

参赛学生姓名：胡瀚文，唐智宸

中学：重庆市育才中学校

省份：重庆市

国家/地区：中国

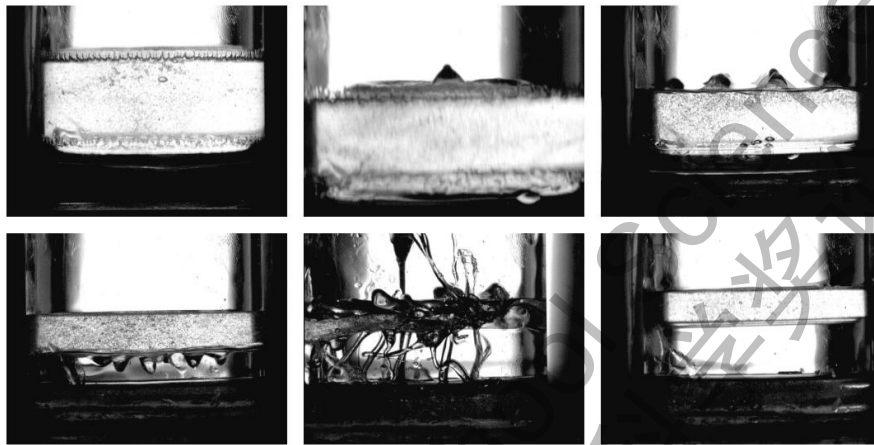
指导老师姓名：张程鑫

指导老师单位：重庆市育才中学校

论文题目：竖直振动液体中的气泡动力学与悬浮液体层稳定性研究

竖直振动液体中气泡动力学与悬浮液层稳定性研究

Kapitza 效应下的界面调控与气泡下沉阈值



摘要

竖直振动环境下，液体与气泡的动力学行为显著异于其在静态重力场的行为，其中悬浮液层的稳定性调控是流体力学领域兼具理论价值与应用潜力的热点议题。本研究以竖直振动液体为对象，围绕液-气界面动态稳定机制展开系统探究，结合理论分析与实验研究，揭示振动参数对液体悬浮状态及气泡运动的影响。静态条件下，倒置液-气界面（液体在上、空气在下）因瑞利-泰勒不稳定性极易坍塌，而竖直振动可通过 Kapitza 效应实现界面动态稳定。研究构建气泡在振动液体中的动力学模型与悬浮液层弹簧-质量模型，深入分析浮力、附加质量力、拖曳力与液体惯性力的耦合作用，发现振动能通过周期性惯性力调制液体有效重力，当振动参数处于特定范围时，可抵消重力引发的失稳趋势，抑制界面扰动增长。

实验采用高速相机观测液-气界面动态响应，捕捉到气泡运动与液层稳定性的联动过程：特定振动条件下，液体中的气泡打破常规上浮趋势，向容器底部迁移并聚合形成具有缓冲作用的空气层，该空气层通过“气体弹簧”效应吸收液体振动能量、降低液面波动幅度，进一步强化液层悬浮稳定性。结合理论分析和实验观察，我们将液-气界面形态划分为稳定、过渡、失稳三大类共 10 个子类，明确不同形态的转化条件与界面稳定的参数区间，尤为聚焦失稳状态，细致剖析不同失稳形态的特征、演化路径及触发机制。本研究展示了 Kapitza 稳定化效应在液 - 气界面调控中的普适性，厘清振动频率、振幅、流体物性等参数对界面稳定性的定量影响关系，这些结构深化了对振动流体动态平衡机制的理解，也能为液体悬浮相关技术优化等提供一定理论支撑与实验参考，对多向流非平衡动力学的研究奠定了基础。

目录

1	引言	2
2	悬浮液体与气泡下沉的理论机制	3
2.1	气泡在液体中的振动模型	3
2.1.1	系统设定与假设	3
2.1.2	受力分析与控制方程	4
2.2	悬浮液体层的弹簧-质量模型	5
2.2.1	空气层的状态方程	5
2.2.2	液体层的运动方程	6
2.2.3	相对振幅与相位	7
2.3	模型比较与统一框架	8
3	悬浮液体的实验探究	9
3.1	实验装置与设计	9
3.2	实验现象与分析	11
3.2.1	理论模型的实验验证与有效性分析	11
3.2.2	气泡下沉 - 液体迁移 - 空气层托持的联动机制	12
3.2.3	实验现象总体分类	13
4	液体层失稳的实验观察与理论解释	15
4.1	实验中的液体失稳现象	15
4.2	倒置液体/空气界面的稳定性研究	19
4.2.1	界面小扰动的基本方程与稳定性窗口	19
4.2.2	竖直振动下的 Kapitza 稳定化	21
4.3	振动下浮体的动态稳定性	23
5	结论与展望	25
	致谢	27
	参考文献	27
	附录 A: 实验现象补充图像	30
	附录 B: 更多理论模型的图像验证	30
	附录 C: 数据处理与可视化源代码	34

1 引言

在生活中，我们对“平衡”的认知常从刚体开始：比如桌上的书本，一旦外力打破其静态支撑，便会倾倒并彻底失衡——刚体的平衡往往“脆弱”，外力干扰只会让它走向更不稳定的状态，这是我们习以为常的直觉。但卡皮查效应能打破这种直觉：若将一根轻细、稍动就倒的支架在做周期性垂直振动的平台上，当振动频率和振幅达到特定条件，这根原本失衡的支架，竟能稳稳立在平台上，在外部振动调控下，从“不平衡”转为“平衡”，这正是卡皮查效应的奇妙核心 [3][29]。在流体体系中，类似的动态平衡转化现象同样普遍存在。乘坐地铁时握半瓶水，车身颠簸会让水面混乱起伏；这就是液体常规状态下“不平衡”的表现。可若给装液体的容器施加合适外部振动，原本混乱的液界面会变平整稳定，甚至倒置容器中，液体也不易下落；高速晃动的饮料瓶里，原本该扩散的波纹也会变得规 [21][5]。显然，液体也在演绎“卡皮查故事”：它同样能通过“外部振动”这一特定影响，从重力主导的“不平衡”，转变为动态稳定的“平衡”。可液体为何能突破直觉？外部振动又如何帮它搭建平衡？这些日常场景里的“不寻常”，正是我们要探究的物理奥秘。具体来看，前人研究已揭示垂直振动对液体界面稳定性和气泡行为的显著影响。传统情况下，液体倒置会因重力引发瑞利-泰勒不稳定性导致液体迅速下落 [12][15]，液面也会因参数共振引发的法拉第不稳定性 [23] 而从平整状态变得波纹起伏，并最终形成规则、有序的驻波图样。而垂直振动能动态稳定倒置的液体界面，即“Kapitza 效应”，像 Apffel 等人的实验 [4][1] 就证明高粘度液体在振动条件下可形成大面积悬浮液层，其稳定性依赖振动频率和振幅的调节。同时，振动还会改变气泡运动行为，使其在特定条件下克服浮力下沉，Barid 和 Jameson 等人 [24][25] 早期观察到这一现象与“附加质量效应”和压力调制作用相关，在火箭燃料箱等工业应用中意义重大 [2][27]。相关研究还分析了气泡下沉的临界条件，指出初始深度和振动频率是关键参数。近期研究甚至发现振动悬浮的液体层可产生“反向阿基米德力”，让物体在倒置界面稳定悬浮 [30]。从科学价值而言，液体悬浮现象深度关联非线性振动响应、气液多相流动力学及界面波动理论 [6][9]，是验证“振动调制连续介质平衡态”理论的典型载体，深入解析其耦合机制对推动相关理论发展、为非线性系统稳定性分析提供新范式以及理解复杂流体系统行为规律具有基础性支撑作用。

不过现有研究在揭示液体悬浮物理机制方面仍存在一些局限：一是缺多变量数据，难解析振动 - 气泡 - 容器形态协同的耦合机制，无法精准预测液层失稳；二是气泡动力学观测空白，未量化气泡行为对界面稳定性影响，缺理论关键参数；三是复杂场景普适性验证不足，实验场景单一，现有理论很难验证不同条件下普适性，所以我们也不禁提出了许多疑问，若引入异形容器，振动、气泡与容器形态的协同作用会呈现怎样的新规律？高频环境中，如何补齐多变量数据，让理论模型精

准预判液层失稳？气泡动力学层面，怎样突破定性观测，量化气泡行为对界面稳定性的影响，填补理论关键参数空白？面对异形管道、多相混合液等真实复杂场景，又该如何验证理论普适性？这些问题驱动我们突破现有局限。基于此，本文旨在解析高频振动、气泡行为、容器形态的协同机制，量化气泡轨迹、液层动态响应的关键参数，验证复杂场景下规律的普适性。整体思路以构建“振动参数-气泡行为-容器形态-液体属性”联动体系展开，再结合高速成像等手段精准观测气泡动力学，通过“气泡振动模型 + 液层弹簧-质量模型”分层解析实现理论与实验的深度整合。

我们主要围绕液体悬浮的多因素耦合机制展开系统研究，遵循“理论建模 - 实验支撑 - 规律解析”的递进逻辑推进。具体安排如下：第二章聚焦理论构建，先分别搭建气泡振动、液层运动的子模型，再将二者整合，形成多场耦合的理论分析框架，为后续研究奠定基础；第三章系统探讨了液体界面与浮体在垂直振动作用下的稳定性问题。涵盖了从基本模型与界面动力学，到 Kapitza 效应引发的稳定机制，再到浮体在动态振动环境中的平衡与修正，旨在揭示振动如何改变重力主导下的传统稳定性判据，并建立统一的理解框架；第四章则依托实验数据，对理论模型进行验证，深入解析气泡与液层的耦合作用机制，同时探究该规律在复杂场景下的普适性。通过这样环环相扣的结构，系统阐释液体悬浮现象背后的多物理场协同规律，为非线性流体系统稳定性研究开拓创新视角。

2 悬浮液体与气泡下沉的理论机制

在液体中，气泡的运动受到多种力的作用，主要包括重力，拖曳力，周围流体的相互作用力。在本部分中，我们将建立气泡运动的数学模型与悬浮液体层的弹簧-质量模型，推导各类力的表达式，并讨论其相互作用对气泡行为的影响。因此我们从两种典型模型出发进行理论分析。这两种情形虽然物理场景不同，但其数学特征均表现为受迫振动系统，并在适当近似下可归纳为相似的共振响应问题。

2.1 气泡在液体中的振动模型

2.1.1 系统设定与假设

第一个模型是描述气泡在振动液体中运动的动力学模型，我们将聚焦气泡的受力机制与运动规律，结合经典力学和流体力学理论，推导气泡在振动环境下的运动方程，分析浮力、阻力、周围流体的相互作用力等对其运动状态的影响。

首先，我们假设气泡为球形、可压缩并且遵循等温过程。液体被假定为不可压缩且具有一定的密度 ρ 。此外，考虑到实验条件下的振荡频率远大于气泡的运动惯

性，假设气泡的运动属于高频振荡行为，因此可以忽略气泡体积变化的非线性影响。系统的主要假设包括：

- 气泡为球形，体积和表面积与气泡半径 R 相关；
- 液体为不可压缩的；
- 仅考虑气泡受到的浮力、附加质量、拖曳力以及外部激励力的作用；
- 液体振荡频率远大于气泡惯性，因此可视为高频振荡。

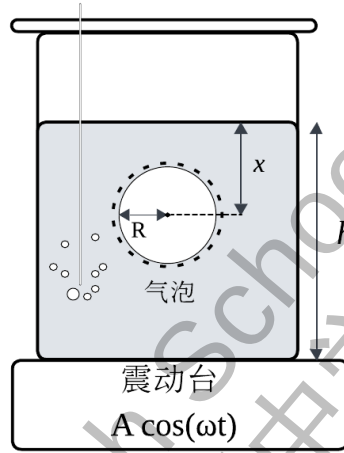


图 1: 竖直振动液柱中气泡的示意图。容器安装在振动台上，并受到简谐竖直激励 $A \cos(\omega t)$ 。液体高度为 h ，气泡半径为 R ，气泡球心距自由液面的距离为 x 。

2.1.2 受力分析与控制方程

在液体中，气泡所受的主要力包括重力，拖曳力，周围流体的相互作用力 [28]。首先，通过牛顿第二定律可以建立气泡的运动方程。假设气泡在垂直方向上的位移为 $x(t)$ ，则气泡的运动方程为：

$$(m + m_0)\ddot{x} + m_0\dot{x} = -F_d + (m - \rho V)(A\omega^2 \sin(\omega t) + g) \quad (1)$$

其中， m 表示气泡的固有质量， m_0 为附加质量，定义为 $m_0 = \frac{1}{2}\rho V$ ，反映了周围液体随气泡加速所带来的惯性效应。 F_d 表示作用于气泡的粘性阻力，其表达式为：

$$F_d = \frac{1}{2}\rho \dot{x}^2 C_d A \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad (2)$$

其中 C_d 是阻力系数， A 是气泡在运动过程中所对应的投影面积。参数 A 与 ω 分别为容器振荡的振幅与角频率， g 表示重力加速度。 V 为气泡体积，其与气泡半径

R 之间的关系体现了气泡几何形态对体积和所受浮力的影响, 可表示为:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (3)$$

为了完善气泡运动的数学模型, 必须要明确气泡体积如何随外部压力变化。根据流体力学基本原理, 气泡体积与外界压力密切相关。由于热量交换速度对应的时间远快于气泡运动的特征时间, 其体积变化过程可视为恒温过程。根据理想气体状态方程, 气泡体积与外部压力满足以下关系:

$$PV = P_0 V_0 \quad (4)$$

由此得出:

$$V = V_0 \left(\frac{P_0}{P} \right) \quad (5)$$

其中, P 表示气泡所处深度 x 处的液体压力, P_0 为气泡在液体自由表面时所受到的压力, 通常可近似取为大气压。 V_0 是气泡在表面压力 P_0 下的体积, 而 V 则为气泡在深度 x 处受到压力 P 时的体积。上述参数刻画了气泡随深度变化的受压收缩行为, 是建立气泡体积与压力关系方程的重要依据。

2.2 悬浮液体层的弹簧-质量模型

基于上述对微观气泡可压缩性的分析, 我们可以将这一物理本质推广至宏观尺度, 把整个空气层等效为一个线性弹簧。任何被气体占据的空腔在压力作用下都会表现出可压缩的、类似弹簧的弹性行为。基于这一物理原理, 我们可以将支撑着悬浮液体层的整个空气层抽象为一个理想弹簧, 从而建立一个更为简洁和直观的弹簧-质量模型来研究系统的整体动力学特性。

2.2.1 空气层的状态方程

我们考虑一个通过竖直振动维持在空气层上的液体层。在实验室参考系中, 空气层的底界面随容器运动, 其位置为:

$$z_b(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (6)$$

其中 A , ω 和 ϕ 分别为振动的振幅、角频率及相位, 空气层上界面的瞬时位置为 $z_l(t)$, 则空气层厚度为:

$$z_a(t) = z_l(t) - z_b(t) \quad (7)$$

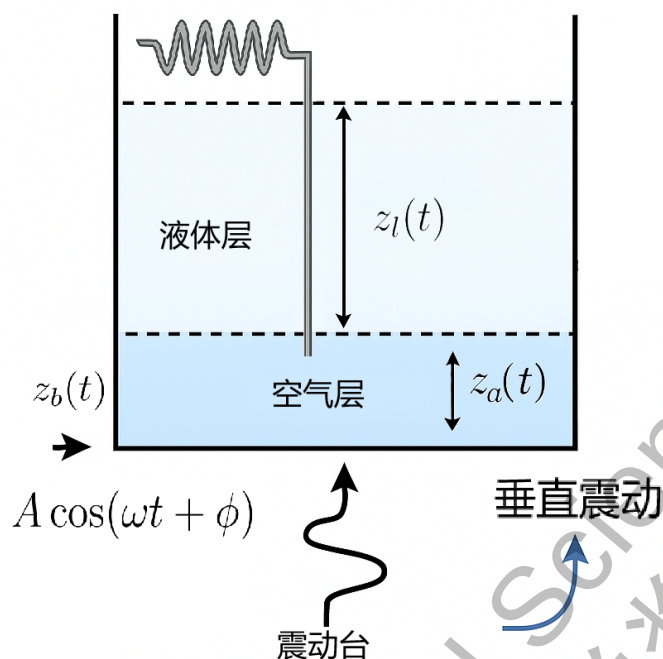


图 2: 液体-气体分层体系在竖直振动下的示意图。容器底部由振动台驱动, 产生简谐竖直振动 $A \cos(\omega t + \phi)$ 。体系中包含液体层和气体层, 厚度分别随时间变化为 $z_l(t)$ 与 $z_a(t)$, 底部位置为 $z_b(t)$ 。

