参赛成员姓名：朱瑞霖，陆欣妍，高诺一

中学：南京外国语学校

省份：江苏

国家/地区：中国

指导老师姓名：熊波

指导老师单位：浙江大学

论文题目：论如何科学地摇骰子

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

丘成桐中学科学奖—学术诚信声明

本参赛团队郑重声明：

一、本团队提交的参赛队员、指导老师、研究报告等参赛相关信息完整且属实无误。

二、本团队提交的研究报告是参赛学生在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。研究报告的选题来源、研究背景，指导老师及每一位学生队员在研究报告撰写中承担的工作以及贡献已详尽列出，并确切属实。

三、尽本团队所知，除文中加以标注和致谢中所罗列的内容外，研究中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，不存在代写、抄袭或其他违规行为；不存在未列支在内的其他指导老师。

四、本团队在研究报告中对 AI 工具的使用情况已作如实声明，并已事先获得指导教师的许可。相关辅助性证明材料已按要求提交。本团队承诺，在研究过程中不存在任何不当使用 AI 的行为。

五、本团队参赛全程与辅导机构或其他商业机构无任何关联。

六、指导老师为中学或高校/科研机构的老师，全程为无偿指导。

以上，若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任，并服从丘成桐中学科学奖组织委员会的裁决。

参赛学生（签字）：

以上情况属实，学校负责人签字：

学校名称（加盖学校或教务处公章）：

指导老师 1（签字）：

以上情况属实，单位负责人签字：

单位名称（加盖单位公章）：

※指导老师 2（签字）：

※以上情况属实，单位负责人签字：

※单位名称（加盖单位公章）：

2026年9月1日

标※为根据实际情况选择性填写。团队的每位学生和指导老师都需要在诚信声明上签字、盖章，以团队为单位提交一份 PDF 扫描件。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

论如何科学地摇骰子

朱瑞霖，陆欣妍，高诺一

2026 Tiyu High School Science Award
仅用于2026年体育高中科学论文大赛

摘要

摇骰子是大家平时聚会常玩的游戏，但每次把一大堆骰子倒进盒子里，它们总是东倒西歪、乱成一团。要是想把它们摆整齐，平时最笨的办法就是用手一颗颗去码，费时又费力。有没有什么办法能让这堆混乱的骰子自己排整齐呢？早在 2017 年，Asencio 等人在《物理评论快报》（PRL）上发表了一篇纯实验论文，发现了一个极具反直觉色彩的现象：只要在圆柱容器里给这堆立方体骰子施加交替剪切转动，颗粒层间的剪切力就会推着它们克服重力和摩擦阻力慢慢调头，最终竟然能自发排成一层层极其规整的同心圆环结晶相。这个操作简单却效果惊艳的现象深深吸引了我们，于是在这个暑假，我们三人组成了研究小组，打算把这个非平衡态软物质课题彻底搞清楚。

我们先从网上采购了数百颗规格一致的标准骰子，照着文献搭了简易装置做预实验。面对几百颗骰子密密麻麻挤在一起、阴影遮挡和桶壁反光极易导致图像算法失效的难题，我们没有走传统阈值分割的老路，而是尝试引入了最新的视觉大模型 SAM 3，配合一套几何形态清洗算法，成功搞定了一套自动化的特征提取管线，高精度提取出了每颗骰子的位置、角度以及四重取向序参量 q_4，非常漂亮地定量复现了文献里的结晶动力学过程和相图基准。接着，我们还在骰子堆里塞入修剪好的异形橡皮和塑料片充当“局部几何缺陷”，从微观实验上直观观察到了应力集中和错位是如何一步步诱导整个体系走向失稳瓦解的。

在理论建模上，原文献只做了定性描述，留下了很大的空白。我们尝试把剪切摇晃引起的随机扰动等效为一个非平衡态的“有效温度”，推导并建立了受几何互锁与摩擦阻碍的过阻尼朗之万动力学方程，定量解释了为什么轻轻晃动骰子会被卡在亚稳态、而适度剪切却能跃迁至有序晶态。更关键的是，我们的模型还推导出了一个反常预测：驱动强度并不是越大越好，一旦晃动过于剧烈，体系反而无法维持有序！顺着这个理论预言，我们大幅拓宽了转盘角加速度 α 的测试区间，果然在实验中抓到了这个文献从未记载的新现象——当驱动参数 Γ 越过某个上限后，骰子剧烈翻滚飞溅，整齐的阵列瞬间解体，重新跌回各向同性的混乱流态。由此，我们在实验上首次完整绘制出了包含“过驱动诱导重入无序（Re-entrant Disordering）”特征的全新动态相图。

最后，从驱动参数 $\Gamma = \alpha/g$ 的定义出发，我们冒出一个大胆的想法：真实的重力常数改不了，但能不能通过外加纵向力来改变等效的 g 呢？于是我们在水平旋转的基础

上，给体系额外挂载了一台独立的垂直激振台。实验发现，高频的垂直微振动在动态上周期性松弛了颗粒间的正应力和死锁卡壳，不仅让结晶速度直接上了一个数量级，还让我们发现垂直振动频率其实是一个可以主动调节相图界限的新旋钮——改变频率就能让原本固定的相变边界发生平移。

本文的主要工作与创新点可以归纳为三点：

1. **建立了自组织动力学理论方程，首次预测并实验抓到了“重入无序”新相变：** 突破了原工作停留在定性观察的局限，将剪切扰动等效为空间有效温度并引入朗之万动力学模型，从能量势阱和亚稳态逃逸的角度定量解释了粒子排布有序化的机理；更利用该理论首次预测并实验证实了过强剪切会导致晶态重新打散，补全了从“无序到有序、再到重入无序”的完整相变演化相图。
2. **用 SAM 3 大模型结合缺陷破坏实验，打通了动态高效精准观测链路：** 把视觉大模型引入到了高密度颗粒体系的实验表征中，彻底解决了骰子紧贴粘连和阴影错识别的痛点；
3. **搭建“水平剪切 + 垂向激振”双自由度调控模式，开辟了相图边界重构新途径：** 跳出了文献中默认重力加速度恒定不可调的思维定势，巧妙地用高频垂直微小振动动态松弛了层间正应力和几何互锁，不仅大幅提升了自组织结晶速率，更把垂直激振频率确立为一个能够主动控制和重构颗粒相界的新维度。

