlabel('\alpha', 'FontSize', 9);
37 ylabel('\theta(^{\circ})', 'FontSize', 9);
38 %title('Fletcher模型: \beta < 1 (\beta = 0.6)', 'FontSize', 9);
39 grid on;
40 xlim([-1.2, 1.2]);
41 ylim([-90, 90]);
42 plot([-1.2, 1.2], [0, 0], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
43       0.8);
44 plot([0, 0], [-90, 90], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
45       0.8);
46 set(gca, 'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_{New}_{Roman}');
47 box on;
48
49 %% 2. 铁磁模型  $T > T_c$ 
50 figure(2);
51 set(gcf, 'unit', 'centimeters', 'position', [15, 10, 4.2, 4.2]);

```

```

50 hold on;
51 T_ratio = 1.5; %  $T/T_c > 1$ 
52 B = linspace(-1, 1, 400);
53 M = tanh(B/T_ratio); % 顺磁性响应
54
55 % 绘制曲线
56 plot(B, M, '-', 'Color', color_sub, 'LineWidth', 2);
57
58 % 添加箭头
59
60 % 设置图形属性
61 xlabel('B', 'FontSize', 9);
62 ylabel('M', 'FontSize', 9);
63 %title('铁磁模型:  $T > T_c$ ', 'FontSize', 9);
64 grid on;
65 xlim([-1.2, 1.2]);
66 ylim([-1.2, 1.2]);
67 plot([-1.2, 1.2], [0, 0], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
    , 0.8);
68 plot([0, 0], [-1.2, 1.2], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
    , 0.8);
69 set(gca, 'FontSize', 9, 'FontName', 'Times New Roman');
70 box on;
71
72 %% 3.  $T = T_c$  (类比  $T = T_c$ ) - Fletcher模型
73 figure(3);
74 set(gcf, 'unit', 'centimeters', 'position', [20, 10, 4.2, 4.2]);
75 hold on;
76 beta = 1;
77 alpha = linspace(-1, 1, 400);
78 theta = zeros(size(alpha));
79
80 % 计算Fletcher模型曲线
81 for i = 1:length(alpha)
82     eq_fun = @(t) sin(t) - beta*(sin(t) + alpha(i))*cos(t);
83     if i == 1
84         theta(i) = fzero(eq_fun, 0);
85     else
86         theta(i) = fzero(eq_fun, theta(i-1));
87     end
88 end

```

```

89
90 % 绘制曲线
91 plot(alpha, theta*180/pi, '-', 'Color', color_critical, '
    LineWidth', 2);
92
93 % 添加临界点标记
94 plot(0, 0, 'o', 'Color', color_critical, 'MarkerSize', 6, ...
95     'MarkerFaceColor', 'white', 'LineWidth', 1.5);
96
97 % 设置图形属性
98 xlabel('\alpha', 'FontSize', 9);
99 ylabel('\theta_□(°)', 'FontSize', 9);
100 %title('Fletcher模型: \beta = 1 (临界点)', 'FontSize', 9);
101 grid on;
102 xlim([-1.2, 1.2]);
103 ylim([-90, 90]);
104 plot([-1.2, 1.2], [0, 0], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth'
    , 0.8);
105 plot([0, 0], [-90, 90], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
    0.8);
106 set(gca, 'FontSize', 9, 'FontName', 'Times□New□Roman');
107 box on;
108
109 %% 4. 铁磁模型  $T = T_c$ 
110 figure(4);
111 set(gcf, 'unit', 'centimeters', 'position', [25, 10, 4.2, 4.2]);
112 hold on;
113 B = linspace(-1, 1, 400);
114 % 在临界点,  $M \propto B^{1/3}$  对于小  $B$ 
115 M = sign(B) .* abs(B).^(1/3);
116 M(abs(B) < 1e-6) = 0;
117
118 % 绘制曲线
119 plot(B, M, '-', 'Color', color_critical, 'LineWidth', 2);
120
121 % 添加临界点标记
122 plot(0, 0, 'o', 'Color', color_critical, 'MarkerSize', 6, ...
123     'MarkerFaceColor', 'white', 'LineWidth', 1.5);
124
125 % 设置图形属性
126 xlabel('B', 'FontSize', 9);

```