空气层被视为理想气体, 其压力 $P(t)$ 与体积 $V(t)$ 满足多方过程关系 [20]:

$$P(t)V(t)^\beta = P_0V_0^\beta, \quad (8)$$

其中 β 为多方指数 (等温过程 $\beta = 1$, 绝热过程为气体比热比), $P_0 = P_{\text{atm}} + mg/S$ 为静止时气压 (含液体重量), $V_0 = Sh_0$ 为静止体积。在小振幅近似下 ($z(t) = z_a(t) - h_0 \ll h_0$), 进行泰勒展开, 得到:

$$P(t) \approx P_0 \left(1 - \frac{\beta z(t)}{h_0} \right) \quad (9)$$

上述公式表明液体层上方的空气起到了类似“气体弹簧”的作用。由于空气的可压缩性, 其体积随液体运动而变化, 导致气压变化, 从而对液体产生恢复力。这种恢复力来源与经典弹簧相同, 但其“刚度”由气体的压强、压缩指数及初始厚度共同决定。因此, 该系统可视为受控气体弹性对液体层产生作用的原型模型。

2.2.2 液体层的运动方程

上一部分聚焦于气体行为的数学描述 (气压-体积关系), 而这部分将这一结果转化为力学模型 (运动方程), 也就是第二个模型: 液体层在空气层上方形成的“气体弹簧 - 质量”系统, 我们会从连续介质力学角度出发, 探究空气层的可压缩性如何为液体层提供类似弹簧的弹性支撑, 建立液体层与空气层相互作用的动力

学方程，揭示二者耦合下的振动响应特性。对液体层施加牛顿第二定律，然后代入气体压力表达式后简化：

$$m\ddot{z}_l = -mg - SP_{\text{atm}} + SP_0 \left(1 - \frac{\beta z}{h_0}\right) - c\dot{z} \quad (10)$$

这可以重写为阻尼驱动谐振子形式：

$$\ddot{z} + 2\Gamma\omega_{\text{res}}\dot{z} + \omega_{\text{res}}^2 z = -\ddot{z}_b \quad (11)$$

而液体在实验室参考系中的运动解为：

$$z_l(t) = A_l \cos(\omega t + \phi_l) \quad (12)$$

其中 c 表示由液体与容器间相对运动引起的阻尼， $\omega_{\text{res}}^2 = \beta P_0 S / (mh_0)$ 、 $\Gamma = c / (2m\omega_{\text{res}})$ 。液体层受到上方气压与自身重力的共同作用，其运动方程显示出典型的受迫阻尼谐振子结构。其中驱动力由容器振动产生的惯性项引入，阻尼项反映了液体与容器之间的粘性相互作用。这一模型不仅揭示了液体响应频率的选择性，还为后续的共振响应分析提供基础。

2.2.3 相对振幅与相位

在前面的讨论中，我们已经建立了液体运动的数学模型，描述了液体在激励下的动态行为。接下来，我们将进一步探讨液体表面波动的性质，尤其是液面与气泡之间的相互作用关系。为此，我们将通过解析液体的相位差和相对位移等特性，进一步深入分析液体的运动响应。

首先，考虑到液体表面波动的频率和幅度对整个系统的影响，我们采用了经典的相对位移表达式（见公式 (12)）。这为后续的相位差和相对振幅关系的分析提供了基础。

其相对振幅以及相对相位为：

$$\frac{A_l}{A} = \sqrt{\frac{1 + 4\Gamma^2\hat{\omega}^2}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\Gamma^2\hat{\omega}^2}}, \quad (13)$$

$$\phi_l - \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\Gamma\hat{\omega}}{1 - \hat{\omega}^2} \right), \quad (14)$$

其中 $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{\text{res}}}$ 。

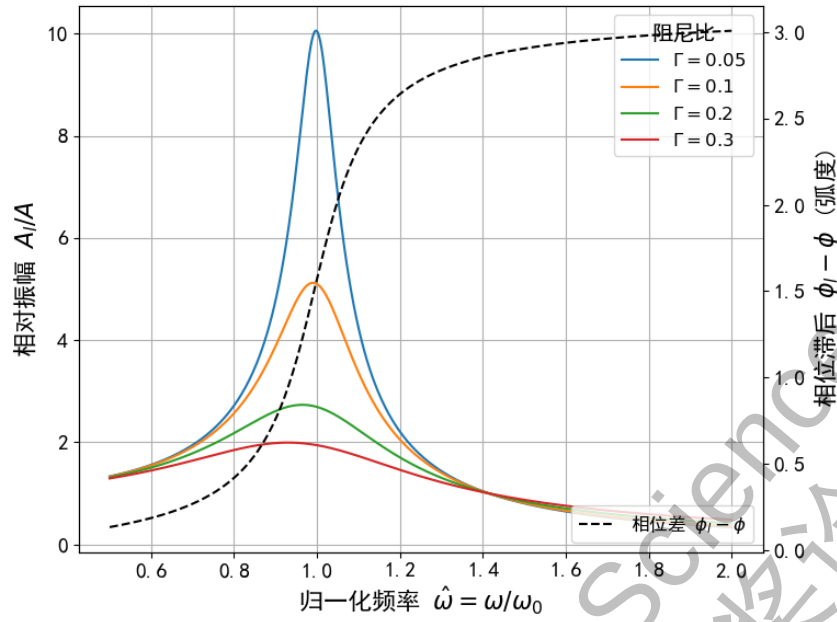


图 3: 阻尼驱动振荡器的共振响应。图中展示了不同阻尼比 $\Gamma = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ 下的相对振幅 A_l/A 随归一化频率 $\hat{\omega} = \omega/\omega_0$ 的变化。虚线为相位差 $\phi_l - \phi$ 。随着阻尼增加，共振峰降低并展宽。

图 3 对比了不同阻尼比下系统的频率响应曲线。从图中可以清晰观察到：在低阻尼比 $\Gamma = 0.05$ 的情况下，系统在归一化频率 $\hat{\omega} = 1$ 附近出现显著的共振峰；随着阻尼的增大，响应幅值减弱且变得更为平缓。同时，相位差的变化也表明：系统在共振区域内从 0 向 π 的过渡范围受阻尼影响而变宽。

2.3 模型比较与统一框架

尽管 2.1 中从气泡动力学模型角度出发和 2.2 中从悬浮液体层模型的角度出发分析恢复机制的问题看似不同，一个由浮力驱动，另一个由气体压缩驱动，但是它们在小扰动线性化后却呈现出了数学上的统一性。这一统一性意味着不同物理背景下的系统可以用相同形式的动力学框架描述，从而揭示出它们的共振行为、响应特性乃至稳定性控制的共通规律 [26]，这也为理解更复杂的界面失稳 [15] 提供了理论基础。

通过上述推导可以看出，气泡动力学模型与悬浮液体层模型尽管所处物理环境不同，但在小扰动条件下均可被表示为：

$$\ddot{\xi} + 2\Gamma\omega_0\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = F_{\text{ext}}(t) \quad (15)$$

其中， ξ 分别为气泡质心位移或液体层相对位移。此方程描述了系统在周期性驱动下的稳态振幅与相位响应，其共振峰值及相位滞后均取决于阻尼比 Γ 与频率比 $\hat{\omega} = \omega/\omega_0$ 。

此外，气泡模型中 ω_0 主要由浮力与附加质量决定，而悬浮液体层模型的 ω_0 则由气体弹簧刚度与液体质量比值决定，体现了不同的物理恢复机制。

3 悬浮液体的实验探究

为检验理论模型并研究竖直振动对液体中气泡行为及悬浮液体层稳定性的影响，本实验设计了一个精确的实验装置。实验装置的核心部分包括一个激振台、透明容器、注气针头、高速相机和调频控制系统，能够在不同的振动条件下精确控制液体和气泡的动态响应。图4展示了液体层成功悬浮的画面截图。

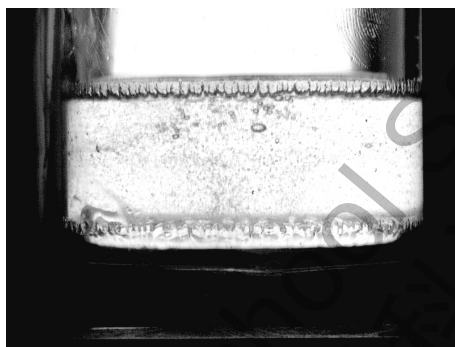


图 4: 液体层成功悬浮的示例现象图。

3.1 实验装置与设计

实验装置的主要结构如图5所示，容器内盛放着硅油，液体深度为 d ，容器的宽度为 L 。容器固定在一个激振台上，激振台提供竖直方向的简谐振动，振动幅度为 A ，振动频率为 ω 。容器通过振动产生的竖直运动模拟振动环境对液体和气泡行为的影响。在振动过程中，容器内的液面随着振动幅度和频率的变化发生动态波动。

在液体表面，利用注气针头注入微小气泡，模拟气泡在振动液体中的运动。高速相机用于实时记录液体和气泡的运动过程，捕捉不同实验条件下的液面扰动和气泡的动态响应。调频控制系统用于精确调节振动的频率和幅度，以确保实验在所需的参数范围内进行。

在明确了实验装置与设计后，接下来将聚焦于实验参数的选取以及数据采集的相关工作，以此保障实验的有序开展与结果的可靠获取。实验中的关键参数包括液体的性质、振动频率、气泡注入的气压、液体的体积、容器形状及大小等。具

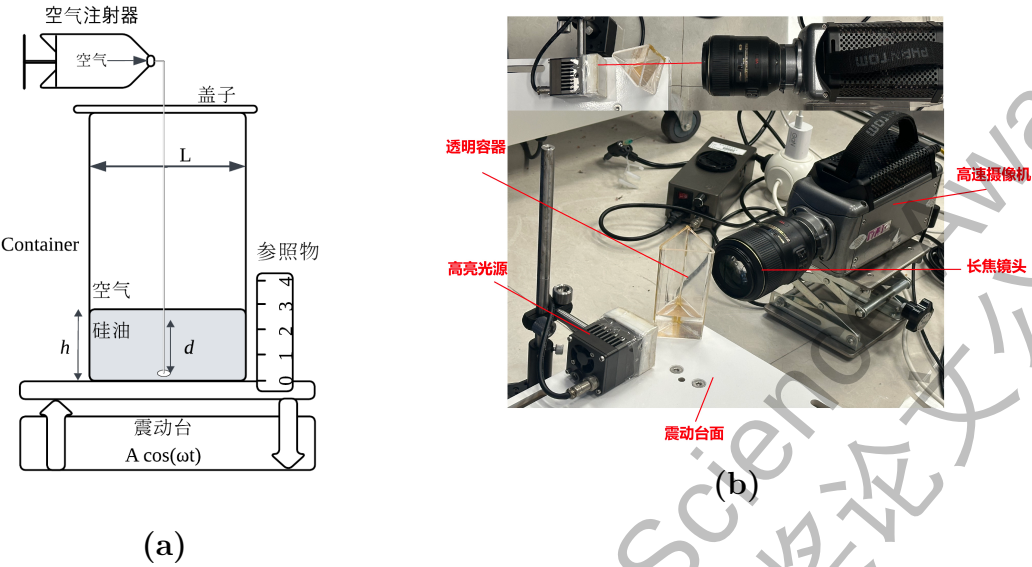


图 5: 实验装置示意图 (a) 与具体实验场景 (b)。(a) 为实验装置的整体示意，装置由盛放硅油与空气的容器组成，硅油深度为 d ，容器宽度为 L ，并固定在震动台上，施加竖直简谐振动 $A \cos(\omega t)$ 。(b) 为具体实验场景，图中展示了高速摄像机、振动台以及背后的高亮光源。

体的实验参数设置如下：

参数	符号	数值范围	描述
初始高度	H_0	0.5 m	硅油液体的初始高度
振动幅度	A	2 mm	激振台施加的振动幅度
初始半径	R_0	2.9 mm	气泡的初始半径
振动频率	ω	80 – 150 Hz	振动频率的范围

液面位移是本实验的关键观测指标之一，使用高精度刻度尺记录液面位移的动态变化。在不同振动幅度和频率下，液面表现出不同的波动行为，这反映了液体在垂直振动作用下的响应特性。液面扰动通过注入压缩空气来生成，气泡的生成和随振动的运动模式与注气的气压、流速等因素密切相关。通过调节气压和流速，可以模拟不同类型的气泡，并观察它们在振动液体中的动态变化。

进行数据采集时我们先直接用手机捕捉现象，但是其时间分辨率不够，在空间上它的取样采样的距离比较远，所以我们必须得用高速相机对它进行捕捉。高速相机可以对它局域进行聚焦，并且在一个比较高频的采样率下去看清楚它的运动 [14]。高帧率确保了液体和气泡在高频振动下的运动过程能够清晰记录，特别是在气泡浮动、下沉及液体波动等关键现象的瞬时状态。图像序列提供了液体和气泡在不同时间点的位置和速度信息。我们对图像数据进行处理，提取气泡的运动轨迹和液面变化参数，并结合振动频率、振幅等实验参数进行分析。

每组实验重复进行了三次，实验数据的可靠性通过多次实验结果的对比得到保证。使用 Python 和 Tracker 软件提取视频数据，分析气泡的轨迹和液面位移等动态参数。这些数据与理论模型进行对比，有助于揭示气泡运动规律并验证理论模型的准确性，分析其中可能存在的偏差或局限性。

3.2 实验现象与分析

3.2.1 理论模型的实验验证与有效性分析

首先，为了验证液层整体是否能够视作一个受迫阻尼谐振子(如理论推导 2.2.3 所示)，我们改变驱动频率，进行了逐点扫描，测量了液面相对于底板的振幅比与相位差。

如图 6 所示，实验数据与理论模型给出的幅频与相频响应曲线吻合良好。在归一化频率 $\omega/\omega_{\text{res}} \approx 1$ 附近，振幅出现明显峰值，相位迅速跨越 $-\pi/2$ ，这是典型的谐振特征。

通过拟合峰值位置和相位跨越点，我们能够稳健地反推出系统的固有频率 ω_0 与阻尼系数 Γ 。进一步地，根据幅值增益 A_l/A_0 ，在目标频率下即可得到液面的实际速度幅值 $A_l\omega$ ，这一结果将作为后续 Kapitza 稳定性分析的关键输入参数。

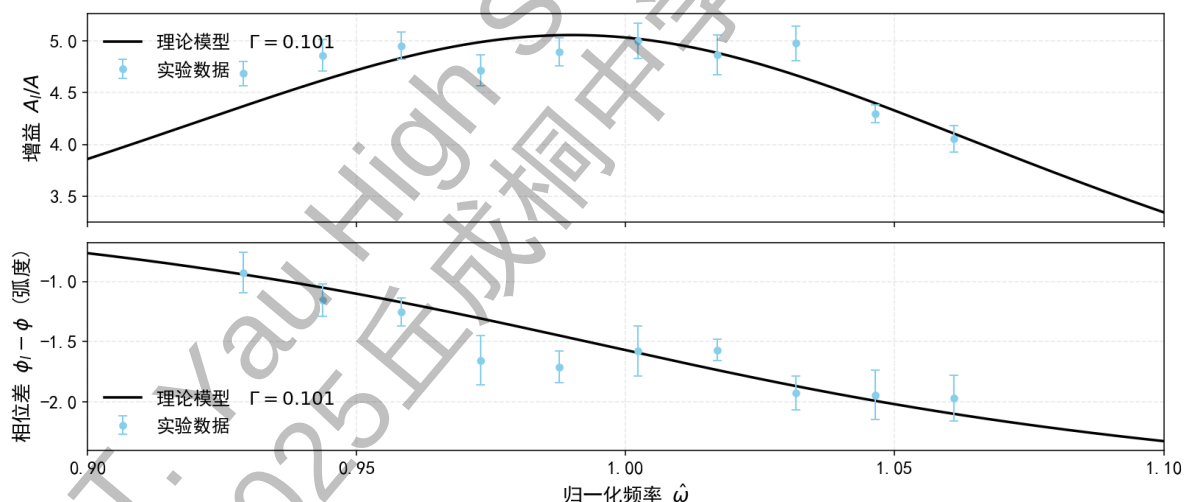


图 6: 液层整体的幅频与相频响应特性。上图：归一化振幅增益 A_l/A_0 随归一化频率 $\omega/\omega_{\text{res}}$ 的变化。蓝色曲线为受迫阻尼谐振子模型预测，橙色点为实验测量，误差条由峰-峰值提取与像素标定不确定度得到。下图：液层相位差 $\phi_l - \phi$ 随频率变化。红色曲线为理论预测，蓝色点为实验结果。可以看到实验数据与理论曲线在峰值位置和相位跨越区间均吻合，从而验证了模型的有效性。