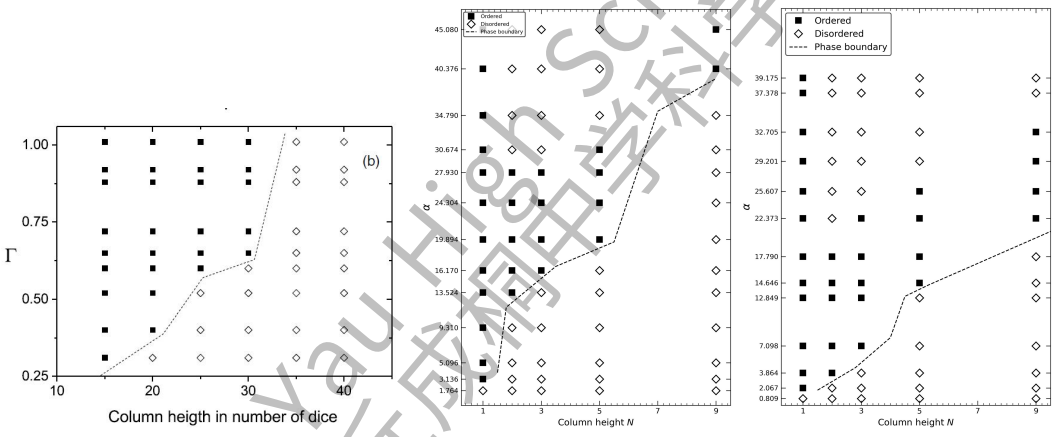


图 1：文献中报道的相图分布：随着转动激励强度的增加，有序的过程会越来越容易。

图 2：我们发现的新现象：原本的相图在转动激励强度上应当存在一个上边界，即当驱动强度超过一定阈值后，体系反而从高有序态重新进入无序态。

图 3：我们发现的新现象：除了改变转动强度，还可以进一步引入 z 方向的震动来改变等效的重力加速度，从而改变激励强度的相图范围，使其更为容易从无序到有序，也更为容易从有序到无序。

关键词：骰子；自组织；有序化；相图；等效重力

2026 Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

目录

1 引言.....1

2 研究背景与预实.....3

2.1 相关研究基础调研.....3

2.2数据准备与预实验装置搭建.....6

2.3实验数据高效且精确地处理.....8

2.3.1 基于神经网络和深度学习的图像识别方法.....8

2.3.2 数据清洗.....10

2.4预实验结果分析与基准复现.....12

2.4.1密堆积演化特征复现（ϕ vs N）.....12

2.4.2侧向贴壁体积分数演化特征复现（ϕ_{lateral} vs N）.....13

2.4.3侧向立方体有序度演化特征复现（S_4 vs N）.....14

2.4.4空间方位相关函数特征复现（$G_4(r)$ vs r）.....15

2.4.5剪切驱动下结晶相图特征复现（Γ vs Column height N）.....16

2.5 本章小结.....17

3 搭建理论模型解释实验现象.....18

3.1微观物理假设与过阻尼朗之万方程.....18

3.2 Fokker-Planck 方程从主方程的严格展开.....19

3.3 稳态分布解析解与单参数平均场序参量 $\mathrm{S}_4^{\mathrm{MF}}(\mathrm{a})$.....20

3.4 唯象闭合模型：堆积密实化动力学与对数增长近似律.....21

3.5 理论适配性验证.....22

4 创新点一：强驱动下的相变演化与反常“无序化”现象.....24

4.1 驱动强度真的越大越好么？.....24

4.2 单层体系难以观察到无序化.....26

2026 Shanghai High School Science Award 仅用于2026上成杯科学类论文公示

4.3 多层体系产生无序化趋势 28
4.4 相图上边界的发现 33
4.5 到达无序态和有序态的速率差异 34
4.6 本章小结 36
5 创新点二：引入等效重力系数后的相图调控 37
5.1 实验平台（震台）的搭建以及有效性检验 37
5.2 旋转与振动操作不同组合对系统的影响 39
5.3〝有序-无序〞相图的动态调控 40
5.4 本章小结 44
6 拓展实验与讨论 45
6.1 不同尺寸大小的骰子实验 45
6.2 不同形状的容器实验 46
7 结论与总结 47
8 参考文献 48
致谢 49
附录 51

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

1 引言

在日常生活中，提到骰子，大家第一反应往往就是随机、概率和不可预测。无论是在家里玩桌游，还是在聚会上摇骰盅，我们使劲摇晃的目的，都是想通过剧烈的碰撞打乱原本的次序，掷出一个谁也猜不到的无序结果。然而，在一次偶然的浏览知乎平台时，意外被一篇讨论前沿物理实验的科普帖子 *1.2* 所吸引，其讲述道：如果我们把一大堆普通的立方体骰子塞进一个圆柱形容器里，如何摇晃容器能够让随机排布的骰子都摆放整齐呢？那就是持续来回转动这个圆柱形容器，神奇的现象发生了——原本东倒西歪、乱七八糟的骰子堆，并没有在晃动下变得更乱，像听了指令一样自发调整姿态，紧贴着圆柱桶壁，规规整整地排成了一层层漂亮的同心圆。我们总觉得机械摇晃只会让系统熵增、让容器内部的东西越来越乱，但这一实验结果告诉我们：在特定边界和驱动下，混乱的颗粒系统竟然能自己“走出”高度有序的结构，这实在是一个让人着迷的反直觉现象。