```

127 ylabel('M', 'FontSize', 9);
128 %title('铁磁模型:  $T = T_c$  (临界点)', 'FontSize', 9);
129 grid on;
130 xlim([-1.2, 1.2]);
131 ylim([-1.2, 1.2]);
132 plot([-1.2, 1.2], [0, 0], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
      , 0.8);
133 plot([0, 0], [-1.2, 1.2], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
      , 0.8);
134 set(gca, 'FontSize', 9, 'FontName', 'Times□New□Roman');
135 box on;
136
137 %% 5.  $\beta > 1$  (类比  $T < T_c$ ) - Fletcher 模型
138 figure(5);
139 set(gcf, 'unit', 'centimeters', 'position', [10, 15, 4.2, 4.2]);
140 hold on;
141 beta = 2.5;
142 n_points = 200;
143
144 % 创建滞回环
145 alpha_forward = linspace(-1, 1, n_points);
146 alpha_backward = linspace(1, -1, n_points);
147 alpha_loop = [alpha_forward, alpha_backward];
148 theta_loop = zeros(size(alpha_loop));
149
150 % 计算滞回环
151 alpha_c = (1 - beta^(-2/3))^(3/2);
152 theta_0 = acos(1/beta);
153
154 % 前向扫描
155 for i = 1:n_points
156     alpha = alpha_forward(i);
157     eq_fun = @(t) sin(t) - beta*(sin(t) + alpha)*cos(t);
158
159     if i == 1
160         theta_loop(i) = fzero(eq_fun, -theta_0*0.9);
161     else
162         try
163             theta_loop(i) = fzero(eq_fun, theta_loop(i-1));
164         catch
165             theta_loop(i) = fzero(eq_fun, -theta_0*0.9);

```

```

166         end
167
168         % 检查跳跃到上分支
169         if alpha > alpha_c && theta_loop(i) < 0.3
170             try
171                 theta_upper = fzero(eq_fun, theta_0*0.9);
172                 if abs(eq_fun(theta_upper)) < 1e-10
173                     theta_loop(i) = theta_upper;
174                 end
175             catch
176             end
177         end
178     end
179 end
180
181 % 后向扫描
182 for i = 1:n_points
183     idx = n_points + i;
184     alpha = alpha_backward(i);
185     eq_fun = @(t) sin(t) - beta*(sin(t) + alpha)*cos(t);
186
187     if i == 1
188         theta_loop(idx) = theta_loop(n_points);
189     else
190         try
191             theta_loop(idx) = fzero(eq_fun, theta_loop(idx-1));
192         catch
193             theta_loop(idx) = fzero(eq_fun, theta_0*0.9);
194         end
195
196         % 检查跳跃到下分支
197         if alpha < -alpha_c && theta_loop(idx) > -0.3
198             try
199                 theta_lower = fzero(eq_fun, -theta_0*0.9);
200                 if abs(eq_fun(theta_lower)) < 1e-10
201                     theta_loop(idx) = theta_lower;
202                 end
203             catch
204             end
205         end
206     end

```

```

207 end
208
209 % 绘制滞回环
210 plot(alpha_forward, theta_loop(1:n_points)*180/pi, '-', ...
211       'Color', color_super, 'LineWidth', 2);
212 plot(alpha_backward, theta_loop((n_points+1):end)*180/pi, '--', ...
213       'Color', color_super, 'LineWidth', 2);
214
215 % 标记临界点和
216 plot([alpha_c, alpha_c], [-90, 90], ':', 'Color', color_dash, '
      LineWidth', 1.2);
217 plot([-alpha_c, -alpha_c], [-90, 90], ':', 'Color', color_dash,
      'LineWidth', 1.2);
218 plot([-1.2, 1.2], [theta_0*180/pi, theta_0*180/pi], ':', ...
219       'Color', color_dash, 'LineWidth', 1);
220 plot([-1.2, 1.2], [-theta_0*180/pi, -theta_0*180/pi], ':', ...
221       'Color', color_dash, 'LineWidth', 1);
222
223 % 添加箭头
224
225
226 % 添加标注
227 text(alpha_c+0.05, 65, '\alpha_c', 'FontSize', 8, 'FontName', '
      Times_New_Roman');
228 text(-alpha_c-0.2, 65, '-\alpha_c', 'FontSize', 8, 'FontName', '
      Times_New_Roman');
229 text(0.75, theta_0*180/pi+8, '\theta_0', 'FontSize', 8, '
      FontName', 'Times_New_Roman');
230 text(0.75, -theta_0*180/pi-12, '-\theta_0', 'FontSize', 8, '
      FontName', 'Times_New_Roman');
231
232 % 设置图形属性
233 xlabel('\alpha', 'FontSize', 9);
234 ylabel('\theta(^{\circ})', 'FontSize', 9);
235 %title('Fletcher模型: \beta > 1 (\beta = 2.5)', 'FontSize', 9);
236 grid on;
237 xlim([-1.2, 1.2]);
238 ylim([-90, 90]);
239 plot([-1.2, 1.2], [0, 0], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth'
      , 0.8);

```