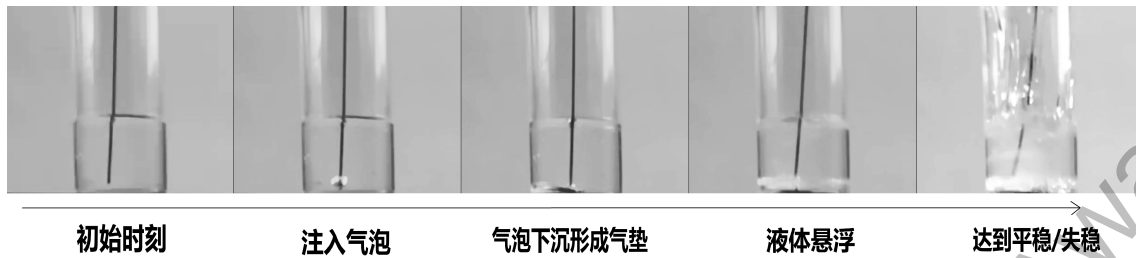


图 7: 气泡下沉，空气层形成及托举液体的悬浮运动机制时序图

3.2.2 气泡下沉 - 液体迁移 - 空气层托持的联动机制

在静态液体中，气泡因自身密度远小于液体密度，受阿基米德原理作用下的浮力主导而自然向上运动；但当液体处于垂直周期性振动状态时，振动会使液体在垂直方向反复加速、减速，进而产生非稳态惯性力场，此时密度更小的气泡因惯性响应滞后于液体，在振动压缩阶段会受到液体向上运动带来的向下挤压，拉伸阶段又会被液体向下运动形成的流场阻碍上浮趋势，当振动诱导的向下惯性力时间累积效果超过浮力，且振动激发的非线性流场进一步对气泡产生持续拖拽后，气泡的运动方向便从自然上升转变为受迫下沉，如图 7 左侧两张图便清晰地展示了在外部垂直振动下气泡下沉的过程。

当气泡到达容器底部后，它们并不会立即静止，而是在液体振动的作用下经历一系列动力过程。首先，气泡在底部的液体膜中受到周期性压缩与拉伸，液体的振动使气泡在水平面上轻微移动并相互靠近。随着时间推移，邻近气泡会因表面张力和薄液膜排斥力作用发生合并，逐渐形成较大的气团。与此同时，振动导致底部气泡层的液体被周期性“挤压”，使气泡扩展并铺展成薄层，同时液体表面张力限制了气泡破裂，最后所有下沉的气泡便形成了托举液体层的气垫，如图 7 中位于中间的图像。这个过程中，气泡层表现出局部振荡和微观流动，但整体厚度保持相对稳定，最终形成持续存在的空气层。

当底部空气层形成后，液体并非静止地覆盖在其上，而是在外部垂直振动下呈现周期性的起伏运动。空气层因密度远低于液体，表现为高可压缩性缓冲区，在振动加速度周期性变化时吸收并释放部分动能，从而起到“气体弹簧”的作用。这一过程使得液体层被支撑在空气层之上，不会立即塌陷与固体底部接触。具体而言，在振动加速度向下时，液体受到惯性驱动趋于下压，但空气层被压缩后产生恢复力，将液体重新顶起；在振动加速度向上时，液体因瞬时减重而产生上浮趋势，空气层则随之扩展，进一步稳定界面。由此，液体和空气层之间形成了一种周期性交互，空气层托举并缓冲液体的运动，使得气液界面在宏观上维持稳定悬浮状态，此时的状态与图 7 中左侧第 4 张图一致。

观察最后一张图像会发现悬浮液体的最终结果是失稳，这里只是实验中的一种失稳现象。其失稳的根本原因在于该系统本质上是一个“重上轻下”的不稳定结构（即密度更高的液体位于密度更低的气体之上）。任何微小的界面扰动都会触发瑞利-泰勒不稳定性，导致气泡气垫发生变形、形成指状气流并快速向上逃逸；同时，上方的液体则寻找通道向下沉降。这种不稳定性会自我放大，使得气垫无法均匀地支撑液体重量，最终导致气垫破裂、悬浮结构彻底崩溃，系统迅速回归到液体在下、气体在上的稳定状态。正是这类复杂多样的失稳现象，构成了本研究深入的驱动力与关注的焦点，促使我们对后续液面的失稳过程展开了极为细致的分析与探究。

3.2.3 实验现象总体分类

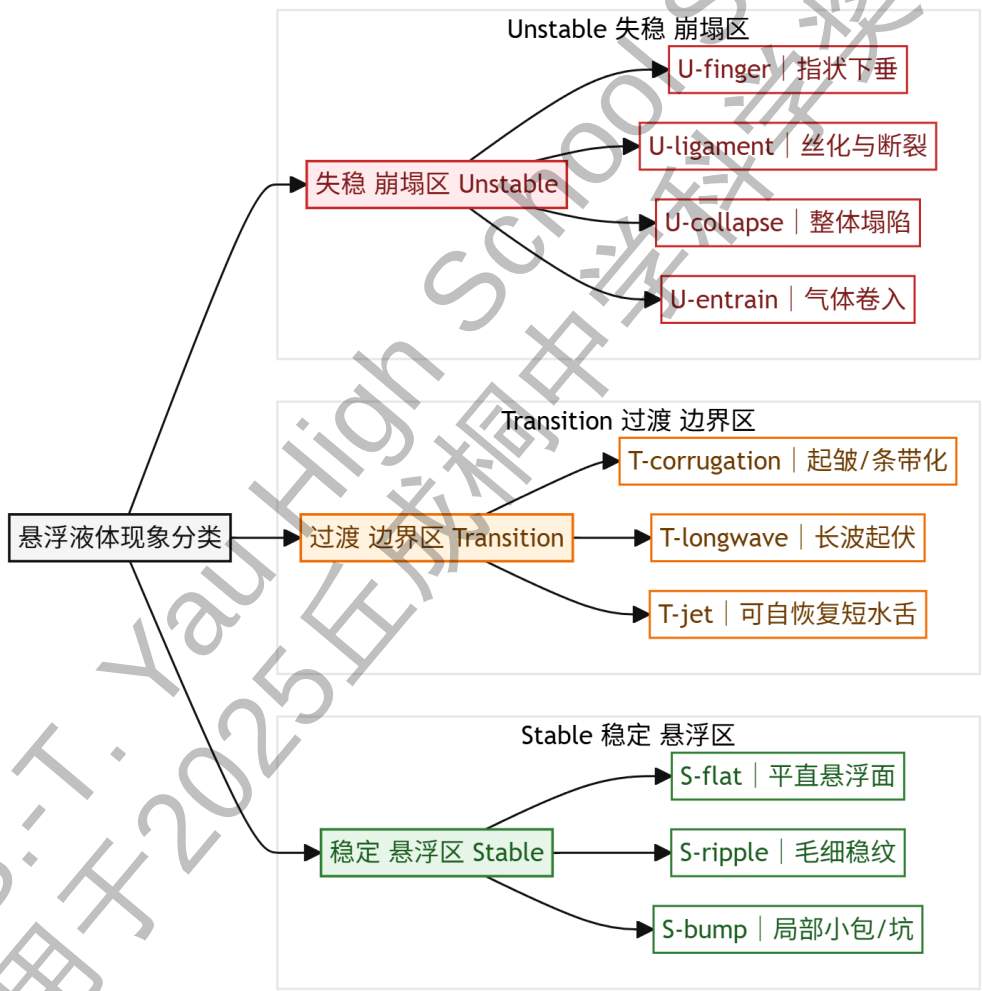


图 8: 悬浮现象三层分级图（稳定/过渡/失稳）。

如图 8，我们将悬浮液体界面形态按稳定性与空间尺度划分为三大类、十个子类：Stable 类中，S-flat 表现为几乎水平且起伏极小的界面，是基线态；S-ripple 为短波毛细纹，波长显著小于槽宽且振幅随时间近似恒定；S-bump 为孤立的局

部隆起/凹陷，横向尺度有限，不扩展成长波。**Transition** 类处于失稳门槛附近：**T-corrugation** 沿边界出现串珠式起皱；**T-longwave** 为跨槽的低波数起伏，振幅缓慢增长；**T-jet** 表现为短而钝的“水舌/喷溅”，可在数帧—十余帧内自恢复。**Unstable** 类进入强非线性演化：**U-finger** 多根指状下垂并持续生长；**U-ligament** 界面被拉成细丝并出现颈缩、断裂与卫星滴（这种由拉伸流和表面张力竞争导致的破裂过程与文献 [16] [17] 中报道的机理一致）；**U-collapse** 整体大幅塌陷与翻卷，难以回复；**U-entrain** 伴随混合产生密集小气泡或气泡带。以上分类使我们后续对悬浮液体层的定量研究有了更加明确的方向，我们进一步通过定性控制外界因素，来观察液体层的悬浮与悬浮状态。所有子现象分类都由图9 清楚展示出。

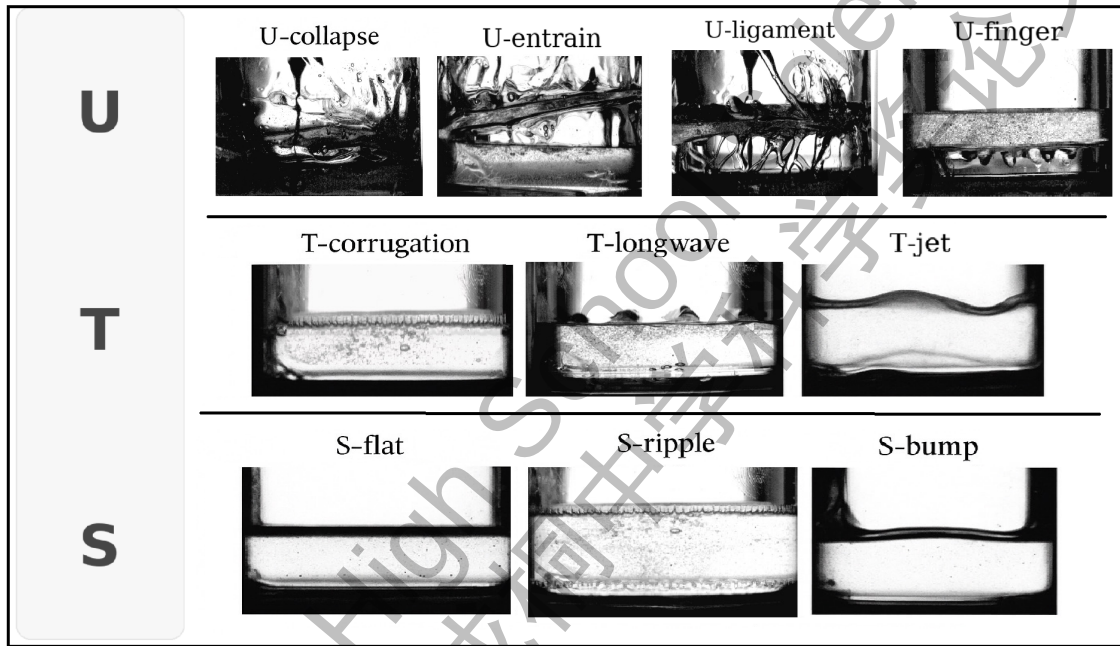


图 9: 竖直振动下悬浮液体层的典型形态（基于现象分类）。

如表 1 所示，增大垂直振动强度 $A\omega$ 与表面张力 σ 具有显著的稳态化效应：短波扰动被抑制或仅以边界起皱的 **T-corrugation** 形式存在，体系更易停留在 **S-flat**/**S-ripple**。黏度 μ 的提升进一步增强耗散，使细颈难以形成，典型表征为短促且可回吸的 **T-jet** 取代持续性的指化/丝化过程。与之相对，密差（Atwood 数 A ）的增大以及低波数初始扰动的注入共同提升长波模态增益，先表现为 **T-longwave** 的缓慢放大，随后演进为 **U-finger** 乃至整体塌陷的 **U-collapse**。外加气体通量（或过注入）改变界面动量与压差平衡，轻度时触发可自恢复的 **T-jet**，通量继续上升则产生气体卷入 **U-entrain** 并显著加快进入失稳区。接触线可动性（润湿滞回减小）在稳态下有助于界面自整化（**S-ripple** 更常见），但在临界附近会将能量聚焦至壁面，使指化/丝化/卷入优先在边界发端，体现“稳—险”双重效应。综合来看，高 σ + 高 μ + 适度 $A\omega$ 构成稳态化参数组合；而大密差、显著低 k 成分与高通量注入则开启由 **T-longwave** 向 **U** 类失稳的主通道。

控制/环境因素 (↑ 增强)	稳定/悬浮区倾向	过渡区倾向	失稳/崩塌区倾向	备注 (判别抓手)
$A_l\omega$ (垂直振动强度) ↑	S-flat / S-ripple	T-corrugation	(稳定化) 抑制	阈值 $A_l\omega \gtrsim gL/\pi$ 时更稳定
表面张力 γ ↑	S-ripple	T-longwave 降低	U-finger / U-ligament 降低	短波更稳定, 长波趋弱
黏度 μ ↑	S-flat	T-jet 降低	U 类降低	耗散增强; 飞溅/丝化更难发生
Atwood 数 A (密度差) ↑	—	T-longwave 增强	U-finger / U-collapse ↑	低波数增长率 $\sigma(k)$ 增大
外加气体通量/过量注入 ↑	—	T-jet / T-corrugation	U-entrain / U-collapse ↑	质量通量破坏平衡, 易卷气入液
接触线可动性 (润湿滞回小) ↑	S-ripple	A-CL 频繁	U 类可能被壁面诱发	墙面观测与接触线轨迹尤关键
初始扰动幅度 / 低 k 成分 ↑	—	T-longwave	U-finger / U-collapse ↑	关注早期 $\sigma(k)$ 的正负与大小 (线性段拟合)

表 1: 控制与环境因素对不同现象带的倾向性影响与判别抓手。箭头“↑”表示该因素增强, “—”表示无明确倾向或弱相关。

区分各区带的关键可观测量包括: 低波数带能量及其时间增长率 (判定 T-longwave $\rightarrow$ U-finger/U-collapse 的门槛), 最小颈径 $d_{\min}(t)$ 与断裂事件频率 (识别 U-ligament)、边界窄带谱峰与珠链计数 (T-corrugation), 以及气泡体积分数与粒径谱 (U-entrain)。基于上述抓手, 可将表中“因素 $\rightarrow$ 形态”的关系映射为可量化、可复现实验流程与自动化判别准则。

通过建立以上现象分类机制, 我们将要继续研究实验中最常见的一大类现象——失稳。通过研究这一机制, 我们对于液体悬浮的理解将会由很显著的提升。

4 液体层失稳的实验观察与理论解释

4.1 实验中的液体失稳现象

在上一节, 尽管我们对所有现象进行了定性描述, 但我们发现液体表面更多呈现以下四种状态。图10概括了在液-气双层体系受垂直振动驱动时的四类典型界面响应, 并与本文提出的“Stable-Transition-Unstable”十分类一一对应: 面板 (a) 表现为几乎水平、起伏方差极小的界面, 属于稳定区的 S-flat 基线态; 面板 (b) 同时出现的上下界面缓慢“呼吸”对应过渡区的 T-longwave, 其谱能量集中于低波数并随时间缓慢抬升, 是向失稳演化 (如 U-collapse) 的前兆; 面板 (c) 上表面在局