图 1.1:日常摇骰子游戏

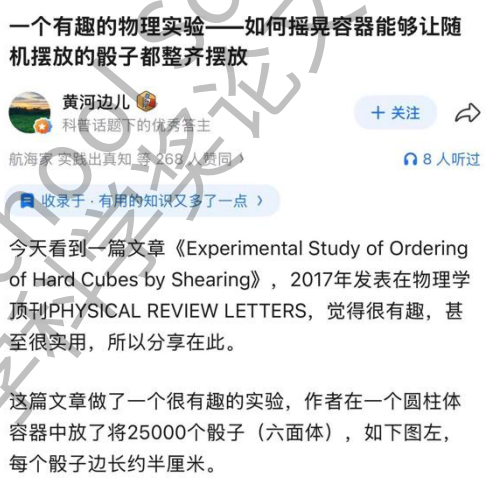


图 1.2:物理实验科普帖

图 1：骰子在日常生活中的应用场景（左）以及知乎平台物理实验分享（右）

这个藏在日常游戏里的奇妙现象，究竟只是特定条件下的巧合，还是背后存在着严谨而普适的物理规律？带着这份好奇，我们找到了这篇知乎帖子中提到的经典文献——一篇发表在物理学顶刊《Physical Review Letters》（PRL）上的研究（Asencio 等人，2017）。论文指出，在周期性的交替剪切驱动下，原本随机堆积的立方体颗粒之间会产生各向异性的摩擦与挤压，正是这些相互作用帮助它们克服了重力与接触阻力，自发调整位置，从局部的取向对齐逐步演化为全局高度有序的晶态排列。一个随手摇骰子的动作，背后竟然连着如此前沿的非平衡态物理课题，这让我们大受震撼。兴奋之余，**新的疑问也随之而来：这种有序化转变对实验参数到底有多敏感？它是需要极其严苛的条件才能触发，还是很容易就被观察到？更进一步，在这个受限颗粒系统里，是否还潜藏着文献尚未报道的新奇物理现象？**

仅供学术研究使用 2025 Yau Mathematical Sciences Research Institute

为了寻找答案，我们三人组建了研究小组，正式开启了对这一受限颗粒自组织课题的深入探索。科学的创新从来不是空中楼阁，探寻未知的前提是拥有坚实且可复现的基准。因此，在开启未知的探索之前，我们确立了分步走的研究路线：首先，我们根据文章中的描述搭建了合适的实验平台，并结合深度学习构建了高精度的图像特征提取算法，对 Asencio 等人的经典实验数据进行高质量的定量复现；在验证了实验系统与分析方法的可靠性之后，我们再以此为基准进一步去探寻更丰富的物理规律。

PRL 119, 228002 (2017) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 1 DECEMBER 2017

Experimental Study of Ordering of Hard Cubes by Shearing

K. Asencio,[1] M. Acevedo,[2] I. Zuriguel,[1] and D. Maza[1,*]
[1]Departamento de Física y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra, 31008 Navarra, Spain
[2]CINVESTAV-IPN, Unidad Monterrey, PIIT. 66600 Apodaca, Nuevo Len, Mexico
(Received 1 December 2016; revised manuscript received 19 September 2017; published 1 December 2017)

We experimentally analyze the compaction dynamics of an ensemble of cubic particles submitted to a novel type of excitation. Instead of the standard tapping procedure used in granular materials we apply alternative twists to the cylindrical container. Under this agitation, the development of shear forces among the different layers of cubes leads to particle alignment. As a result, the packing fraction grows monotonically with the number of twists. If the intensity of the excitations is sufficiently large, an ordered final state is reached where the volume fraction is the densest possible compatible with the boundary condition. This ordered final state resembles the tetratic or cubatic phases observed in colloids.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.228002

图 2: PRL 上的经典论文 Experimental Study of Ordering of Hard Cubes by Shearing

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

2 研究背景与预实验

2.1 相关研究基础调研

为了理解这种越摇越整齐的反直觉现象，我们深入研读了 Asencio 等人（2017）发表在《Physical Review Letters》（PRL）上的经典论文。如图 2 所示，这项研究的核心，就是探讨把一堆立方体骰子装入圆柱容器后，在持续的交替扭转剪切下，它们究竟是如何从杂乱无章一步步自组织排成整齐结构的。通读完原始论文后，我们总结原作者团队主要聚焦于两个核心问题：**原本处于阻塞卡死状态的骰子，究竟是通过何种能量传递机制重新转动并规则排布起来的？以及系统的驱动加速度、填充高度等关键参数，到底存在怎样的阈值，才能促使体系彻底完成从无序到晶态的转变？**

EXPERIMENTAL DETAILS AND PROCESSING PROTOCOL

The experiment was performed using a transparent Plexiglas cylinder of radius $R = 8.7 \pm 0.01\ cm$ with its base made of aluminum (Fig. S1a). The container is connected through the base to a gearbox that was driven by an 1/2 HP electrical motor controlled by an electronic variator. Such system supplies angular velocities going from $2.3\ s^{-1}$ to $17.8\ s^{-1}$, i.e., tangential velocities at the cylinder border going from $20\ cms^{-1}$ to $155\ cms^{-1}$. The cell was filled using a standard method; i.e. the dices were stored in an auxiliary cylinder which was placed inside the experimental cell and slowly raised. After the initial filling, the cell was twisted during a given number of cycles and a picture of the whole lateral surface was obtained. To this end, the cell was slowly rotated at a given speed and registered with a vertical line scan camera. From this, the cylindrical surface is reconstructed as a flat image of 8000x3888 pixels size (Fig. S2a). After this, the system was twisted again for a number of cycles, a picture of the lateral surface obtained, and the procedure was repeated until reaching $N = 5 \cdot 10^5$ twists for each experimental conditions.

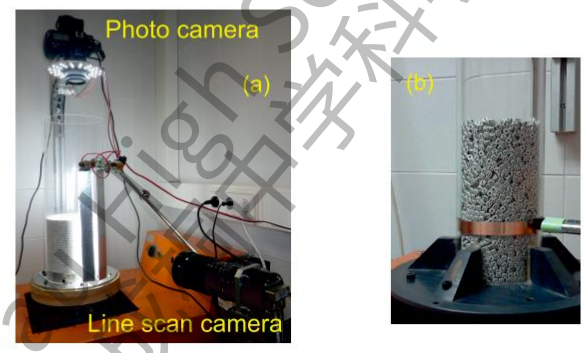


Fig. S1. (a) Experimental setup. (b) Small diameter cell used to test the effect of this parameter in the compaction process.