```

240 plot([0, 0], [-90, 90], '--', 'Color', color_dash, 'LineWidth',
      0.8);
241 set(gca, 'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_New_Roman');
242 box on;
243
244
245
246 %铁磁  $\tanh$  模型
247
248 %% 温度依赖的铁磁滞回环 - 基于理论公式
249 clear all; close all; clc;
250
251 %% 创建图形窗口
252 figure('Position', [100, 100, 600, 600]);
253 hold on;
254
255 %% 颜色定义
256 color_loop = [0.2, 0.7, 0.7]; % 滞回环颜色 (青色)
257 color_arrow = [0.2, 0.4, 0.4]; % 箭头颜色
258 color_dash = [0.3, 0.5, 0.5]; % 虚线颜色
259
260 %% 温度和材料参数
261 T_ratio = 0.5; %  $T/T_c < 1$  (温度与居里温度之比)
262
263 % 根据理论公式计算参数
264 M_s0 = 1; % OK时的饱和磁化强度
265 B_c0 = 0.3; % OK时的矫顽场
266
267 % 温度依赖的参数
268 M_s = M_s0 * (1 - T_ratio)^0.5; % 饱和磁化强度
269 B_c = B_c0 * (1 - T_ratio)^0.75; % 矫顽场
270 lambda = 4 / T_ratio; % 斜率参数
271
272 %% 计算滞回环
273 n_points = 400; % 数据点数
274 B_forward = linspace(-1, 1, n_points);
275 B_backward = linspace(1, -1, n_points);
276 M_forward = zeros(1, n_points);
277 M_backward = zeros(1, n_points);
278
279 % 前向扫描: 使用平滑的  $\tanh$  函数

```

```

280 for i = 1:n_points
281     B = B_forward(i);
282     M_forward(i) = M_s * tanh(lambda * (B - B_c));
283 end
284
285 % 后向扫描：使用平滑的 tanh 函数
286 for i = 1:n_points
287     B = B_backward(i);
288     M_backward(i) = M_s * tanh(lambda * (B + B_c));
289 end
290
291 %% 绘制滞回环
292 % 主曲线
293 plot(B_forward, M_forward, '-', 'Color', color_loop, 'LineWidth',
      , 2.5);
294 plot(B_backward, M_backward, '--', 'Color', color_loop, '
      LineWidth', 2.5);
295
296 % 标记矫顽场
297 plot([B_c, B_c], [-1.2, 1.2], ':', 'Color', color_dash, '
      LineWidth', 1.5);
298 plot([-B_c, -B_c], [-1.2, 1.2], ':', 'Color', color_dash, '
      LineWidth', 1.5);
299
300 % 标记饱和磁化
301 plot([-1.2, 1.2], [M_s, M_s], ':', 'Color', color_dash, '
      LineWidth', 1.2);
302 plot([-1.2, 1.2], [-M_s, -M_s], ':', 'Color', color_dash, '
      LineWidth', 1.2);
303
304 % 添加零线
305 plot([-1.2, 1.2], [0, 0], '--', 'Color', [0.5, 0.5, 0.5], '
      LineWidth', 0.8);
306 plot([0, 0], [-1.2, 1.2], '--', 'Color', [0.5, 0.5, 0.5], '
      LineWidth', 0.8);
307
308 %% 添加箭头表示扫描方向
309 % 前向箭头
310 arrow_idx = [round(0.25*n_points), round(0.75*n_points)];
311 for idx = arrow_idx
312     arrow_start = [B_forward(idx), M_forward(idx)];

```

```

313     arrow_end = [B_forward(idx+5), M_forward(idx+5)];
314     quiver(arrow_start(1), arrow_start(2), ...
315           arrow_end(1)-arrow_start(1), arrow_end(2)-arrow_start
316           (2), ...
317           'Color', color_arrow, 'LineWidth', 1.5, 'MaxHeadSize'
318           , 1.0, ...
319           'AutoScale', 'off');
320 end
321 % 后向箭头
322 arrow_idx = [round(0.25*n_points), round(0.75*n_points)];
323 for idx = arrow_idx
324     arrow_start = [B_backward(idx), M_backward(idx)];
325     arrow_end = [B_backward(idx+5), M_backward(idx+5)];
326     quiver(arrow_start(1), arrow_start(2), ...
327           arrow_end(1)-arrow_start(1), arrow_end(2)-arrow_start
328           (2), ...
329           'Color', color_arrow, 'LineWidth', 1.5, 'MaxHeadSize'
330           , 1.0, ...
331           'AutoScale', 'off');
332 end
333 %% 添加标注
334 text(B_c+0.05, 0.6, sprintf('B_c'), ...
335      'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_New_Roman');
336 text(-B_c-0.25, 0.6, sprintf('-B_c'), ...
337      'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_New_Roman');
338 text(0.8, M_s+0.08, sprintf('M_s'), ...
339      'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_New_Roman');
340 text(0.8, -M_s-0.15, sprintf('-M_s'), ...
341      'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_New_Roman');
342 %% 设置图形属性
343 xlabel('B', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
344 ylabel('M', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
345 % title(sprintf('铁磁滞回环 (T/T_c = %.1f)', T_ratio), ...
346 %       'FontSize', 16, 'FontWeight', 'bold');
347 grid on;
348 grid minor;
349 xlim([-1.2, 1.2]);
350 ylim([-1.2, 1.2]);

```