部过压或通量作用下形成短而钝的可回吸水舌，首先对应 T-jet，当扰动加强时伴随大量微小气泡在近界面聚集，进入失稳区的 U-entrain；面板 (d) 则由下表面向气层持续贯入，形成多根等间距的指状突进，典型的 U-finger。综合来看，图10从稳态 (S-flat)，经长波门槛附近的可逆起伏 (T-longwave)，到两条代表性的失稳通道——“上表面注入：T-jet $\rightarrow$ U-entrain”与“下表面指化：U-finger”——完整展示了振动与通量共同作用下的形态迁移路径；其判据可由低波数谱能量的时间增长率、局部外延长度/最小颈径的瞬态变化以及气泡体积分数与粒径谱的跃升来量化。

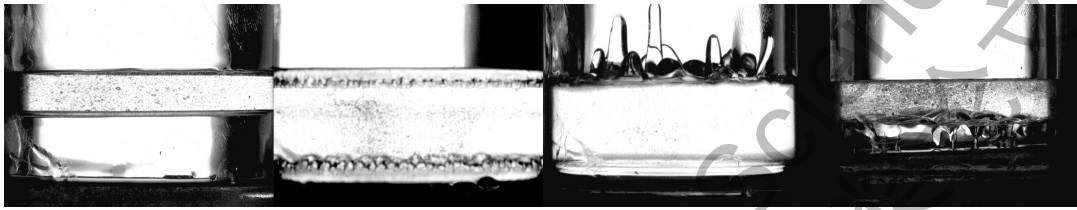


图 10: 在液-气双层体系中，竖直振动下出现的典型界面形态。(1) 界面稳定；(2) 上下界面同时不稳定；(3) 上表面不稳定，伴随液体喷射与气泡卷入；(4) 下表面不稳定，形成指状结构侵入气层。

我们还发现了另外一种上表面的现象，如图11呈现，类似于 10 分类中的 T-Jet。在外界瞬态激励作用下，液体自由表面发生快速响应：初始阶段（左侧帧）液面整体近似平直，仅在界面处出现由剪切与惯性耦合诱发的细小涟漪与条带状结构；随后（中间帧）界面上方形成局部的轴对称微小凸起，其高度随时间迅速增长并达到峰值，伴随界面附近的强对比条纹，表明界面处存在显著的速度梯度与曲率变化；再往后（右侧帧），峰值逐步衰减并向周围扩散，凸起高度下降且界面逐渐回归平整。整体过程中，液面形貌的演化体现了惯性-表面张力-黏性三者之间的竞争：惯性驱动界面上拱，表面张力尝试将界面拉平，而黏性耗散控制着涟漪与凸起的衰减速率。该序列清晰呈现了“生成—增长—衰减”的典型时序特征，为后续对峰顶高度、液面基准线及其差值随时间的定量分析提供了依据。

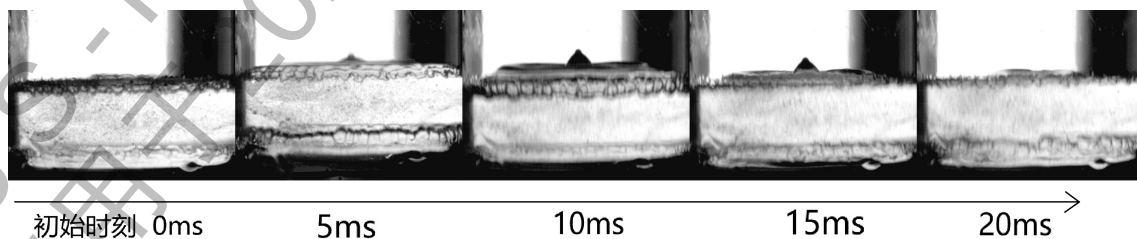


图 11: 液面凸起演化的时序可视化。图中为过程中抽取的五帧按时间顺序横向拼接（每一次画面捕捉间隔 5 帧，每一帧间隔约为 1 ms）。每帧展示了外界激励作用下液面附近的界面形貌变化与上表面小尺度凸起的形成与衰减过程。

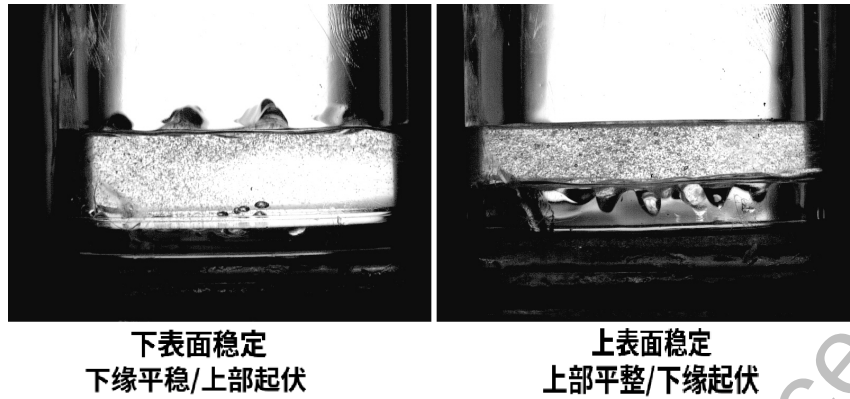


图 12: 实验中观测到的液体界面失稳现象：左侧为上界面起伏引发的失稳状态，右侧为下界面起伏引发的失稳状态。

我们不仅观察到了如前所述的“生成—增长—衰减”的由剪切与惯性耦合诱发的细小涟漪与条带状结构，还观察到了上下界面失稳的另一种形式，并且表现为两种状态，如图12所示：一方面是上界面出现跨槽的低波数起伏而下界面稳定；另一方面是下界面出现类似的起伏而上界面稳定。值得注意的是，上下界面的失稳方式存在相似性，当发生失稳时，都会形成类似于水滴型的结构，这类起伏属于分类中的 T-longwave。在 T-longwave 失稳状态下，液体形成水滴形结构，是多因素共同作用的结果。表面张力本想维持界面稳定，可外界干扰打破平衡后，其分布不均，让液体局部拉伸聚集，成了水滴形雏形；液体内部复杂的流动，像对流造成界面压力不均、涡旋改变流动方向速度，都加剧了界面变形；重力与浮力因液体密度不均和界面变形失衡，垂直运动和其他效应耦合，推动界面调整成水滴形；还有外界扰动，频率若和系统固有频率共振，或强度足够，也会增强波动变形，加速水滴形结构形成。



图 13: 从左至右按时间顺序依次呈现液面状态的动态演化过程，清晰展现了液体在特定条件下，从初始相对稳定的界面形态，逐步发展到最终发生失稳的复杂流体动力学现象，为研究液体界面失稳机制提供了直观且连续的视觉依据。

除此之外，我们还观察到了一种很复杂的失稳破裂现象，如图13所示。液体的上界面属于上述的 T-longwave 状态，下界面又属于 U-ligament 失稳状态，十分的复杂。按时间顺序逐步分析发现，当对液体进行气体注射操作时（左侧帖），气体的注入会直接干扰液体内部原本稳定的压力场，使得液体上表面原本由表面张力和重力共同维系的平衡状态被打破。表面张力本就有让液体表面积收缩的天然趋势，此时重力又持续推动液体向下运动，再加上气体注入引发的液体内部对流效应，对流带动液体流动，导致上表面不同区域所受作用力变得不均匀，这种不均匀进一步加剧了界面的波动情况。在表面张力的主导作用下，上表面的波动逐渐演化，最终形成了（右侧帖）相对规则的水滴状凸起形态。

与此同时，在液体的下表面，气体注入过程中会在液体与周围环境（像容器壁等接触部位）的交界处产生剪切力。而且，液体内部因对流产生的拉伸作用，会持续地将下表面的液体逐渐拉成细丝状，刚开始的丝状还处于比较粗的状态（中间帖）。随着拉伸过程的持续进行，细丝的直径会不断变小，也就是出现了颈缩现象（右边帖）。而根据瑞利 - Plateau 不稳定性理论，这种细长的丝状液体结构是极不稳定的，因为表面张力始终倾向于让液体的表面积最小化，可细长的丝状结构表面积相对较大，不符合表面张力的“诉求”。当颈缩到一定程度后，细丝就会在某个相对薄弱的位置发生断裂，断裂后会形成小液滴。并且，在断裂的瞬间，由于周围液体的流动状态以及表面张力的后续作用，部分小液滴可能会再次出现聚集或者分裂的情况，进而产生更小的液滴，这些更小的液滴就是我们所说的卫星滴。综合来看，整个过程呈现出上表面为水滴状、下表面则是细丝颈缩断裂并产生卫星滴的复杂流体动力学失稳现象。

为了进一步研究与观察液体失稳的现象，我们尝试人为控制空气量，液体量与震动台的参数来让液面出现失稳现象。在这一过程中我们记录了许多不同的液面失稳与坍塌的现象，同时也尝试寻找方法对其进行定性分析。

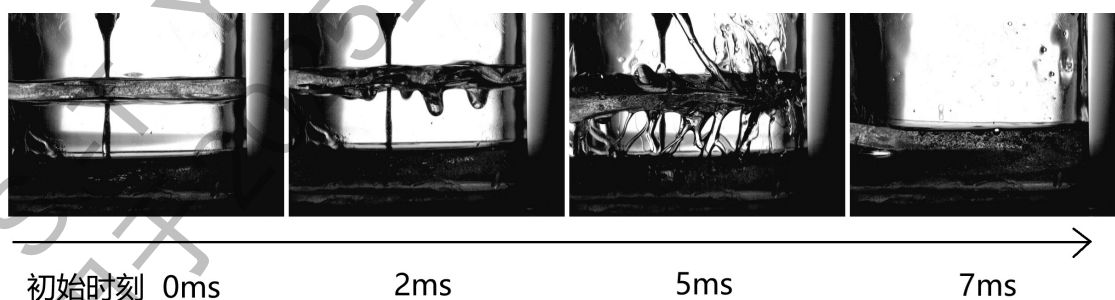


图 14: 液面崩塌过程的典型序列图，从左至右依次表示时间的推进)。在实验中，由于注入了过量空气，系统内部的气液界面失去平衡，产生剧烈的不稳定性并最终导致液面整体崩塌。

图14 给出了在外加气体过注入条件下，液-气双层界面由稳态向崩塌演化的典

型时序。最初（左一）界面仍近似平直，仅出现极低幅的起伏，可视作 $S\text{-flat}$ 的临界邻域；随上方气体脉冲式入射（左二），上表面形成短而钝头的可回吸水舌，属于 $T\text{-jet}$ ；当入射动量通量进一步增大（左三），水舌被牵伸为细丝并出现沿轴向的最小颈径快速减小与多次断裂，伴随卫星滴与近界面的强卷吸，进入 $U\text{-ligament}$ 与 $U\text{-entrain}$ 的复合状态；最终（右一）界面整体下挠、翻卷并碎裂，宏观形态难以自恢复，表现为 $U\text{-collapse}$ 。

该序列清晰展示了“上表面注入驱动”的主通道：

$$S\text{-flat} \rightarrow T\text{-jet} \rightarrow \{U\text{-ligament} + U\text{-entrain}\} \rightarrow U\text{-collapse}.$$

随着振动幅度和频率的变化，液体和气泡的行为表现出不同的响应特性，这表明液气界面的稳定性受到振动条件的显著影响。此时，我们将继续探讨倒置液体/空气界面的稳定性相关的理论定量分析。

4.2 倒置液体/空气界面的稳定性研究

第二节推导的受迫谐振子模型与实验现象揭示出了液体层稳定性的复杂性，但对其的研究不可或缺。接下来我们将探讨，这种特定频率和振幅的竖直振动，如何通过所谓的 Kapitza 效应（其流体力学对应现象的研究可追溯至 Wolf^{[18][19]}），为原本在重力场中不稳定的倒置界面提供一种动态稳定机制。

4.2.1 界面小扰动的基本方程与稳定性窗口

考虑两个不可压、不可混溶流体，其密度分别为 ρ_{up} 与 ρ_{down} 。界面位于 $z = 0$ ，在水平方向的位置为 $\mathbf{r}$ ，其扰动为 $\zeta(\mathbf{r}, t)$ 。在傅里叶空间中，定义波矢 $\mathbf{k}$ ，扰动可表示为 $\zeta(\mathbf{k}, t)$ 。对小扰动进行线性化处理，可得每个波模满足：

$$\ddot{\zeta}(\mathbf{k}) + \omega_0^2(k)\zeta(\mathbf{k}) = 0, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_0^2(k) &= -Agk + \frac{\gamma k^3}{\rho_{\text{up}} + \rho_{\text{down}}}, \\ A &= \frac{\rho_{\text{up}} - \rho_{\text{down}}}{\rho_{\text{up}} + \rho_{\text{down}}} \end{aligned} \quad (17)$$

上述线性理论清晰地表明，界面稳定性取决于扰动波数——小波数下重力主导导致不稳定，而大波数下表面张力提供恢复力以抑制扰动。为了直观展示这一物理机制，我们绘制了界面扰动在不同时刻的演化过程，如图¹⁵所示。

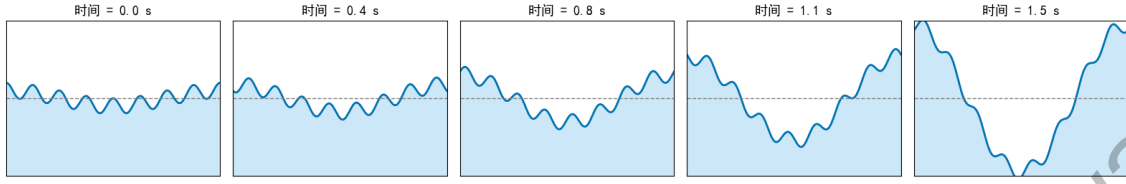


图 15: 界面演化过程: 液气界面在瑞利-泰勒不稳定性与表面张力共同作用下的演化示意图。短波长扰动在表面张力作用下受限, 而长波长模式逐渐放大并最终主导界面形态。

当液体在上、空气在下的倒置界面时, 如我们在图 5 中看到的界面形态变化, 可以与 Rayleigh-Taylor 不稳定性相关联 [12]。小波数扰动使得界面出现不稳定, 而大波数下表面张力起到恢复作用。因此, 可令 $\rho_{\text{down}} \approx 0$, 则:

$$\omega_0^2(k) = -gk + \frac{\gamma k^3}{\rho_l} \quad (18)$$

此时对于小波数, 重力项为负, 导致 Rayleigh-Taylor 不稳定性, 而大波数下表面张力起主要稳定作用。方程清楚地表明, 在倒置界面 (液体在上、空气在下) 中, 小波数扰动将因重力项为负而迅速放大, 导致 Rayleigh-Taylor 不稳定性。但随着波数增大, 表面张力提供了稳定项, 这反映出该系统具有波数选择性稳定性窗口, 也是实验中常见的界面指状模式出现的根源。

图 16 展示了界面小扰动的二维色散图 $\Omega_0^2(k, \gamma)$: 横轴为波数 k , 纵轴为表面张力 γ , 颜色表示频率平方 Ω_0^2 的值。色条的刻度与图中颜色一一对应, 便于读取幅值大小。红色曲线标示了 $\Omega_0^2 = 0$ 的等值线, 直观地分隔出“失稳侧” (色条的高值区域) 与“稳定侧” (色条的低值区域)。该曲线对应解析边界 $\gamma_c(k) = \frac{g\rho_l}{k^2}$, 分隔了波动的稳定与不稳定区域。