图 3：参考论文中的实验装置介绍：摄像装置（左）以及转动平台（右）

为了解答这些问题，论文作者搭建了如图 3 所示的实验装置：他们把骰子装进透明圆柱容器里，通过底部来回旋转给骰子施加摩擦和挤压力。他们发现，这种摇晃产生的剪切力刚好能帮骰子克服本身的重量和卡住的阻力，让它们可以在平面上转动重排。**为了准确测量骰子排得有多整齐，他们引入了两个量化指标：一个叫序参数 $\mathbf{S_4}$，**

$$S_4 = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos 4\theta_j\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin 4\theta_j\right)^2}$$

2025-T-Yan-High School Science Award
仅用于2025年度中学科学奖论文公示

其中 θ_j 代表第 j 个颗粒主轴相对于参考坐标轴的倾角，N 为观察区域内的颗粒总数。专门看骰子的方向是不是都朝向同一个角度。

另一个量化指标叫空间关联函数 $\mathbf{G_4(r)}$，主要是用来测量这种整齐的排列趋势到底能传递多远的距离，用以评估局域的有序度和全局的有序度：

$$G_4(r) = \frac{1}{8N}\left\langle 35\left|\cos\left(\Delta\theta_{i,j}\right)\right|^4 - 30\left|\cos\left(\Delta\theta_{i,j}\right)\right|^2 + 3\right\rangle$$

其中，$\Delta\theta_{i,j}$ 表示间距为 r 的两颗粒间的相对偏转角。

通过分析实验数据，论文得出了 3 个非常直接的结论。如图 4 所示：第一，骰子是沿着容器壁开始排列整齐的。靠着圆柱侧壁的骰子最先被弯曲的墙面带齐，形成一圈整齐的边缘，然后这种整齐感再一层层往容器中心扩散，最终所有骰子都排成了同心圆环。第二，能不能排整齐取决于旋转的力量和骰子重量。如果骰子堆得太高，层数过多，底层方块被压得很实，就需要更大的转动力度才能把它们摇动。第三，作者们画出一张清晰的相图，标出了转动力度与堆叠高度在什么临界范围内才能成功让骰子自动从无序变为有序。

综上所述，Asencio 等人的工作为受限颗粒系统的剪切结晶提供了扎实的理论与实验基础。然而，结合近年来对不同受力模式及颗粒形状的研究，该领域仍有广阔的探索空间：在驱动机制方面，循环剪切中的机械退火现象证明了周期性外力对消除缺陷、促使结构密化的有效性 [1]，而连续剪切下非稳态浓密颗粒流的流变学响应 [2] 以及强震动驱动下的结构与动力学演化 [3]，则揭示了不同外力场（剪切、震动）对颗粒卡死解除与重新排列的深层影响；在几何边界与颗粒形态方面，立方体等各向异性颗粒由于存在平整侧面，在剪切诱导有序化 [4] 或极度接近基态的自组装过程[5] 中表现出与传统球体截然不同的面面贴合机制；特别是扭转容器这一特定几何边界[6]，更展现出利用多向微幅位移高效诱导立方体颗粒快速结晶的独特优势。对于极强驱动或特定几何边界下系统的动态演化细节，目前仍存在进一步深入探索的空间。得知这样一个看似不起眼的摇骰子现象背后竟蕴含着如此丰富的非平衡态物理，这极大激发了我们的研究兴趣。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

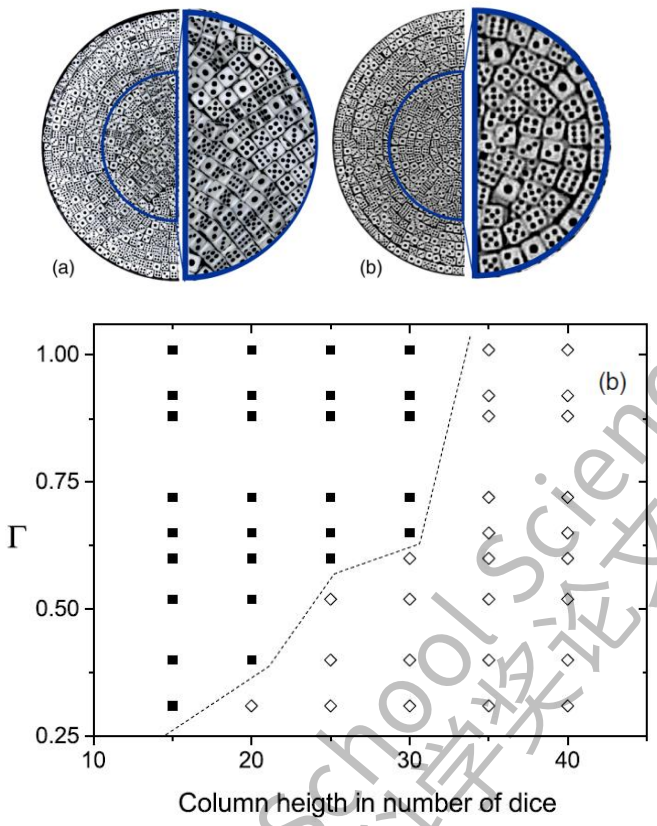


图 4：文献中的结论：骰子沿容器壁开始排列整齐（上）；骰子层数越多，则需要更大的转动才能让混乱的系统变得规则，其在参数空间内可以画出一张相图（下）。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

2.2 数据准备与预实验装置搭建

为了搞清楚不同驱动强度到底如何一步步影响圆柱容器内立方体骰子的动力学演化过程，同时也为了给后续基于深度学习的图像分割与特征提取模型喂入充足、规范且高信噪比的原始图片，我们设计了一套严格控制变量的实验采集方案。如图 5 所示，整套实验装置的核心是一只内径为 $D = 17.5$ cm、高度为 $H = 25$ cm 的高透有机玻璃（亚克力）圆柱形容器，便于高速相机从顶部与侧面清晰抓拍。我们将该容器同轴垂直固定在一个水平的旋转平台上，确保在施加正反周期性交替转动时，容器既能获得稳定、容易调整、且可复现的角加速度激励，又能严格抑制偏心晃动带来的杂散横向扰动。在每次正式采集前，我们都将标准立方体颗粒随机充填进去，并由顶部同轴补光灯打亮视场，确保不同剪切驱动强度下采集到的图像对比度均一，为后续的批量定量分析打好基础。