```

350 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times_New_Roman');
351 box on;
352
353 %% 添加图例
354 h1 = plot(NaN, NaN, '-', 'Color', color_loop, 'LineWidth', 2.5);
355 h2 = plot(NaN, NaN, '--', 'Color', color_loop, 'LineWidth', 2.5)
    ;
356 set(gca, 'FontSize', 9, 'FontName', 'Times_New_Roman')
357 set(gcf, 'unit', 'centimeters', 'position', [10, 10, 4.2, 4.2])
358
359 %% 计算并显示滞回环面积
360 % 数值积分计算滞回环面积
361 % area = trapz(B_forward, M_forward) - trapz(B_backward,
    M_backward);
362 % text(-1, -1, sprintf('滞回环面积 = %.3f', area), ...
363 %      'FontSize', 11, 'FontName', 'Times New Roman', ...
364 %      'BackgroundColor', 'white', 'EdgeColor', 'black');
365
366 %% 输出参数信息
367 fprintf('\n温度依赖的铁磁滞回环参数: \n');
368 fprintf('=====\n');
369 fprintf('温度比 T/T_c = %.2f\n', T_ratio);
370 fprintf('饱和磁化强度 M_s(T) = %.3f\n', M_s);
371 fprintf('矫顽场 B_c(T) = %.3f\n', B_c);
372 fprintf('斜率参数 λ(T) = %.3f\n', lambda);
373 fprintf('滞回环面积 A = %.3f\n', area);
374 fprintf('\n理论公式: \n');
375 fprintf('M_s(T) = M_s0 × (1 - T/T_c)^0.5\n');
376 fprintf('B_c(T) = B_c0 × (1 - T/T_c)^0.75\n');
377 fprintf('M = M_s × tanh[ (B - B_c) ]\n');
378 fprintf('=====\n');

```

14 附录 I: 相变条件的参数空间图

Listing 7: MATLAB 代码: 相变条件的参数空间图

```

1 %% Comprehensive Phase Diagram
2 clear; close all;
3
4 % Parameter space
5 alpha = linspace(-1, 1, 1000);

```

```

6  beta = linspace(0, 2, 1000);
7  [ALPHA, BETA] = meshgrid(alpha, beta);
8
9  % Phase boundaries
10 phase = zeros(size(ALPHA));
11
12 for i = 1:size(ALPHA,1)
13     for j = 1:size(ALPHA,2)
14         a = ALPHA(i,j);
15         b = BETA(i,j);
16
17         % Determine phase
18         if b < 1 - a^2/2
19             phase(i,j) = 0; % No transition
20         elseif abs(a) < 0.1
21             phase(i,j) = 1; % Second order
22         else
23             phase(i,j) = 2; % First order
24         end
25     end
26 end
27
28 figure('Position',[100 100 700 600]);
29 contourf(ALPHA, BETA, phase, 2);
30 colormap([0.8 0.8 0.8; 0.4 0.7 1; 1 0.4 0.4]);
31 hold on;
32
33 % Phase boundaries
34 contour(ALPHA, BETA, phase, [0.5 1.5], 'k-', 'LineWidth', 2);
35
36 % Critical lines
37 plot([0 0], [0 2], 'k--', 'LineWidth', 2);
38 plot(alpha, 1 - alpha.^2/2, 'k-', 'LineWidth', 2);
39
40 % Labels
41 text(0.5, 0.5, '无相变', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
42 text(-0.05, 1.5, '二级相变', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
43 text(0.6, 1.5, '一级相变', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
44 ;

```

```
45 % Tricritical point
46 plot(0, 1, 'ko', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'k');
47 text(0.05, 1.05, '相变临界点', 'FontSize', 12);
48
49 xlabel('\alpha', 'FontSize', 14);
50 ylabel('\beta', 'FontSize', 14);
51 %title('Phase Diagram in (\alpha, \beta) Parameter Space', '
    FontSize', 16);
52 grid on;
```

15 附录 J: 不同 α 下 β 与 θ 的对比图

Listing 8: MATLAB 代码: 不同 α 下 β 与 θ 的对比图

```
1
2 clear all; close all; clc;
3
4 % Alpha值 (与文件对应)
5 alpha_values = [0.4545, 0.3106, 0.2121, 0.1409, 0.0712];
6
7 file_names = {
8     '一级相变alpha=04545.xlsx',
9     '一级相变alpha=03106.xlsx',
10    '一级相变alpha=02121.xlsx',
11    '一级相变alpha=01409.xlsx',
12    '一级相变alpha=0071212.xlsx'
13 };
14
15 % 蓝绿色系颜色矩阵
16 bluegreen_colors = [
17     0, 0.7, 0.7;
18     0, 0.5, 1.0;
19     0.2, 0.8, 0.6;
20     0.1, 0.6, 0.8;
21     0, 0.4, 0.6
22 ];
23
24 % 线型设置
25 linestyle = {'-', '--', ':', '-.', '-'};
26
27 % 理论计算的 beta 范围
```