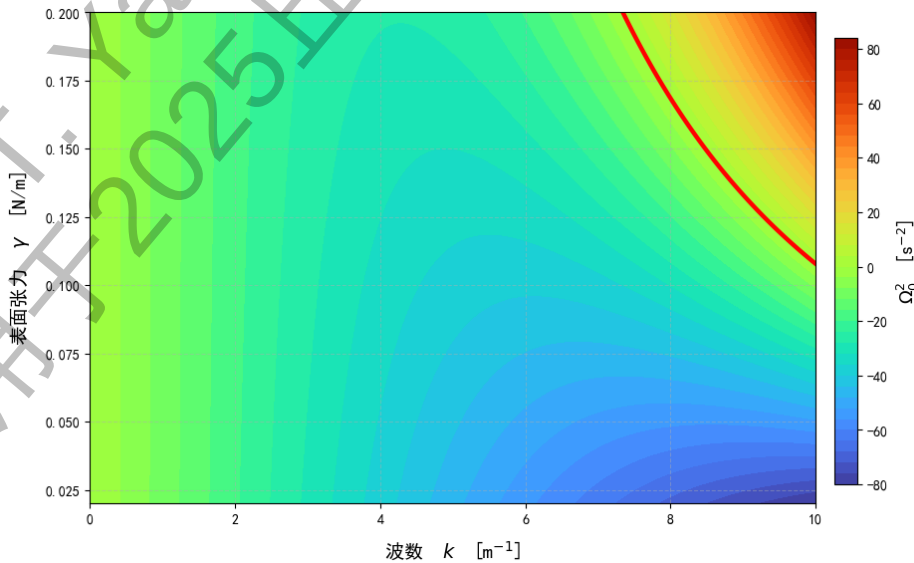


图 16: 色散面 $\Omega_0^2(k, \gamma)$ 与稳定边界 $\Omega_0^2 = 0$ (红线)。

4.2.2 竖直振动下的 Kapitza 稳定化

前述分析表明，在静态重力场中，倒置的液体/空气界面因其固有的 Rayleigh-Taylor 不稳定性而无法保持平衡，小波数扰动会持续增长并最终导致界面破碎。然而，理论和实验均指出，通过引入一个高频竖直振动，可以为该系统提供一个动态稳定机制，即所谓的 Kapitza 稳定化效应。该效应的核心在于，快速振荡的惯性力对界面扰动产生了有效的平均抑制，其作用类似于一个等效的“负重力”或“恢复力”，从而抗衡甚至完全克服静态重力带来的失稳趋势。下文将通过对界面方程进行调制分析，来揭示这一物理过程的数学本质。

施加竖直振动，其加速度为 $-A_l\omega^2 \cos(\omega t)$ ，可等效为重力的时间调制：

$$g_{\text{eff}}(t) = g - A_l\omega^2 \cos(\omega t) \quad (19)$$

因此界面扰动方程为：

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2(k)\zeta = -kA_l\omega^2 \cos(\omega t)\zeta \quad (20)$$

采用 Kapitza 方法 [29][11]，将 ζ 分解为慢变项 ζ_s 与快振项 ζ_f ，即 $\zeta = \zeta_s + \zeta_f$ ，对快振项进行周期平均，得到：

$$\ddot{\zeta}_s + \left[\omega_0^2(k) + \frac{k^2 A_l^2 \omega^2}{2} \right] \zeta_s = 0 \quad (21)$$

新增的项为振动引发的稳定项 [22]。为了更直观展示该稳定项的影响，我们绘制了界面扰动频率平方 $\omega_0^2(k)$ 在不同振动幅值 A_l 下的变化情况。如图 17 所示，在未加振动的情况下，系统在小波数区域存在 $\omega_0^2(k) < 0$ 的不稳定区（灰色阴影）。而随着 A_l 的增大，该不稳定区逐渐被抑制，表现为稳定波数范围的扩大。这一现象定量体现了 Kapitza 稳定机制所带来的“动态刚度”增强效应。

因此可得到稳定条件：

$$k > \frac{2g}{A_l^2 \omega^2} \quad (22)$$

若容器长度为 L ，则有：

$$A_l \omega > \sqrt{\frac{gL}{\pi}} \quad (23)$$

将界面响应分解为快速振荡项 $\zeta_f(t)$ 与慢变化项 $\zeta_s(t)$ 我们可以更直观地理解该机制在时间域上的表现。如图 18 所示，我们绘制了随时间演化的合成响应曲线。图中清晰展现了高频驱动下系统仍保持有界的动态行为，即 Kapitza 稳定化效应的时域体现。

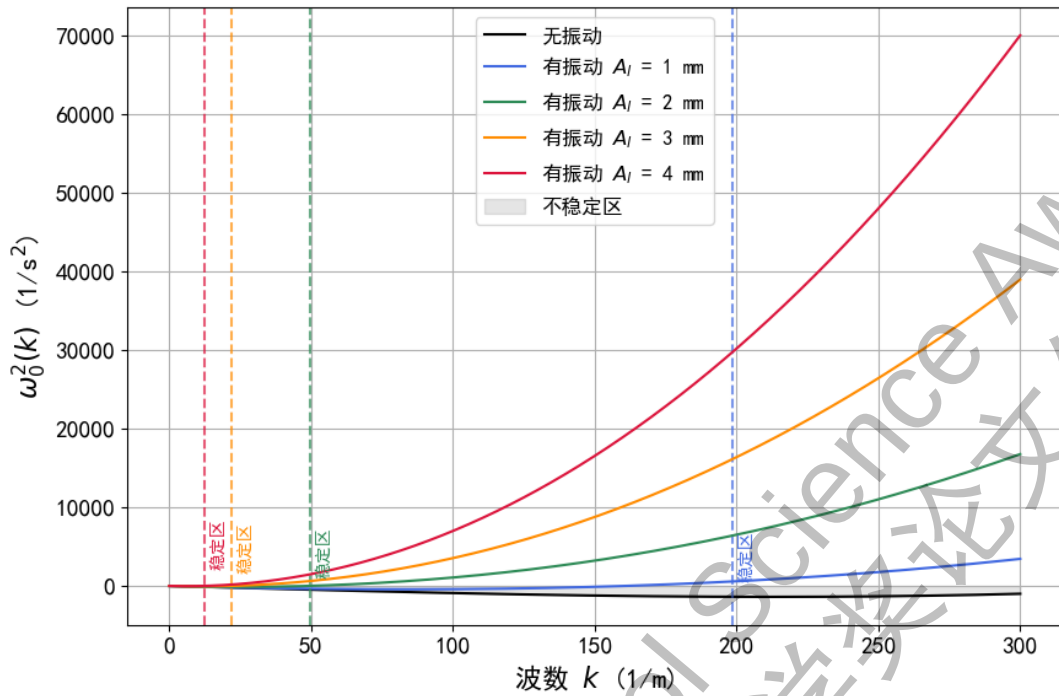


图 17: **Kapitza 稳定化效应**: 不同竖直振动幅值 A_l 下的色散曲线 $\omega_0^2(k)$ 。各曲线展示了振动项如何改变波数 k 的稳定性阈值。虚线标记临界波数 k_c , 此处 $\omega_0^2(k)$ 变号, 表明从不稳定模式到稳定模式的转变。不同 A_l 的稳定区在每个颜色虚线 (临界波数) 的右侧全空间。阴影区表示无振动时的不稳定区域。

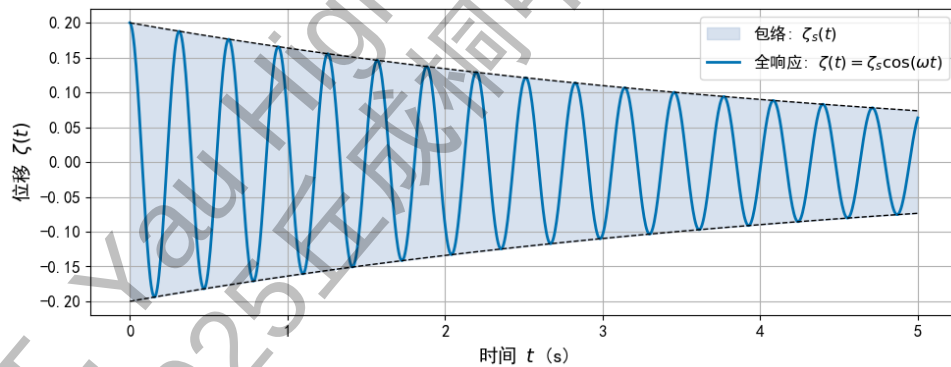


图 18: **Kapitza 调制界面响应**: 界面位移 $\zeta(t)$ 由快速振荡项 $\zeta_f = \zeta_s \cos(\omega t)$ 与慢变包络 $\zeta_s(t)$ 组成。虚线表示包络 $\pm\zeta_s(t)$, 体现了垂直高频振动对系统的有效调制与稳定作用。

该结果表明, 即使在原本不稳定的系统中 (如倒置液气界面), 通过施加合适频率与强度的振动, 系统也可获得额外的“动态刚度”, 从而实现对界面扰动的抑制。这种“反直觉”的稳定机制即为 Kapitza 稳定化效应, 在物理学、流体力学和工程振动控制中具有广泛应用。

4.3 振动下浮体的动态稳定性

Kapitza 稳定化为倒置界面的稳定性提供了统一的平均化框架；其最直观的宏观体现之一，是浮体在竖直振动环境中能否被“动态托稳”。为此，考虑质量 m_b 、体积 V_b 的刚体浸没于密度为 ρ_l 的液体，记质心竖直坐标为 z_G 、沉浸体积为 $V_{\text{im}}(z_G)$ 。在静态重力场中，浮力写为

$$F_{\text{buoy}} = \rho_l g V_{\text{im}}(z_G), \quad (24)$$

平衡要求

$$V_{\text{im}}(z_{G,\text{eq}}) = \frac{m_b}{\rho_l}. \quad (25)$$

围绕平衡点令小扰动 $Z = z_G - z_{G,\text{eq}}$ ，并定义 $V' = \left. \frac{dV_{\text{im}}}{dz} \right|_{z_{G,\text{eq}}}$ ，线性化得到

$$m_b \ddot{Z} + \rho_l g V' Z = 0, \quad \omega_{\text{buoy}}^2 = -\frac{\rho_l g}{m_b} V' \quad (26)$$

因此，当 $\omega_{\text{buoy}}^2 > 0$ 时静态稳定；而在倒置构型下 $\omega_{\text{buoy}}^2 < 0$ ，平衡点静态不稳，需要外加振动予以稳定。

在容器做竖直简谐运动时，等效重力为

$$g_{\text{eff}}(t) = g - A\omega^2 \cos(\omega t)$$

相应的小扰动方程写成 Mathieu 型参数激励形式 [13]

$$\ddot{Z} + \omega_{\text{buoy}}^2 [1 - \Gamma \cos(\omega t)] Z = 0, \quad \Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \quad (27)$$

该方程表明：振动通过调制“浮力刚度”的系数，使本来不稳的倒置平衡在一定参数区间内可能转为稳定。为直观展示这一点，我们对上式进行直接时域积分，比较阈值以下与以上两种情形。

如图 19 所示，在相同初始位移与速度下，仅改变振动强度 Γ 即可在时间域内清晰地地区分两类动力学：当 Γ 低于阈值时（阈下），轨迹在早期看似平缓，但临近自动检测到的发散起点 t_{on} 后包络迅速增大并远离平衡；当 Γ 高于阈值时（阈上），轨迹始终保持有界的强迫振荡。该时序证据与下面的高频平均理论相一致。

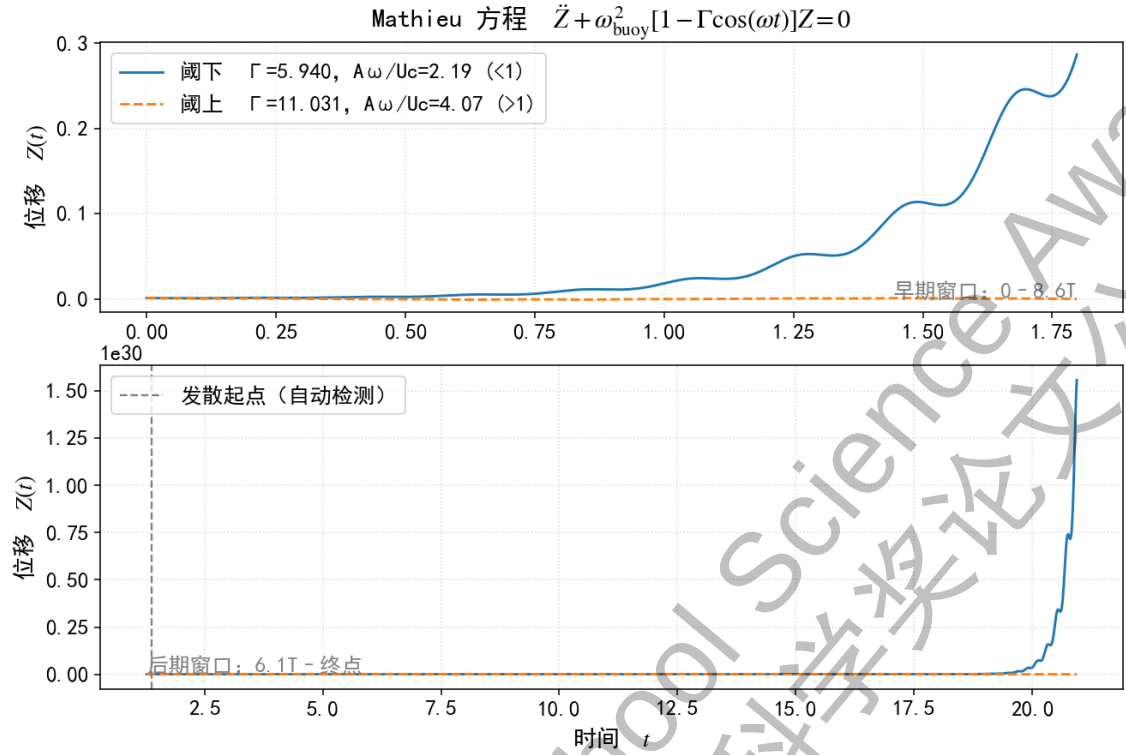


图 19: Mathieu 方程的时序轨迹 (倒置: $\omega_{\text{buoy}}^2 < 0$)。上: 早期窗口; 下: 后期窗口并标出发散起点。阈下 (实线) 发散, 阈上 (虚线) 有界, 符合判据 $A\omega/U_c > 1$ 。

在高频条件 $\omega \gg |\omega_{\text{buoy}}|$ 下, 对 Mathieu 方程进行慢-快分离与平均, 得到等效刚度

$$\omega_{\text{eff}}^2 = \omega_{\text{buoy}}^2 + \frac{\omega_{\text{buoy}}^4}{2\omega^2} \Gamma^2 \quad (28)$$

其中第二项为振动引入的正修正, 体现“振动平均提供额外刚度”的 Kapitza 机制。对倒置构型 ($\omega_{\text{buoy}}^2 < 0$), 稳定化要求 $\omega_{\text{eff}}^2 > 0$, 即

$$A\omega > \sqrt{\frac{2g}{|\omega_{\text{buoy}}|}} \quad (29)$$

该门槛把几何和物性与外部激励直接连接起来: 由 $\omega_{\text{buoy}}^2 = \rho_l g S_w / m_b$ (其中 S_w 为水线面积) 可见, 增加 S_w 或介质密度 ρ_l 、减小 m_b 均可降低所需的临界 $A\omega$, 从而更易实现动态稳定。