图 5：预实验装置介绍：塑料转盘与圆柱形容器（左）以及转动平台组成（右）

为了保证颗粒系统的均一性，如图 6 所示，我们在淘宝上购买了 800 颗边长为 $a = 1.26$ cm、单分散性极好且加工规则的标准立方体骰子作为研究样本。为了消除初始化过程中对动力学演化过程的随机干扰，我们在每次测试前都会把颗粒均匀倾倒入容器内并轻微抚平表层，确保各组实验在初始堆积体积分数以及侧壁几何约束上基本对齐，尽可能保证初始边界与无序状态的可重复性；同时针对每一组实验参数，我们都进行多次测量求取均值的操作，以尽量规避实验中的随机误差。

2026 Yau High School Science Award
仅用于科学论文公示



图6：预实验装置介绍：骰子大小与型号（左）以及骰子实物图（右）

在动力学驱动控制上，如图 7 所示，我们通过手动摇动驱动转盘，给圆柱容器底部施加受控的交替剪切旋转，并**通过细致控制摇动频率与角速度，设置了 9 种梯度的旋转驱动强度**。这个驱动区间范围非常完整：既涵盖了低强度微弱扰动下骰子只能发生局部蠕变重排的阶段，也包含了适中剪切下体系能自发完成的稳态有序演化，同时还覆盖了高驱动强度下颗粒被甩飞、剧烈翻转并发生三维失稳的流动状态，从而能够完整捕捉到体系在不同能量输入下的动态响应全貌。

在整个动力学演化过程中，**我们把相机垂直架设在容器正上方，其搭载大疆的云台，使得其拍摄视角稳定**，保证我们可以恒定高帧率对表层颗粒进行连续拍摄，完整记录下系统从最初各向同性的杂乱堆积、逐步自组织演化至动态稳态的全过程。最终，我们针对 9 组不同梯度的驱动转速，整理出了一套包含数千张高分辨率图像的时序数据集，为后续利用图像算法进行特征提取和定量分析打下了扎实的数据基础。



图7：预实验装置介绍：转动平台与数据采集装置全景

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026年丘成桐中学科学奖公示



图 8：小组成员实验过程中的合作场景

2.3 实验数据高效且精确地处理

2.3.1 基于神经网络和深度学习的图像识别方法

为了从拍摄的时序图像中快速且准确地抠出每颗骰子的位置与姿态，同时搞定颗粒挤在一起时的阴影遮挡、亚克力桶壁反光以及骰子紧贴边缘容易粘连误判的难题，我们摸索出了一套“深度学习视觉模型 + 传统几何形态学处理”的自动化分析流程。这样既保证了批量处理大图的效率，又大大提升了识别微小位姿变化的精度。具体的设计流程如图 9 所示，其主要可以划分为以下四个步骤：数据采样；像素级语义分割；角度计算；清洗与数据导出。而最终根据真实实验数据识别出来的结果如图 10 所示，可以看到其效果很好。

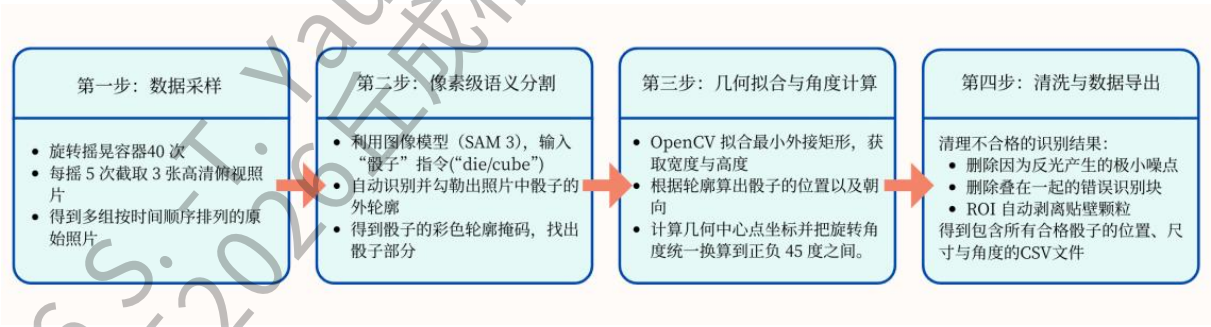


图 9：自动化数据处理流程：图像识别并导出 CSV 表格

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示



图 10：原始照片与经过图像识别标记后的照片对比展示

在实验采集与采样策略上，每组驱动条件我们都会进行 40 次交替旋转驱动。为了在捕捉动力学演化细节和控制计算开销之间找到平衡，我们制定了定间隔采样方案：每完成 5 次交替驱动，就连续抓取 3 张高分辨率图像作为这一阶段的代表帧。所有抽取的图像统一归档，直接输入到后续搭建的自动化特征提取流程中。