```

28 beta_range = linspace(0.5, 5, 500);
29 alpha_c_range = arrayfun(@(b) (b>1).*(1 - b^(-2/3)).^(3/2),
    beta_range);
30
31 % 创建图形
32 figure('Position', [100, 100, 1200, 800]);
33 set(gcf, 'Color', [1, 1, 1]);
34
35 % 第一个子图: theta vs beta 理论与实验对比
36 subplot(2, 1, 1);
37 hold on;
38
39 % 存储实验数据
40 exp_data_all = cell(length(alpha_values), 1);
41
42 % 读取所有实验数据
43 for k = 1:length(alpha_values)
44     try
45         % 读取Excel文件
46         data = xlsread(file_names{k});
47
48         % 提取 beta 和 theta 数据 (假设 beta 在第3列, theta 在第2列)
49         % 根据你的数据格式, 数据从第2行开始
50         if size(data, 2) >= 2
51             exp_beta = data(:, 2); % beta 在第3列 (但 xlsread 会跳
                过第一列的文本)
52             exp_theta = data(:, 1); % theta 在第2列
53         else
54             % 如果数据格式不同, 尝试其他方式
55             exp_beta = data(:, end); % 最后一列作为 beta
56             exp_theta = data(:, end-1); % 倒数第二列作为 theta
57         end
58
59         % 移除 NaN 值
60         valid_idx = ~isnan(exp_beta) & ~isnan(exp_theta);
61         exp_data_all{k}.beta = exp_beta(valid_idx);
62         exp_data_all{k}.theta = exp_theta(valid_idx);
63
64         fprintf('成功读取文件□%s□%d□个数据点\n', file_names{k},
            sum(valid_idx));
65     catch

```

```

66         fprintf('警告: 无法读取文件\_%s\n', file_names{k});
67         exp_data_all{k}.beta = [];
68         exp_data_all{k}.theta = [];
69     end
70 end
71
72 % 绘制理论曲线和实验数据
73 for k = 1:length(alpha_values)
74     alpha = alpha_values(k);
75     theta_eq = zeros(size(beta_range));
76     transition_beta = NaN;
77
78     % 计算理论曲线
79     for i = 1:length(beta_range)
80         beta = beta_range(i);
81         eq_fun = @(th) sin(th) - beta*(sin(th) + alpha)*cos(th);
82         alpha_c = alpha_c_range(i);
83
84         if alpha > alpha_c
85             try
86                 th_upper = fzero(eq_fun, 1);
87                 h = 1e-6;
88                 jac = (eq_fun(th_upper+h) - eq_fun(th_upper-h))
89                     /(2*h);
90                 theta_eq(i) = (jac<0)*th_upper + (jac>=0)*fzero(
91                     eq_fun, 0);
92             catch
93                 theta_eq(i) = fzero(eq_fun, 0);
94             end
95
96             if isnan(transition_beta) && i>1 && abs(theta_eq(i)-
97                 theta_eq(i-1)) > 0.1
98                 transition_beta = beta;
99             end
100         else
101             theta_eq(i) = fzero(eq_fun, 0);
102         end
103     end
104
105     % 绘制理论曲线
106     plot(beta_range, theta_eq*180/pi, ...

```

```

104     'Color', bluegreen_colors(k,:), ...
105     'LineWidth', 2.5, ...
106     'LineStyle', linestyle{k}, ...
107     'DisplayName', sprintf('理论\alpha=%.3f', alpha));
108
109 % 标记相变点
110 if ~isnan(transition_beta)
111     idx = find(beta_range >= transition_beta, 1);
112     plot(beta_range(idx), theta_eq(idx)*180/pi, 'o', ...
113          'Color', bluegreen_colors(k,:), ...
114          'MarkerSize', 8, ...
115          'MarkerFaceColor', bluegreen_colors(k,:), ...
116          'HandleVisibility', 'off');
117 end
118
119 % 绘制实验数据点
120 if ~isempty(exp_data_all{k}.beta)
121     scatter(exp_data_all{k}.beta, exp_data_all{k}.theta, 40,
122            ...
123            bluegreen_colors(k,:), 'filled', ...
124            'Marker', 's', ... % 使用方形标记区分实验数据
125            'DisplayName', sprintf('实验\alpha=%.3f', alpha),
126            ...
127            'MarkerEdgeColor', 'k', ...
128            'LineWidth', 0.5);
129 end
130 % 添加临界  $\alpha$  曲线 (右轴)
131 yyaxis right;
132 plot(beta_range, alpha_c_range, '--', 'LineWidth', 2, 'Color',
133      [0, 0, 0]);
134 ylabel('\alpha_c', 'Color', [0, 0, 0], 'FontSize', 12);
135 set(gca, 'YColor', [0, 0, 0]);
136 % 左轴设置
137 yyaxis left;
138 xlabel('\beta', 'FontSize', 12);
139 ylabel('\theta(^{\circ})', 'FontSize', 12);
140 title('理论与实验对比: \theta vs \beta', 'FontSize', 14);
141 legend('Location', 'northwest', 'FontSize', 10);

```