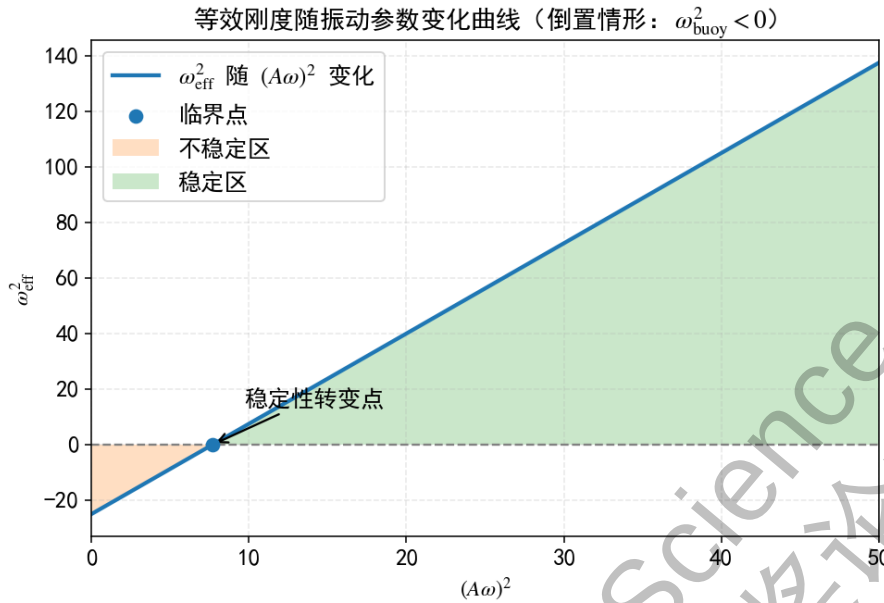


图 20: 等效刚度随振动参数的变化（倒置情形 $\omega_{\text{buoy}}^2 < 0$ ）。

图 20 将上述关系可视化：随着振动强度 $(A\omega)^2$ 增大， ω_{eff}^2 自负值线性上升并在临界点穿越零轴，与稳定判据 $A\omega > \sqrt{2g/|\omega_{\text{buoy}}|}$ 完全一致。两幅图（时序响应与等效刚度-参数关系）共同表明：在满足高频条件与小扰动近似的前提下，竖直振动可通过二阶平均效应显著提升系统的等效“浮力刚度”，从而把静态不稳的倒置平衡转化为动态稳定的有界响应。

5 结论与展望

本文系统研究了竖直振动液体中气泡的动力学行为及悬浮液体层的稳定性，并结合理论建模与实验观测得出了明确结论。理论分析显示，倒置液体/空气界面在静态重力场中必然受到 Rayleigh–Taylor 不稳定性支配，小波数扰动会不断放大并导致界面破裂。然而，在高频竖直振动条件下，外部激励能够提供等效的“动态刚度”，相当于在重力场中引入一项附加的恢复力，从而显著抑制失稳。慢–快调制方法推导出的稳定性条件给出了清晰的判据：当满足 $k > \frac{2g}{A^2\omega^2}$ 且 $A\omega > \sqrt{\frac{gL}{\pi}}$ 时，长波扰动被有效抑制，体系能够维持稳定。这一结果揭示了 Kapitza 稳定化在界面动力学中的核心作用，并以定量的形式刻画了稳定区间。

实验结果与理论预测高度一致。在频率范围 80–150 Hz 内，界面形态经历了由稳定态向过渡态再到失稳态的完整演化。低于临界值时，界面扰动逐步放大并发展为指化、液面坍塌等强烈失稳；接近临界条件时，出现缓慢增长的长波起伏或短暂的液体喷射；而在高于临界的条件下，液面能长期保持平整或仅呈现弱小毛细波纹。尤其在振幅约 2 mm、频率接近 120 Hz 时，液面表现出的稳定性与理论预测的阈值条件高度一致。通过将实验观测现象划分为稳定、过渡和失稳三类十种模式，

可以清晰地看到不同形态与理论判据之间的一一对应关系，从而证明理论模型在捕捉失稳规律方面的可靠性。

气泡动力学在稳定性调控中扮演了重要角色。实验表明，气泡在振动作用下能够克服浮力下沉并在底部合并为空气层，该空气层由于可压缩性而表现为“气体弹簧”，在周期性压缩与恢复中托举液体，显著增强界面的整体稳定性。该过程不仅与弹簧-质量模型的预测相吻合，也证明气泡并非仅仅是伴随现象，而是维持稳定的关键环节。气泡-液层-容器的统一动力学框架有效解释了实验和理论中的多种观测结果，并揭示了 Kapitza 效应如何通过动态刚度的修正将原本不稳定的体系转化为可维持的稳定状态。

本研究虽初步建立了振动-气泡-界面耦合的理论框架并通过实验验证了其合理性，但受实验条件所限，在振动参数范围、气泡量化分析及复杂边界效应等方面仍有深化空间。所以未来我们将通过更精密的实验设计及更适配的实验装置，进一步验证理论预测的普适性，完善对多物理场耦合机制的系统认识。整体而言，我们此次的研究不仅揭示了竖直振动下气泡与液层耦合作用的物理机制，而且在理论与实验的双重验证下明确给出了稳定性条件，为复杂流体体系的稳定调控提供了坚实的科学依据。

致谢

此次研究得以顺利推进并完成，离不开众多学校及教练、同学以及家人的支持与帮助，在此向大家致以最真诚的谢意。研究过程中，胡瀚文与唐智宸分工明确、协作紧密：在研究初始阶段，两人共同浏览前人的研究并进行学习，梳理流体力学理论基础，深入研讨气泡动力学控制方程及悬浮液体层弹簧-质量模型的推导逻辑，保证理论部分的严谨性，为研究筑牢理论根基。进入成果整理与论文撰写阶段，两人分工明确、高效协作：胡瀚文主要负责定量实验的详细计划，使得实验更加高效。后期负责论文修改完善，包括调整内容逻辑、优化表述细节、规范格式排版，确保论文整体结构清晰、语言精准；唐智宸则负责分析实验数据，在可视化和实验拟合图像方面做出了杰出贡献，后期也承担了大部分内容的撰写工作，均高质量完成，为论文成型奠定了核心基础。正是这种“共研理论、分工撰改”的协作模式，让研究成果得以高效、完整地呈现。

其次，感谢竞赛教练张程鑫老师。张老师在研究全程给予专业且细致的指导：理论推导阶段，协助梳理复杂力学耦合关系，纠正推导偏差；实验设计环节，帮忙优化参数设置与操作流程，提升实验准确性；论文撰写过程中，也对内容深度与逻辑框架提出宝贵建议，引导我们完善研究成果。同时，感谢重庆市育才中学校，学校提供的高速成像设备、精准调频激振台等实验器材，为捕捉气泡动态与液层界面变化提供了核心硬件支持；浓厚的学术探究氛围，也让我们能自由开展实验与理论验证，助力研究顺利实施。

最后，要感谢我们的父母。研究期间，他们始终是我们最坚实的后盾：当我因理论瓶颈或实验难题感到焦虑时，给予耐心安慰与鼓励；当我需要投入大量时间完善研究时，在生活上悉心照料，让我能全身心专注于课题。正是这份默默的支持，让我们有勇气克服困难、坚持完成研究。

这个项目的研究源自于 2025 年第 38 届 IYPT 的第八题-悬浮的液体，然后通过对题目的研究，我们对这个题目有了更深的理解，从而拓展了研究方向，将研究重点从 IYPT 要求的悬浮现象本身转移到垂直震动下液体稳定性的分析，因为我们在实验中观察到了更多的稳定性方向，从而明确了此次研究的重点和基本框架。这份研究成果凝聚着团队的心血与各方的助力，未来，我们会带着这份收获，在科学探索的道路上继续稳步前行。

参考文献

- [1] B. Apffel, F. Novkoski, A. Eddi, and E. Fort, Floating under a levitating liquid, *Science* **364**, 966–969 (2019).
- [2] C. Gentry, J. Greenberg, X. R. Wang, and N. Kearns, Sinking bubble in vibrating tanks, University of Arizona Technical Report (2003).

- [3] E. I. Butikov, Kapitza's pendulum: A physically transparent simple treatment, *European Journal of Physics* **23**, 477–492 (2002).
- [4] C. E. Brennen, *Cavitation and Bubble Dynamics* (Oxford University Press, 1995).
- [5] M. Faraday, On a peculiar class of acoustical figures, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **121**, 299–340 (1831).
- [6] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, 1983).
- [7] T. Young, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **95**, 65–87 (1805).
- [8] W. Thomson, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **42**, 448–452 (1871).
- [9] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quere, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (Springer, 2013).
- [10] M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet, and C. Quilliet, *Journal of Fluid Mechanics* **236**, 349–383 (1992).
- [11] R. Kuhl, *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **68**, 588 (1988).
- [12] Lord Rayleigh, *Proceedings of the London Mathematical Society* **14**, 170–177 (1883).
- [13] D. J. Lewis and G. I. Taylor, *Proceedings of the Royal Society of London A* **202**, 81–96 (1950).
- [14] J. M. Burgess, A. Juel, W. D. McCormick, J. B. Swift, and H. L. Swinney, *Physical Review Letters* **86**, 1203–1206 (2001).
- [15] R. Petropoulos, D. T. Papageorgiou, and P. G. Petropoulos, *Physics of Fluids* **26**, 022115 (2014).
- [16] D. Rannacher and A. Engel, *Physical Review E* **75**, 016311 (2007).
- [17] J. J. Tao, X. T. He, W. H. Ye, and F. H. Busse, *Physical Review E* **87**, 013001 (2013).
- [18] G. H. Wolf, *Zeitschrift für Physik* **227**, 291–300 (1969).

- [19] G. H. Wolf, *Physical Review Letters* **24**, 444–446 (1970).
- [20] V. Lapuerta, F. J. Mancebo, and J. M. Vega, *Physical Review E* **64**, 016318 (2001).
- [21] M. Faraday, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **121**, 299–340 (1831).
- [22] S. Douady, *Journal of Fluid Mechanics* **221**, 383–409 (1990).
- [23] K. Kumar and L. S. Tuckerman, *Journal of Fluid Mechanics* **279**, 49–68 (1994).
- [24] M. H. I. Baird, *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **41**, 52–55 (1963).
- [25] G. J. Jameson, *Chemical Engineering Science* **21**, 35–48 (1966).
- [26] V. S. Sorokin, I. I. Blekhman, and V. B. Vasilkov, *Nonlinear Dynamics* **67**, 147–158 (2012).
- [27] B. R. Elbing, A. L. Still, and A. J. Ghajar, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **55**, 385–403 (2016).
- [28] V. F. K. Bjerknes, *Fields of Force: Supplementary Lectures, Applications to Meteorology* (Columbia University Press / The Macmillan Company, London, 1906).
- [29] P. L. Kapitza, *Sov. Phys. JETP* **21**, 588–597 (1951).
- [30] M. S. Krieger, *European Physical Journal E: Soft Matter* **40**, 67 (2017).

附录 A

在本附录中，我们展示了与本课题相关的多个图像，并提供了详细的机制解释和过程性材料。

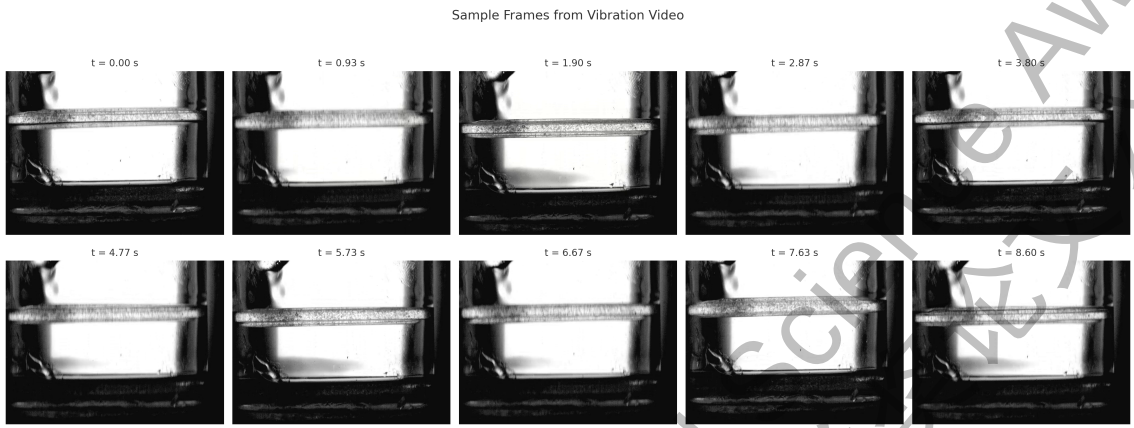


图 21: 液气两层体系在竖直振动下的界面演化序列。不同时间 t 下的快照展示了液体层的整体运动及形态变化，从初始平稳状态逐渐演变为周期性振荡。该过程反映了液层在外加竖直振动作用下的时序响应。

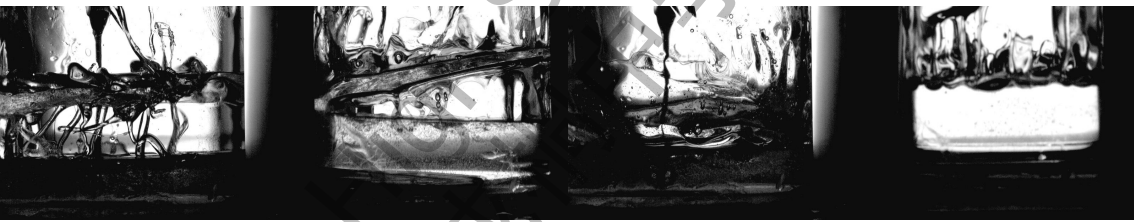


图 22: 展示了液体与气泡之间的相互作用，呈现出逐步失稳的过程。图像中展示了从初步液体扰动到高级湍流的演变，强调了液体纹理的变化，特别是气泡与液体之间复杂的动态相互作用。

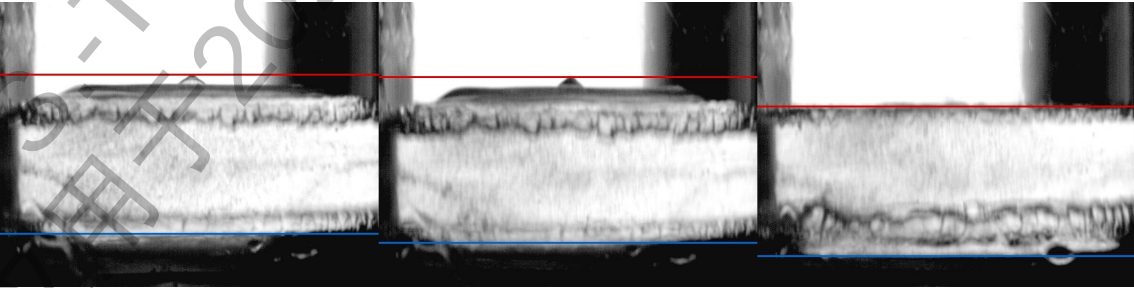


图 23: 基于 Python 代码识别液体上下表面的可视化示例。图中红色和蓝色线条分别标示了液体的上下表面，反映了液体在振动过程中的动态变化。

附录 B

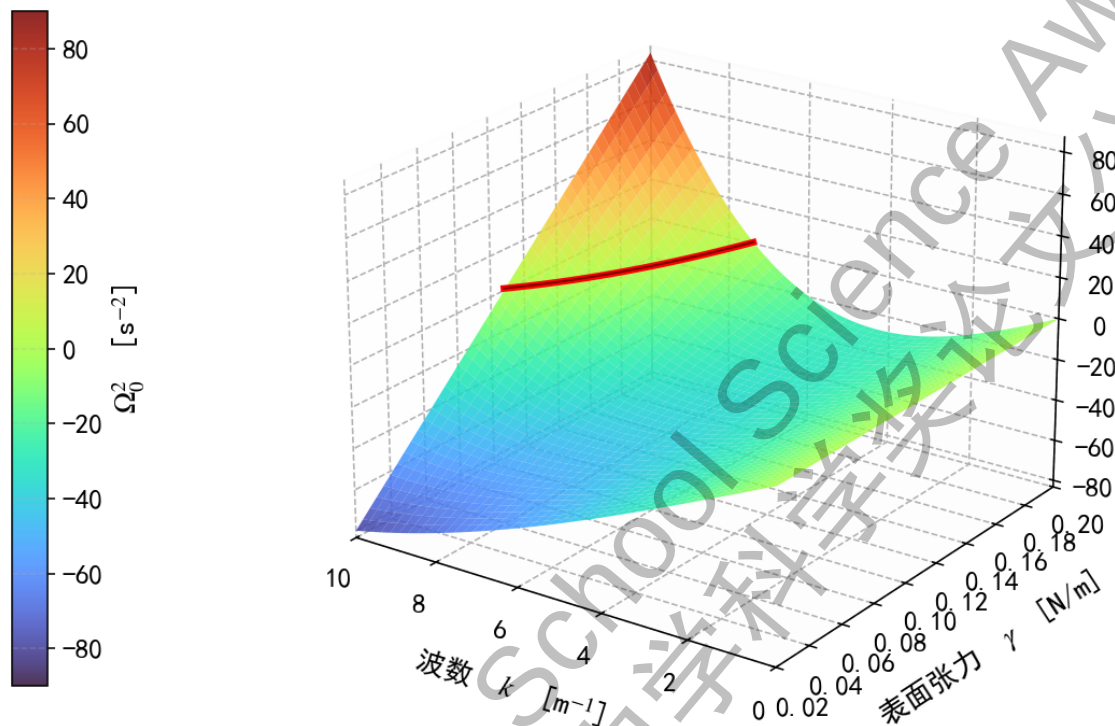


图 24: 色散面 $\Omega_0^2(k, \gamma)$ 与稳定性分析。图中展示了波数 k 与表面张力 γ 对应的频率平方 Ω_0^2 的变化，红色曲线标示了 $\Omega_0^2 = 0$ 的等值线，分隔了稳定区与失稳区。