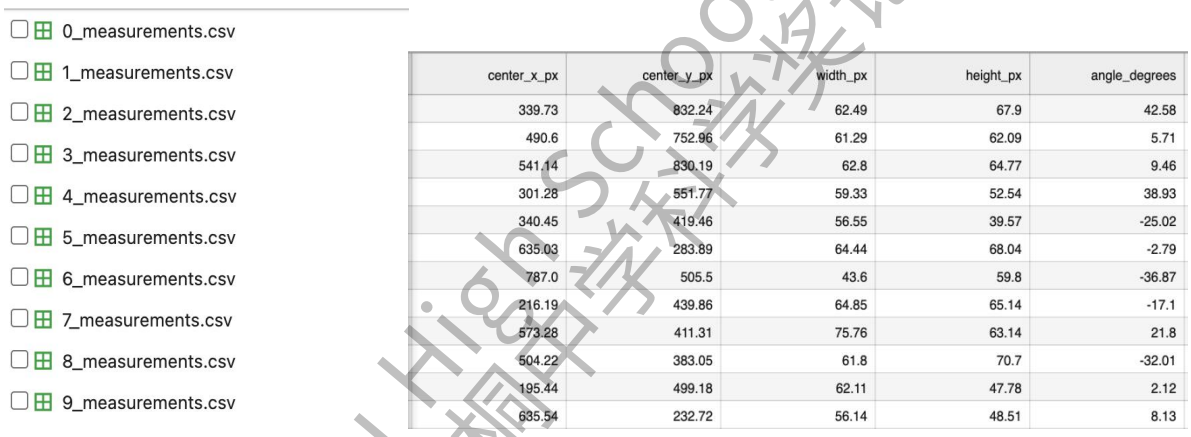
到了像素级的语义分割阶段，我们引入了 Meta 提出的最新视觉基础模型 Segment Anything Model 3 (SAM 3) [7] 作为核心分割引擎。面对容器内密密麻麻、彼此挤压的正方体骰子，我们通过输入“正方体颗粒 (die/cube) ”这一特定的文本 Prompt，利用 SAM 3 强大的零样本 (Zero-shot) 泛化能力，生成了每颗独立骰子的高分辨率多边形掩码 (Polygon Mask)。相比于我们最初尝试的 Otsu 阈值分割或 Canny 边缘检测，大模型可以很好的规避复杂光照不均、顶光阴影和紧密贴合带来的干扰，有效解决了传统视觉算法极易出现的“把两块黏成一块”（欠分割）或“把单块阴影切碎”（过分割）的难题。

在获得高质量的多边形掩码后，系统对分割结果进行几何提取与角度归一化后处理。针对每个提取出的颗粒掩码，利用 OpenCV[8] 拟合其最小外接矩形，准确获取颗粒的中心坐标 (c_x, c_y)、矩形的宽度与高度，以及原始倾角 θ_{raw}。鉴于正方形几何体旋转 $90°$ 后形态重合，本文设计了对称性角度映射函数，将原始倾角归一化至 $[-45°, 45°]$ 的主周期区间内：$\theta_i = \text{Normalize}(\theta_{\text{raw}}) \in [-45°, 45°]$

该步映射有效地清除了旋转周期带来的相位不连续性，使得提取的角度能够客观反映颗粒与水平面的相对偏转程度。

为了保障提取数据的鲁棒性与物理真实性，我们在处理流程中设置了严格的筛选与过滤机制。系统首先将分割置信度阈值设定为 0.2，在确保动态碰撞下边缘颗粒不被遗漏的同时，最大化捕捉颗粒边界；其次，引入双重几何尺寸过滤机制（设置最小面积阈值 $S_{min} = 300px$ 与最小尺寸阈值 $d_{min} = 15px$），高效剔除由反光斑点或局部阴影引发的杂散噪点；最后，鉴于圆柱容器弯曲侧壁对正方形颗粒产生的几何挤压与物理失配，设立了感兴趣区域（ROI）截断边界，自动剥离紧贴容器壁的颗粒，仅保留内部体相区域的颗粒数据用于全局物理参数的统计分析。

最终，系统将每 5 次驱动对应采样的 3 张图像处理完毕后，按驱动周期分组整合并自动化导出为标准格式的 CSV 数据文件。每个 CSV 文件中完整记载了该周期节点下识别出的所有矩形的中心坐标 (c_x, c_y)、宽度（width）、高度（height）以及归一化后的水平偏转角度 θ_i，为后续的数据清洗，以及取向序参数 S_4 和相关函数 $G_4(r)$ 的定量计算提供了标准而统一的数据输入，如图 11 所示。



center_x_px	center_y_px	width_px	height_px	angle_degrees
339.73	832.24	62.49	67.9	42.58
490.6	752.96	61.29	62.09	5.71
541.14	830.19	62.8	64.77	9.46
301.28	551.77	59.33	52.54	38.93
340.45	419.46	56.55	39.57	-25.02
635.03	283.89	64.44	68.04	-2.79
787.0	505.5	43.6	59.8	-36.87
216.19	439.86	64.85	65.14	-17.1
573.28	411.31	75.76	63.14	21.8
504.22	383.05	61.8	70.7	-32.01
195.44	499.18	62.11	47.78	2.12
635.54	232.72	56.14	48.51	8.13

图 11：自动化数据处理流程：最终输出的 CSV 表格格式（左）与表格内每列内容（右）

2.3.2 数据清洗

为了从神经网络原始分割结果中进一步剔除干扰目标，提升统计物理量的准确性，本研究在几何拟合的基础上建立了一套基于尺寸分布与形态拓扑的数据清洗规则。虽然 SAM 3 模型具有极高的语义分割精度，但在密集颗粒激烈碰撞、局部光照不均或颗粒间存在阴影缝隙的情况下，分割算法偶尔会将两颗贴合颗粒误识别为单一的连通域，或将颗粒间的长条状阴影与侧壁反光带误诊为颗粒，从而拟合出长宽比严重畸变的伪矩形。如果不把这些噪点剔除掉，后续算出来的取向序参量和关联函数就会出现明显的系统误差。

2026 Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

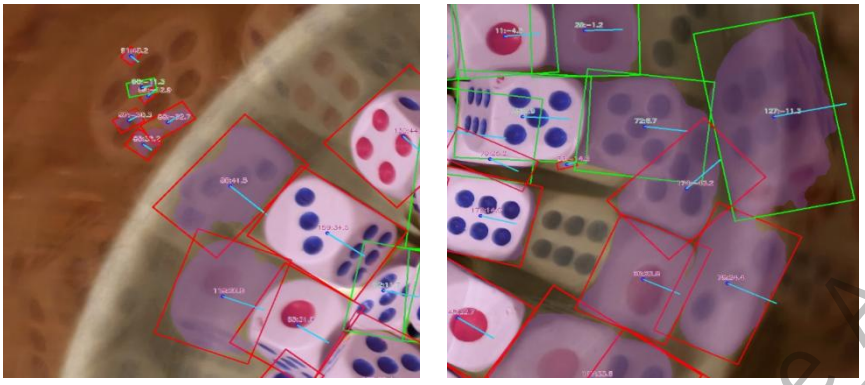


图 12：受反光等问题影响错误框选出的部分

针对这一问题，本文基于正方形骰子顶面投影的几何对称性，提取了每个拟合矩形的宽度（width_px）与高度（height_px），并绘制了输出的表格中每个被认为是骰子的物体宽度和高度的分布热力图，如图 *13* 左图所示。图中分析了原始 *csv* 表格中计入的“骰子”矩形长宽分布热力图。从中可以清晰地看出，提取目标的尺寸呈现出高度集中的单峰分布形态。合格的单体骰子颗粒严密地聚集于暗红色核心主峰区域（宽度与高度均集中在 60~65“px”左右，长宽比 R≈1.0），这与实验所用标准骰子颗粒（a=1.26cm）在拍摄分辨率下的理论像素尺寸完全吻合，说明了这一算法的有效性。