```
142 grid on;
143 xlim([0.5, 5]);
144 set(gca, 'FontSize', 11);
145
146 % 第二个子图：相变条件图
147 subplot(2, 1, 2);
148 hold on;
149
150 % 绘制临界曲线
151 plot(beta_range, alpha_c_range, '-', 'LineWidth', 3, 'Color',
      [0.2, 0.2, 0.2]);
152
153 % 绘制各个  $\alpha$  值的水平线
154 for k = 1:length(alpha_values)
155     plot([0.5, 5], [alpha_values(k), alpha_values(k)], '--', ...
      'Color', bluegreen_colors(k,:), 'LineWidth', 2);
156
157     % 在线上标注  $\alpha$  值
158     text(4.5, alpha_values(k)+0.01, sprintf('\alpha=%.3f',
      alpha_values(k)), ...
      'Color', bluegreen_colors(k,:), 'FontSize', 9);
159
160 end
161
162
163 xlabel('\beta', 'FontSize', 12);
164 ylabel('\alpha', 'FontSize', 12);
165 title('相变条件图', 'FontSize', 14);
166 grid on;
167 xlim([0.5, 5]);
168 ylim([0, 0.5]);
169 set(gca, 'FontSize', 11);
170
171 % 添加整体图形标题
172 sgtitle('一级相变：理论与实验对比分析', 'FontSize', 16, '
      FontWeight', 'bold');
173
174 % 保存图形
175 print('theory_experiment_comparison_with_errorbars', '-dpng', '-
      r300');
176 fprintf('\n图形已保存为
      theory_experiment_comparison_with_errorbars.png\n');
177 fprintf('误差类型： %s\n', error_type);
```

```

178 if strcmp(error_type, 'percentage')
179     fprintf('误差大小: %.1f%%\n', percentage_error * 100);
180 elseif strcmp(error_type, 'fixed')
181     fprintf('Beta误差: %.3f, Theta误差: %.1f°\n',
            fixed_error_beta, fixed_error_theta);
182 end

```

16 附录 K: β 与 α_c 的关系及实验拟合曲线

Listing 9: MATLAB 代码: β 与 α_c 的关系及实验拟合曲线

```

1 clear all; close all; clc;
2
3 % 实验数据
4 omega_exp = [17.802, 15.11455, 14.3815, 12.5663, 21.4675]; % 转
    速
5 alphac_exp = [0.3161538, 0.220923, 0.17123, 0.0569, 0.45430769];
    % 对应的  $\alpha_c$ 
6
7 % 理论计算的  $\beta$  范围
8 beta_range = linspace(0.5, 5, 500);
9
10 % 理论关系:  $\alpha_c = (1 - \beta^{-2/3})^{3/2}$  for  $\beta > 1$ 
11 alpha_c_theory = arrayfun(@(b) (b>1).*(1 - b^(-2/3)).^(3/2),
    beta_range);
12
13 % ===== 方法1: 假设  $\omega$  与  $\beta$  的关系 =====
14 % 常见的关系可能是  $\beta = k * \omega$  或  $\beta = k * \omega^n$ 
15 % 这里我们通过数据拟合来确定关系
16
17 % 首先, 我们需要从  $\alpha_c$  反推  $\beta$ 
18 % 对于  $\alpha_c = (1 - \beta^{-2/3})^{3/2}$ , 反解得到  $\beta$ 
19 beta_from_alphac = @(ac) fzero(@(b) (b>1).*(1 - b^(-2/3)).^(3/2)
    - ac, [1.01, 100]);
20
21 % 计算实验数据对应的  $\beta$  值
22 beta_exp = zeros(size(alphac_exp));
23 for i = 1:length(alphac_exp)
24     if alphac_exp(i) > 0 && alphac_exp(i) < 1
25         try
26             beta_exp(i) = beta_from_alphac(alphac_exp(i));

```