图 24 展示了界面小扰动的二维色散图，波数 k 与表面张力 γ 的关系。红色曲线标示了 $\Omega_0^2 = 0$ 的等值线，直观地分隔了“失稳侧”（色条的高值区域）与“稳定侧”（色条的低值区域）。该曲线对应解析边界 $\gamma_c(k) = \frac{g\sigma}{k^3}$ ，分隔了波动的稳定与不稳定区域。

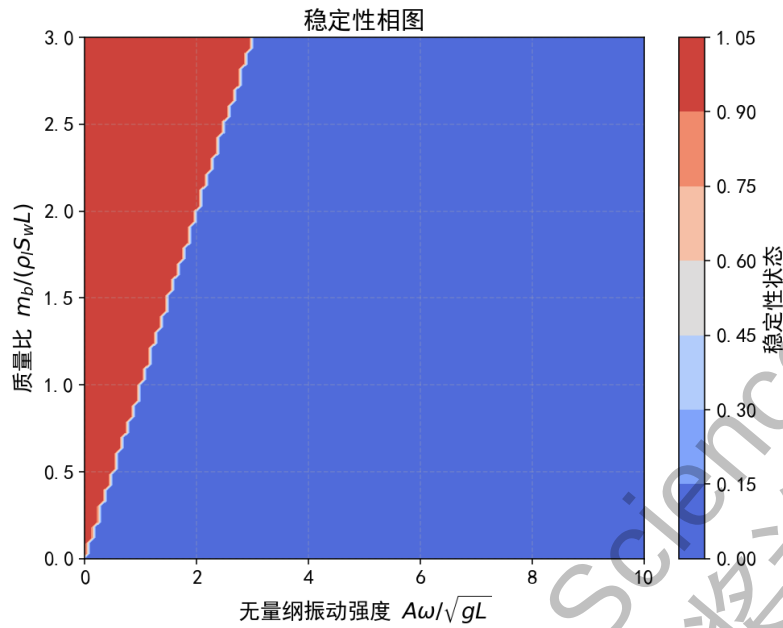


图 25: 稳定性相图: 质量比 $mb/\rho_s w L$ 与无量纲振动强度 $A\omega/\sqrt{gL}$ 的关系。图示展示了随振动强度增加, 系统的稳定性变化。颜色变化表明不同的稳定状态。

图 25 展示了稳定性相图, 展示了随着无量纲振动强度的增加, 系统的稳定性发生了变化。色条反映了不同的稳定状态, 红色和蓝色区域分别表示系统的失稳与稳定区域。

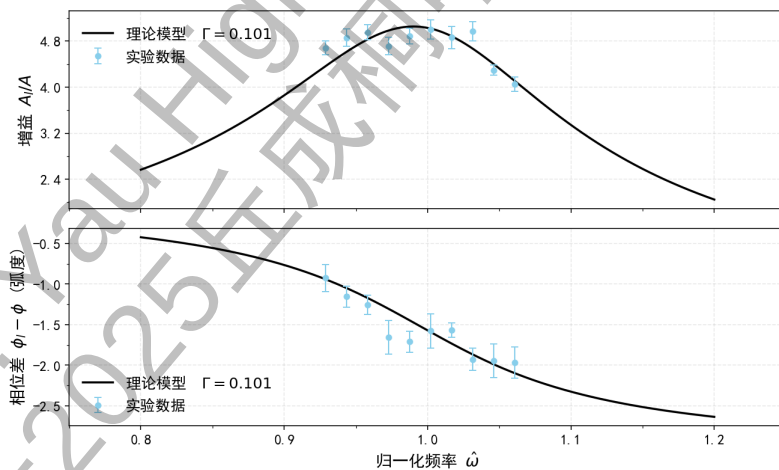


图 26: 增益与相位差的关系: 理论模型与实验数据。上图展示了增益 A/A_0 随归一化频率 $\hat{\omega}$ 的变化, 黑线为理论模型, 蓝色点为实验数据。下图为相位差 $\phi - \phi_0$ 随归一化频率的变化。

图 26 展示了增益与相位差的关系。上图展示了增益随归一化频率变化的趋势, 黑线为理论值, 蓝点为实验数据。下图为相位差随频率的变化。

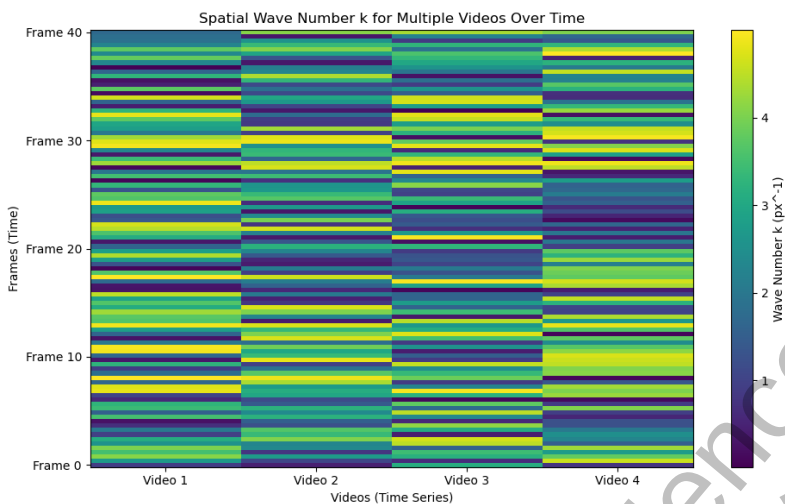


图 27: 高频振动下液体的动态响应: 显示了液体在不同时间的高度变化, 反映了液体的动态响应特性。

图 27 展示了液体在高频振动下的动态响应, 反映了液体的高度变化与振动周期之间的关系。

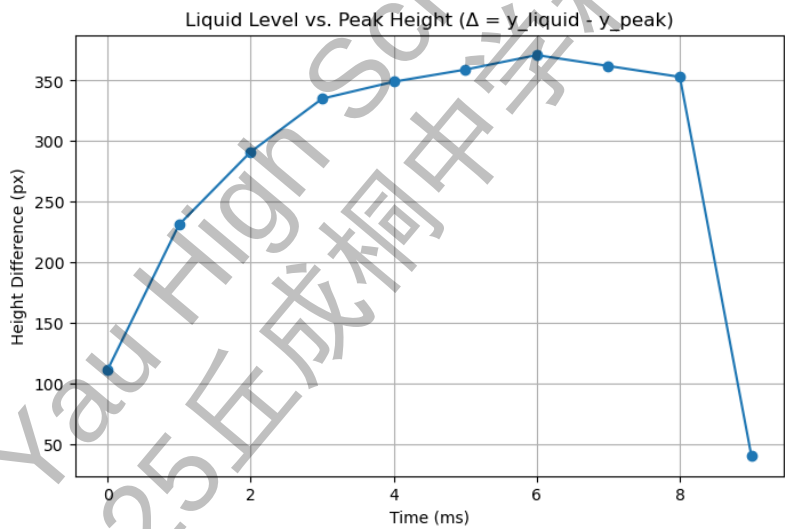


图 28: 液体峰值高度与时间的关系: 显示了液体高度随时间的变化, 展示了液体水平的动态变化过程。

图 28 展示了液体峰值高度随时间的变化, 提供了液体动态过程中的高度变化数据。

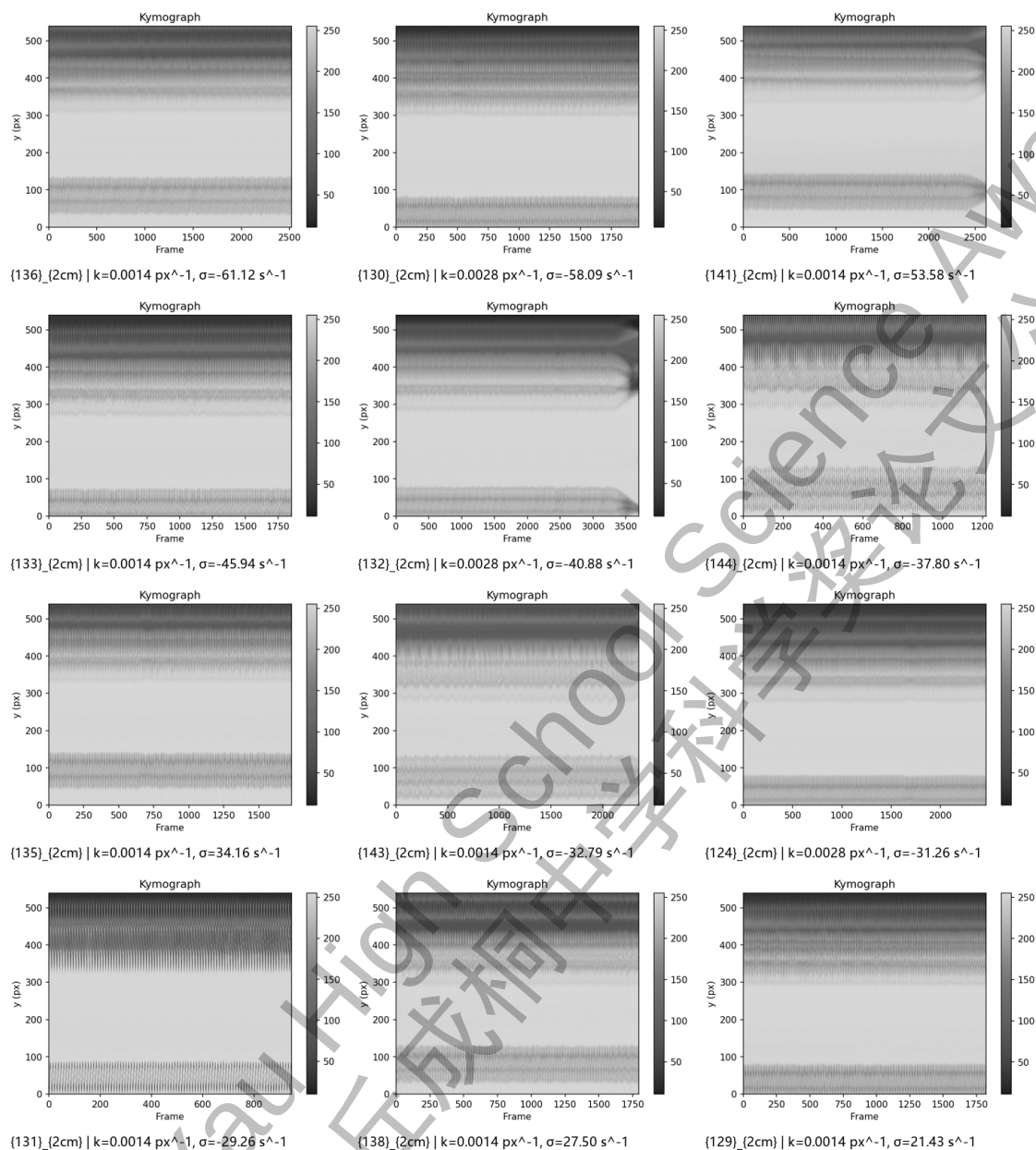


图 29: Kymograph 图: 展示了不同波数 k 下, 液体在随时间变化过程中空间波动的演变。每一列对应一个特定的波数 k , 每一行对应不同的实验条件。图中显示了液体的动态响应随时间和空间的变化情况, 尤其关注了波动的周期性变化和不稳定行为。

附录 C

本附录展示了用于液体表面检测和动态分析的 Python 代码。此代码包括图像预处理、液面与顶点的检测、结果可视化与曲线绘制等功能。

Listing 1: Python 代码: 液体表面与顶点检测算法

```

1 import os, re, glob
2 from typing import List, Tuple
3 import numpy as np
4 import cv2
5 from PIL import Image, ImageDraw
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 FRAME_DIR = r"."
9 FILE_GLOB = "Cam15140-FromFile_*.jpg"
10 FRAME_INTERVAL_MS = 1.0
11
12 LIQUID_SEARCH_Y0 = 0.45
13 LIQUID_SEARCH_Y1 = 0.98
14
15 CENTER_WIN_W = 0.50
16 TOP_MARGIN = 0.02
17 GAUSS_BLUR = (5, 5)
18 CANNY_T1, CANNY_T2 = 60, 180
19 THRESH_VAL = 110
20 MIN_HOUGH_LEN = 0.25
21 MAX_HOUGH_GAP = 10
22 ANGLE_TOL_DEG = 5
23
24 OUT_DIR = os.path.join(FRAME_DIR, "analysis_out")
25 os.makedirs(OUT_DIR, exist_ok=True)
26
27 def extract_index_from_name(path: str) -> int:
28     m = re.search(r"(\d+)", os.path.basename(path))
29     return int(m.group(1)) if m else 0
30
31 def list_frames(frame_dir: str, pattern: str) -> List[str]:
32     paths = glob.glob(os.path.join(frame_dir, pattern))
33     paths.sort(key=extract_index_from_name)
34     return paths
35
36 def hough_liquid_line(gray: np.ndarray) -> Tuple[bool, int]:
37     h, w = gray.shape[:2]
38     y0 = int(h * LIQUID_SEARCH_Y0)
39     y1 = int(h * LIQUID_SEARCH_Y1)
40     roi = gray[y0:y1, :].copy()
41
42     blur = cv2.GaussianBlur(roi, GAUSS_BLUR, 0)
43     edges = cv2.Canny(blur, CANNY_T1, CANNY_T2)
44
45     lines = cv2.HoughLinesP(

```

```

46     edges, 1, np.pi/180, threshold=80,
47     minLineLength=int(w * MIN_HOUGH_LEN),
48     maxLineGap=MAX_HOUGH_GAP
49 )
50 if lines is None:
51     return False, -1
52
53 best_y, best_score = -1, -1
54 for x1, y1r, x2, y2r in lines[:,0]:
55     dy = abs(y2r - y1r)
56     dx = abs(x2 - x1) + 1e-6
57     ang = np.degrees(np.arctan2(dy, dx))
58     if ang <= ANGLE_TOL_DEG:
59         y_row = y0 + int((y1r + y2r) / 2)
60         score = dx - 5*dy
61         if score > best_score:
62             best_score = score
63             best_y = y_row
64 if best_y >= 0:
65     return True, best_y
66 return False, -1
67
68 def projection_liquid_line(gray: np.ndarray) -> int:
69     h, w = gray.shape[:2]
70     y0 = int(h * LIQUID_SEARCH_Y0)
71     y1 = int(h * LIQUID_SEARCH_Y1)
72     roi = gray[y0:y1, :].copy()
73     blur = cv2.GaussianBlur(roi, GAUSS_BLUR, 0)
74     edges = cv2.Canny(blur, CANNY_T1, CANNY_T2)
75     row_energy = edges.sum(axis=1)
76     rel = int(np.argmax(row_energy))
77     return y0 + rel
78
79 def estimate_liquid_y(gray: np.ndarray) -> int:
80     ok, y = hough_liquid_line(gray)
81     if ok: return y
82     return projection_liquid_line(gray)
83
84 def estimate_peak_y(gray: np.ndarray, y_liquid: int) -> int:
85     h, w = gray.shape[:2]
86     x0 = int((1.0 - CENTER_WIN_W) * 0.5 * w)
87     x1 = int((1.0 + CENTER_WIN_W) * 0.5 * w)
88     y0 = int(max(TOP_MARGIN * h, 0))
89     y1 = int(max(y_liquid, 1))
90