但是与此同时，热力图直观地揭示了未清洗前的两类异常提取形态：一是横轴 width_px 延伸至 100 ~ 130 px 的离散区域，对应于两颗粒粘连导致的“伪矩形”；二是纵轴或横轴低于 40 px 的离散小区域，对应于边缘遮挡残缺或杂散光斑噪点。结合这一分布特征，本文设定了严格的双重清洗门槛：仅保留尺寸落在主峰区间（50 px ≤ width_px ≤ 80 px 且 50 px ≤ height_px ≤ 80 px）内的目标；同时计算矩形长短边之比 R = a/b，剔除 R > 1.35 的偏长目标。通过上述数据清洗流程，系统成功消除了分割伪影与粘连噪声对角度及位置统计的干扰。按步骤清理完后框选矩形宽度和高度的热力分布图如图 13 右图所示，可以看到其异常提取区域大大缩小，这确保参与后续物理量计算（$\phi, S_4, G_4(r)$）的数据均位于高置信度的正方形颗粒主峰区。

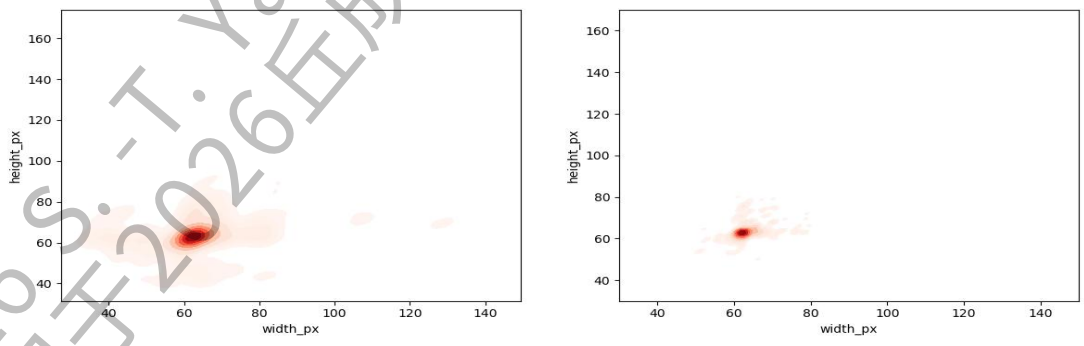


图 13：原始 CSV 表格中计入的“骰子”矩形长宽分布热力图与根据设定阈值筛选长宽比后的长宽分布热力图的比较

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖评示

2.4　预实验结果分析与基准复现

利用前述建立的深度学习分割与数据清洗流程，本研究对不同驱动强度下采集的时序图像进行了定量计算，系统分析了各物理量随驱动周期 N 或空间距离 r 的演化规律，成功复现了 Asencio 等人（2017）报道的核心物理现象与数据相图。

2.4.1　密堆积演化特征复现（ϕ vs N）

为了定量评估驱动剪切对受限正方体颗粒系统密实化进程的影响，**本研究提取了 9 组不同驱动强度 Γ 下总体积分数 ϕ 随驱动周期 N 的动态演化曲线，其与文献的结果高度一致，如图 14 所示。**从图中数据可以清晰地看出，系统的有序化响应高度依赖于输入的驱动能量强度，并呈现出鲜明的分级演化特征：

在驱动初始阶段（N = 0），各组系统的体积分数均匀处于较松散的状态（$\phi \approx 0.60 \sim 0.62$），颗粒由于随机堆叠存在大量初始空隙。当驱动强度处于较低水平时（如 $\Gamma = 0.101, 0.103, 0.111$），输入的剪切动能无法克服颗粒间的摩擦力与重力势垒，顶层颗粒难以发生有效重排，体积分数在整个驱动周期内几乎停滞不前（ϕ 仅从 0.60 微升至 $0.61 \sim 0.62$），系统处于无序“冻结”状态。随着驱动强度的提升（$\Gamma \geq 1.145$），剪切应力成功激活了颗粒的重排机制，曲线展现出典型的“快速响应-动态饱和”两阶段特征：在演化前期（$N \leq 20$），ϕ 随驱动周期呈显著上升趋势；进入后期（$N \geq 25$）后增长放缓并逐步收敛至稳定平台。

此外，驱动强度直接决定了系统最终能够达到的密堆积上限。随着 Γ 从 1.328 增至 3.212，稳态体积分数呈台阶式提升，最高驱动组（$\Gamma = 3.212$）在 $N = 35$ 时达到了最高 $\phi = 0.79$ 的极高密堆积水平。上述演化规律表明，受控剪切能够极其高效地消除系统内部空隙，驱动颗粒系统从松散堆积演化至高密堆积相，这一定量演化响应与 Asencio 等人（2017）报道的密实化规律完全一致。