```

27         catch
28             beta_exp(i) = NaN;
29             fprintf('警告：无法计算 alpha_c = %.4f 对应的 beta 值\n', alphac_exp(i));
30         end
31     else
32         beta_exp(i) = NaN;
33     end
34 end
35
36 % 拟合 omega 与 beta 的关系
37 valid_idx = ~isnan(beta_exp);
38 if sum(valid_idx) >= 2
39     % 尝试线性拟合: beta = a * omega + b
40     p_linear = polyfit(omega_exp(valid_idx), beta_exp(valid_idx), 1);
41
42     % 尝试幂律拟合: beta = k * omega^n
43     log_omega = log(omega_exp(valid_idx));
44     log_beta = log(beta_exp(valid_idx));
45     p_power = polyfit(log_omega, log_beta, 1);
46     k_power = exp(p_power(2));
47     n_power = p_power(1);
48
49     fprintf('\n拟合结果: \n');
50     fprintf('线性拟合: beta = %.4f * omega + %.4f\n', p_linear(1), p_linear(2));
51     fprintf('幂律拟合: beta = %.4f * omega^%.4f\n', k_power, n_power);
52 end
53
54 % 创建图形 - 修改为 1200x800 像素
55 figure('Position', [100, 100, 1200, 800]);
56 set(gcf, 'Color', [1, 1, 1]);
57
58 % 设置全局字体大小
59 set(groot, 'defaultAxesFontSize', 20);
60 set(groot, 'defaultTextFontSize', 20);
61 set(groot, 'defaultLegendFontSize', 18);
62
63 % ===== 子图 1: Beta vs Alpha_c =====

```

```

64 subplot(2, 1, 1);
65 hold on;
66
67 % 绘制理论曲线
68 plot(beta_range, alpha_c_theory, 'b-', 'LineWidth', 2.5, ...
69       'DisplayName', '理论曲线: \alpha_c=\frac{1-\omega}{\beta^{\frac{2}{3}}}\beta^{\frac{3}{2}}');
70
71 % 绘制实验数据点 (改为透明)
72 if sum(valid_idx) > 0
73     scatter(beta_exp(valid_idx), alphac_exp(valid_idx), 100,
74            [0.53 0.81 0.98], 'filled', ...
75            'MarkerEdgeColor', 'k', 'LineWidth', 1.5, ...
76            'DisplayName', '实验数据', ...
77            'MarkerFaceAlpha', 0.5, 'MarkerEdgeAlpha', 0.7);
78
79     % 标注数据点的 omega 值
80     for i = find(valid_idx)
81         text(beta_exp(i)+0.05, alphac_exp(i), ...
82              sprintf('\omega=%.1f', omega_exp(i)), ...
83              'FontSize', 18, 'Color', 'k');
84     end
85 end
86
87 % 添加临界线
88 plot([1, 1], [0, 0.5], 'k--', 'LineWidth', 1.5, '
89       HandleVisibility', 'off');
90 text(1.05, 0.45, '\beta_c=1', 'FontSize', 20, 'FontWeight', '
91       bold');
92
93 xlabel('\beta', 'FontSize', 20);
94 ylabel('\alpha_c', 'FontSize', 20);
95 legend('Location', 'southeast', 'FontSize', 18);
96 grid on;
97 xlim([0.5, 5]);
98 ylim([0, 0.5]);
99
100 % ===== 子图 2: Omega vs Alpha_c =====
101 subplot(2, 1, 2);
102 hold on;

```

```

101 % 绘制实验数据点 (改为透明)
102 scatter(omega_exp, alphac_exp, 100, [0.53 0.81 0.98], 'filled',
    ...
103     'MarkerEdgeColor', 'k', 'LineWidth', 1.5, ...
104     'DisplayName', '实验数据', ...
105     'MarkerFaceAlpha', 0.5, 'MarkerEdgeAlpha', 0.7);
106
107 % 如果拟合成功, 绘制理论预测
108 if sum(valid_idx) >= 2
109     omega_theory = linspace(min(omega_exp)*0.8, max(omega_exp)
        *1.2, 200);
110
111     % 使用线性拟合预测
112     beta_pred_linear = polyval(p_linear, omega_theory);
113     alphac_pred_linear = arrayfun(@(b) (b>1).*(1 - b^(-2/3))
        .^(3/2), beta_pred_linear);
114     plot(omega_theory, alphac_pred_linear, 'b--', 'LineWidth',
        2, ...
115         'DisplayName', sprintf('线性模型: \beta=\%.3f\omega+
            \%.3f', p_linear(1), p_linear(2)));
116
117     % 使用幂律拟合预测
118     beta_pred_power = k_power * omega_theory.^n_power;
119     alphac_pred_power = arrayfun(@(b) (b>1).*(1 - b^(-2/3))
        .^(3/2), beta_pred_power);
120     plot(omega_theory, alphac_pred_power, 'g-.', 'LineWidth', 2,
        ...
121         'DisplayName', sprintf('幂律模型: \beta=\%.3f\omega
            ^{%.3f}', k_power, n_power));
122 end
123
124 % 添加误差棒 (假设5%的测量误差)
125 error_omega = 0.05 * omega_exp;
126 error_alphac = 0.05 * alphac_exp;
127 errorbar(omega_exp, alphac_exp, error_alphac, error_alphac, ...
128     error_omega, error_omega, 'r.', 'CapSize', 5);
129
130 xlabel('\omega (转速)', 'FontSize', 20);
131 ylabel('\alpha_c', 'FontSize', 20);
132 legend('Location', 'best', 'FontSize', 18);
133 grid on;

```