```

```

91     if y1 <= y0 + 1:
92         return 0
93
94     roi = gray[y0:y1, x0:x1].copy()
95     blur = cv2.GaussianBlur(roi, GAUSS_BLUR, 0)
96     edges = cv2.Canny(blur, CANNY_T1, CANNY_T2)
97
98     ys = []
99     for x in range(edges.shape[1]):
100         col = edges[:, x]
101         pts = np.where(col > 0)[0]
102         if pts.size:
103             ys.append(pts[0])
104     if ys:
105         return y0 + int(np.min(ys))
106
107     _, thr = cv2.threshold(roi, THRESH_VAL, 255, cv2.THRESH_BINARY_INV)
108     cnts, _ = cv2.findContours(thr, cv2.RETR_EXTERNAL, cv2.
109                               CHAIN_APPROX_SIMPLE)
110     if cnts:
111         allpts = np.vstack(cnts)
112         return y0 + int(np.min(allpts[:,0,1]))
113
114     return y0
115
116 def draw_overlay(bgr: np.ndarray, y_liquid: int, y_peak: int) -> Image.
117 Image:
118     pil = Image.fromarray(cv2.cvtColor(bgr, cv2.COLOR_BGR2RGB))
119     drw = ImageDraw.Draw(pil)
120     h, w = bgr.shape[:2]
121     drw.line([(0, y_liquid), (w, y_liquid)], fill=(0, 102, 204), width
122             =4)
123     drw.line([(0, y_peak), (w, y_peak)], fill=(220, 0, 0), width
124             =4)
125     return pil
126
127 def stitch_horizontal(images: List[Image.Image]) -> Image.Image:
128     widths, heights = zip(*(im.size for im in images))
129     canvas = Image.new("RGB", (sum(widths), max(heights)),
130                          (255,255,255))
131     x = 0
132     for im in images:
133         canvas.paste(im, (x, 0)); x += im.size[0]
134     return canvas

```

```

131 paths = list_frames(FRAME_DIR, FILE_GLOB)
132 if not paths:
133     raise RuntimeError(f"在 {FRAME_DIR!r} 中未找到 {FILE_GLOB!r} 匹配的
134         图片")
135
136 times_ms, y_liq, y_peak = [], [], []
137 annotated = []
138
139 for i, p in enumerate(paths):
140     bgr = cv2.imread(p, cv2.IMREAD_COLOR)
141     if bgr is None:
142         print("读取失败: ", p); continue
143     gray = cv2.cvtColor(bgr, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
144
145     yl = estimate_liquid_y(gray)
146     yp = estimate_peak_y(gray, yl)
147
148     times_ms.append(i * FRAME_INTERVAL_MS)
149     y_liq.append(int(yl))
150     y_peak.append(int(yp))
151     annotated.append(draw_overlay(bgr, yl, yp))
152
153 combined = stitch_horizontal(annotated)
154 combined_path = os.path.join(OUT_DIR, "combined_annotated_horizontal.
155     jpg")
156 combined.save(combined_path, quality=95)
157 print("横向拼接保存: ", combined_path)
158
159 dpx = (np.array(y_liq) - np.array(y_peak)).astype(float)
160
161 plt.figure(figsize=(8,5))
162 plt.plot(times_ms, dpx, marker="o")
163 plt.xlabel("Time (ms)"); plt.ylabel("Height Difference (px)")
164 plt.title("Liquid Level vs. Peak Height ( $\Delta = y_{\text{liquid}} - y_{\text{peak}}$ ")
165 plt.grid(True)
166 curve_path = os.path.join(OUT_DIR, "height_curve.png")
167 plt.savefig(curve_path, dpi=150, bbox_inches="tight"); plt.show()
168 print("曲线图保存: ", curve_path)
169
170 import csv
171 csv_path = os.path.join(OUT_DIR, "height_vs_time.csv")
172 with open(csv_path, "w", newline="") as f:
173     w = csv.writer(f)
174     w.writerow(["frame_index", "time_ms", "y_liquid", "y_peak", "
175         height_diff_px"])

```

```

173     for i,(t,y1,yp,dp) in enumerate(zip(times_ms,y_liq,y_peak,dpx)):
174         w.writerow([i, f"{t:.3f}", y1, yp, f"{dp:.3f}"])
175 print("CSV 保存: ", csv_path)

```

Listing 2: Python 代码: Batch Video RT/Kapitza Analyzer

```

1
2
3 import os, re, csv, math, glob
4 from dataclasses import dataclass
5 from typing import Tuple, List
6 import numpy as np
7 import cv2
8 from PIL import Image
9 import matplotlib.pyplot as plt
10
11 VIDEO_DIR = r"E:\202579"
12 GLOB_PAT = "*.mp4" # 支持 mp4/avi/mov 等, 改成 ["*.
    mp4","*.avi"] 也行
13 MODE = "surface" # "surface" 或 "bubble"
14
15 PX_PER_MM = None # 例如 12.5 表示 1 mm = 12.5 px
16
17 LEFT_CROP, RIGHT_CROP = 0.05, 0.05
18 TOP_CROP, BOT_CROP = 0.05, 0.05
19
20 BLUR_KSIZE = 5
21 SMOOTH_WIN = 7
22 EARLY_WINDOW_S = 0.15
23
24 BUBBLE_THRESH = 100
25 BUBBLE_MIN_AREA = 50
26 BUBBLE_MAX_AREA = 1e6
27
28 OUT_ROOT = os.path.join(VIDEO_DIR, "_batch_out")
29
30 @dataclass
31 class VideoInfo:
32     path: str
33     fps: float
34     width: int
35     height: int
36     nframes: int
37     roi: Tuple[int, int, int, int] # x0,y0,w,h
38

```

```

39 def read_video_info(path: str) -> VideoInfo:
40     cap = cv2.VideoCapture(path)
41     if not cap.isOpened():
42         raise RuntimeError(f"Cannot open video: {path}")
43     fps = cap.get(cv2.CAP_PROP_FPS)
44     w = int(cap.get(cv2.CAP_PROP_FRAME_WIDTH))
45     h = int(cap.get(cv2.CAP_PROP_FRAME_HEIGHT))
46     n = int(cap.get(cv2.CAP_PROP_FRAME_COUNT))
47     cap.release()
48     x0 = int(w * LEFT_CROP); x1 = int(w * (1 - RIGHT_CROP))
49     y0 = int(h * TOP_CROP); y1 = int(h * (1 - BOT_CROP))
50     roi = (x0, y0, x1-x0, y1-y0)
51     return VideoInfo(path, fps, w, h, n, roi)
52
53 def iter_frames(path: str, roi: Tuple[int, int, int, int]):
54     cap = cv2.VideoCapture(path)
55     if not cap.isOpened():
56         raise RuntimeError(f"Cannot open: {path}")
57     x0, y0, w, h = roi
58     while True:
59         ret, fr = cap.read()
60         if not ret: break
61         gray = cv2.cvtColor(fr, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
62         yield gray[y0:y0+h, x0:x0+w]
63     cap.release()
64
65 def moving_avg(v: np.ndarray, win: int) -> np.ndarray:
66     if win <= 1: return v
67     pad = win // 2
68     vpad = np.pad(v, (pad, pad), mode="edge")
69     ker = np.ones(win) / win
70     return np.convolve(vpad, ker, mode="valid")
71
72 def parse_name_meta(fname: str):
73     base = os.path.splitext(os.path.basename(fname))[0]
74     m = re.match(r"(\d+)\}_{([\d\.]+)cm}", base)
75     if m:
76         idx = m.group(1)
77         gap_cm = float(m.group(2))
78         return idx, gap_cm
79     m2 = re.search(r"(\d+)\}", base)
80     idx = m2.group(1) if m2 else None
81     return idx, None
82
83 def track_surface(info: VideoInfo):

```

```

84     x0,y0,W,H = info.roi
85     T = info.nframes
86     fps= info.fps
87     zlines = np.zeros((T, W), dtype=np.float32)
88     kymo_cols = []
89     for i, fr in enumerate(iter_frames(info.path, info.roi)):
90         blur = cv2.GaussianBlur(fr, (BLUR_KSIZE,BLUR_KSIZE), 0)
91         gy = cv2.Sobel(blur, cv2.CV_32F, 0, 1, ksize=3)
92         gy = np.abs(gy)
93         yidx = np.argmax(gy, axis=0).astype(np.float32)
94         zlines[i,:] = moving_avg(yidx, SMOOTH_WIN)
95         kymo_cols.append(fr.mean(axis=1))
96     kymo = np.stack(kymo_cols, axis=1) # (H,T)
97     times = np.arange(T)/fps
98     return zlines, times, kymo
99
100 def surface_fft_sigma(zlines: np.ndarray, times: np.ndarray, fps: float
101 ):
102     z = zlines - zlines.mean(axis=1, keepdims=True)
103     Z = np.fft.rfft(z, axis=1)
104     W = z.shape[1]
105     kx= np.fft.rfftfreq(W, d=1.0)
106     n_early = max(4, int(EARLY_WINDOW_S*fps))
107     amp_early = np.abs(Z[:n_early,:]).mean(axis=0)
108     idx_k = int(np.argmax(amp_early[1:])) + 1
109     k_dom = kx[idx_k]
110     amp_t = np.abs(Z[:, idx_k])
111     t_early = times[:n_early]
112     y = np.log(amp_t[:n_early] + 1e-12)
113     kfit = np.polyfit(t_early, y, 1)
114     sigma = float(kfit[0])
115     return k_dom, kx, amp_early, sigma
116
117 def track_bubble(info: VideoInfo):
118     T = info.nframes; fps = info.fps
119     ys = np.full(T, np.nan, dtype=np.float32)
120     for i, fr in enumerate(iter_frames(info.path, info.roi)):
121         _, thr = cv2.threshold(fr, BUBBLE_THRESH, 255, cv2.
122             THRESH_BINARY_INV)
123         cnts, _ = cv2.findContours(thr, cv2.RETR_EXTERNAL, cv2.
124             CHAIN_APPROX_SIMPLE)
125         if not cnts: continue
126         cnt = max(cnts, key=cv2.contourArea)
127         area = cv2.contourArea(cnt)
128         if area < BUBBLE_MIN_AREA or area > BUBBLE_MAX_AREA: continue

```

```

126     M = cv2.moments(cnt)
127     if M["m00"]>1e-6:
128         ys[i] = M["m01"]/M["m00"]
129     nans = np.isnan(ys)
130     if np.any(~nans):
131         ys[nans] = np.interp(np.flatnonzero(nans), np.flatnonzero(~nans),
132                               ys[~nans])
132     times = np.arange(T)/fps
133     return ys, times
134
135 def process_one(video_path: str):
136     info = read_video_info(video_path)
137     base = os.path.splitext(os.path.basename(video_path))[0]
138     idx, gap_cm = parse_name_meta(base)
139     out_dir = os.path.join(OUT_ROOT, base)
140     os.makedirs(out_dir, exist_ok=True)
141     cap = cv2.VideoCapture(video_path)
142     ret, frame0 = cap.read()
143     cap.release()
144     if ret:
145         x0,y0,W,H = info.roi
146         roi_img = frame0[y0:y0+H, x0:x0+W]
147         Image.fromarray(cv2.cvtColor(roi_img, cv2.COLOR_BGR2RGB)).save(
148             os.path.join(out_dir, "roi_preview.jpg")
149         )
150     result = {
151         "file": base, "index": idx, "gap_cm": gap_cm,
152         "fps": info.fps, "width": info.width, "height": info.height
153     }
154
155     if MODE == "surface":
156         zlines, times, kymo = track_surface(info)
157         plt.figure(figsize=(6,4))
158         plt.imshow(kymo, aspect="auto", origin="lower")
159         plt.xlabel("Frame"); plt.ylabel("y (px)")
160         plt.title("Kymograph")
161         plt.colorbar()
162         plt.savefig(os.path.join(out_dir, "kymograph.png"), dpi=150,
163                     bbox_inches="tight")
164         plt.close()
165
166         k_dom, kx, amp_k, sigma = surface_fft_sigma(zlines, times, info
167             .fps)
168
169         plt.figure(figsize=(6,4))

```

```

168     plt.plot(kx, amp_k)
169     plt.xlabel("k (px-1)"); plt.ylabel("Amplitude (a.u.)");
170     plt.grid(True)
171     plt.title("Early-window Spatial Spectrum")
172     plt.savefig(os.path.join(out_dir, "spectrum_k.png"), dpi=150,
173                 bbox_inches="tight")
174     plt.close()
175
176     result.update({
177         "k_dom_px-1": float(k_dom),
178         "sigma_1_per_s": float(sigma),
179     })
180
181     if PX_PER_MM:
182         k_mm = k_dom * PX_PER_MM
183         lam_mm = (1.0/k_mm) if k_mm>0 else math.nan
184         result.update({
185             "k_dom_mm-1": float(k_mm),
186             "lambda_mm": float(lam_mm),
187         })
188
189     with open(os.path.join(out_dir, "surface_k_sigma.csv"), "w",
190              newline="") as f:
191         w = csv.writer(f); w.writerow(["k_px-1", "sigma_1_per_s"]);
192         w.writerow([k_dom, sigma])
193
194     elif MODE == "bubble":
195         ys, times = track_bubble(info)
196         plt.figure(figsize=(6,4))
197         plt.plot(times, ys); plt.grid(True)
198         plt.xlabel("t (s)"); plt.ylabel("y (px)")
199         plt.title("Bubble trajectory")
200         plt.savefig(os.path.join(out_dir, "bubble_trajectory.png"), dpi=
201                     =150, bbox_inches="tight")
202         plt.close()
203
204         vy = np.gradient(ys, times)
205         plt.figure(figsize=(6,4))
206         plt.plot(times, vy); plt.grid(True)
207         plt.xlabel("t (s)"); plt.ylabel("vy (px/s)")
208         plt.title("Bubble vertical speed")
209         plt.savefig(os.path.join(out_dir, "bubble_speed.png"), dpi=150,
210                     bbox_inches="tight")
211         plt.close()
212
213     np.savetxt(os.path.join(out_dir, "bubble_y_t.csv"),

```

```

207         np.vstack([times, ys]).T, delimiter=",",
208         header="time_s,y_px", comments="")
209     np.savetxt(os.path.join(out_dir, "bubble_vy_t.csv"),
210               np.vstack([times, vy]).T, delimiter=",",
211               header="time_s,vy_px_per_s", comments="")
212
213     result.update({"traj_points": len(times)})
214
215     else:
216         raise ValueError("MODE must be 'surface' or 'bubble'")
217
218     return result
219
220 def main():
221     os.makedirs(OUT_ROOT, exist_ok=True)
222     paths = []
223     if isinstance(GLOB_PAT, (list, tuple)):
224         for pat in GLOB_PAT:
225             paths += glob.glob(os.path.join(VIDEO_DIR, pat))
226     else:
227         paths = glob.glob(os.path.join(VIDEO_DIR, GLOB_PAT))
228     paths.sort()
229
230     summary = []
231     for p in paths:
232         try:
233             print("Processing:", os.path.basename(p))
234             res = process_one(p)
235             summary.append(res)
236         except Exception as e:
237             print("!! Error:", p, e)
238
239     if summary:
240         keys = sorted({k for d in summary for k in d.keys()})
241         with open(os.path.join(OUT_ROOT, "summary_all.csv"), "w",
242                 newline="") as f:
243             w = csv.DictWriter(f, fieldnames=keys)
244             w.writeheader()
245             for d in summary: w.writerow(d)
246         print("Done. Summary saved to:", os.path.join(OUT_ROOT, "
247               summary_all.csv"))
248     else:
249         print("No videos processed.")
250
251 if __name__ == "__main__":

```

250

main()

2025 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2025丘成桐中学科学奖论文公示