```

134 xlim([min(omega_exp)*0.9, max(omega_exp)*1.1]);
135 ylim([0, max(alphac_exp)*1.2]);
136
137 % 添加总标题
138 sgtitle('临界参数\alpha_c 的理论分析与实验分析', 'FontSize', 24, '
    FontWeight', 'bold');
139
140 % 输出详细信息
141 fprintf('\n==== 实验数据分析 =====\n');
142 fprintf('%-10s%-12s%-12s\n', 'Omega', 'Alpha_c(exp)', 'Beta(
    calc)');
143 fprintf('%-10s%-12s%-12s\n', '-----', '-----', '
    -----');
144 for i = 1:length(omega_exp)
145     fprintf('%-10.3f%-12.6f%-12.6f\n', omega_exp(i),
        alphac_exp(i), beta_exp(i));
146 end
147
148 % 计算拟合优度
149 if sum(valid_idx) >= 2
150     % 线性模型的  $R^2$ 
151     beta_fit_linear = polyval(p_linear, omega_exp(valid_idx));
152     alphac_fit_linear = arrayfun(@(b) (b>1).*(1 - b^(-2/3))
        .^(3/2), beta_fit_linear);
153     SS_res_linear = sum((alphac_exp(valid_idx) -
        alphac_fit_linear).^2);
154     SS_tot = sum((alphac_exp(valid_idx) - mean(alphac_exp(
        valid_idx))).^2);
155     R2_linear = 1 - SS_res_linear/SS_tot;
156
157     fprintf('\n线性模型  $R^2$  = %.4f\n', R2_linear);
158 end
159
160 % 保存图形
161 print('beta_alphac_comparison', '-dpng', '-r300');
162 fprintf('\n图形已保存为 beta_alphac_comparison.png\n');
163
164 % 额外分析：创建单独的  $\omega$ - $\beta$  关系图
165 figure('Position', [100, 100, 600, 500]);
166 set(gcf, 'Color', [1, 1, 1]);
167 hold on;

```

```
168
169 if sum(valid_idx) >= 2
170     scatter(omega_exp(valid_idx), beta_exp(valid_idx), 100,
171             [0.53 0.81 0.98], 'filled', ...
172             'MarkerEdgeColor', 'k', 'LineWidth', 1.5, ...
173             'MarkerFaceAlpha', 0.5, 'MarkerEdgeAlpha', 0.7);
174
175 % 绘制拟合线
176 omega_fit = linspace(min(omega_exp)*0.8, max(omega_exp)*1.2,
177                       100);
178 beta_fit_linear = polyval(p_linear, omega_fit);
179 beta_fit_power = k_power * omega_fit.^n_power;
180
181 plot(omega_fit, beta_fit_linear, 'b--', 'LineWidth', 2, ...
182      'DisplayName', '线性拟合');
183 plot(omega_fit, beta_fit_power, 'g-.', 'LineWidth', 2, ...
184      'DisplayName', '幂律拟合');
185
186 xlabel('\omega (转速)', 'FontSize', 20);
187 ylabel('\beta', 'FontSize', 20);
188 title('\omega与\beta的关系', 'FontSize', 22);
189 legend('Location', 'best', 'FontSize', 18);
190 grid on;
191
192 print('omega_beta_relationship', '-dpng', '-r300');
193 fprintf('Omega-Beta关系图已保存为\omega_beta_relationship.
194         png\n');
```

17 附录 L: 小球摩擦力测量

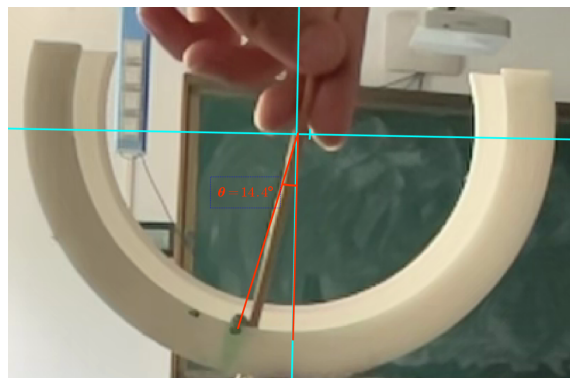


图 25: 实验方法示意图: 在其中一组实验中小球的初始位置与圆环中心轴的夹角为 14.4