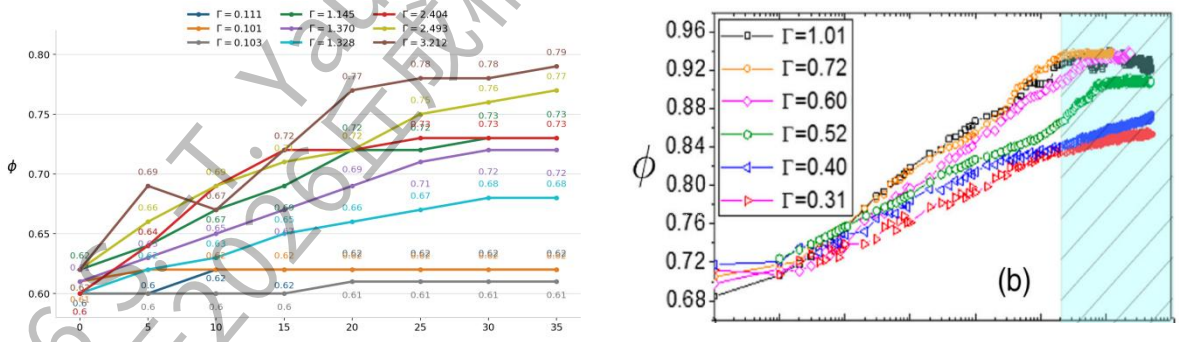


图 14: 9 组不同驱动强度 Γ 下总体积分数 ϕ 随驱动周期 N 的动态演化曲线

预实验画出的总体积分数动态演化曲线（左）文献中呈现的总体积分数动态演化曲线（右），可见预实验结果与文献中高度吻合

2026 SJTU Yau Hongkai Science Award 仅用于2026丘成桐科学奖公示

2.4.2 侧向贴壁体积分数演化特征复现（$\phi_{lateral}$ vs N）

本研究进一步提取了 9 组驱动强度下侧向贴壁体积分数 $\phi_{lateral}$ 随驱动周期 N 的动态演化曲线，其与文献的结果高度一致，如图 15 所示。

在初始驱动状态（$N = 0$），各组贴壁区域的体积分数处于极其松散且高度不均匀的状态（$\phi_{lateral} \approx 0.30 \sim 0.36$），远低于体相的初始密度，这归因于随机堆叠时圆柱侧壁与正方体颗粒平直边缘之间的几何不匹配。对于极低驱动组（$\Gamma = 0.101, 0.103, 0.111$），输入的剪切应力不足以打破贴壁颗粒的静摩擦与几何锁死，导致体积分数在整个演化周期内几乎保持水平停滞（$\phi_{lateral}$ 仅从 $0.32 \sim 0.35$ 微微升至 $0.37 \sim 0.39$），系统始终处于未激活的侧向“冻结相”。

当驱动强度跨越临界激活阈值后（$\Gamma \geq 1.145$），贴壁区域展现出极强的结晶响应速度。剪切动能驱动颗粒克服摩擦，受圆形侧壁的强几何引导，优先沿壁面切线方向对齐重排，使得 $\phi_{lateral}$ 呈急剧上升趋势。在演化后期，贴壁体积分数的演化速率及稳态上限展现出严密的驱动强度正相关性。在中等驱动强度下（$\Gamma = 1.145 \sim 1.370$），曲线表现出平缓上升的动力学特征，并在 $N \geq 20$ 后逐步趋于稳定，其稳态值最终收敛并分布于 $0.77 \sim 0.84$ 区间。而在强驱动条件下（$\Gamma = 2.404 \sim 3.212$），贴壁区域在前 15 个驱动周期内呈现爆发式增长，其中最高驱动组（$\Gamma = 3.212$）在仅 $N = 15$ 时便迅速拉升至 $\phi_{lateral} = 0.86$ 的高密度水平，并在 $N = 35$ 时最终达到接近理论极值的 $\phi_{lateral} = 0.92$。

侧向贴壁体积分数的演化快于体相全局演化的现象，定量验证了侧壁几何约束在剪切驱动下能够率先诱导产生规则同心圆环结晶相的物理机制，这也与文献报道的边界诱导结晶过程完全吻合。

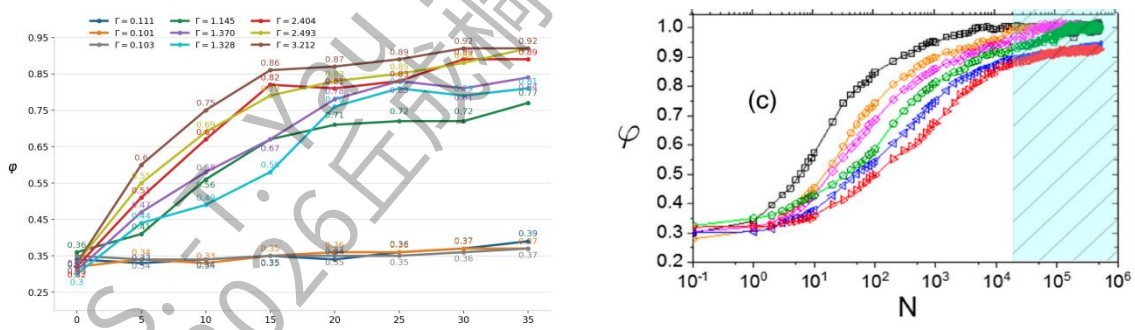


图 15: 9 组驱动强度下侧向贴壁体积分数 $\phi_{lateral}$ 随驱动周期 N 的动态演化曲线

预实验画出的侧向贴壁体积分数动态演化曲线（左）文献中呈现的侧向贴壁体积分数动态演化曲线（右），可见预实验结果与文献中高度吻合

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

2.4.3 侧向立方体有序度演化特征复现（S_4 vs N）

为了进一步定量刻画剪切驱动下颗粒系统微观取向由无序向结晶有序转变的动态相变过程，**本研究利用神经网络算法对不同驱动强度 Γ 下侧壁区域颗粒的立方体有序度参数 S_4 进行动态提取，其随驱动周期 N 的演化曲线与文献的结果高度一致，**如图 16 所示。

初始无序与低驱动“冻结”特征：在演化初始阶段（$N = 0$），由于颗粒随机堆叠，各组系统的有序度均处于极低水平（$S_4 \approx 0.13 \sim 0.30$），表现出无序堆叠特征。对于低驱动强度组（$\Gamma = 0.101, 0.103, 0.111$），剪切能量不足以克服颗粒间摩擦与结构锁死，使得 S_4 在整个驱动周期内几乎保持水平停滞（始终维持在 $0.17 \sim 0.25$ 区间波动），系统无法被激活产生定向重排。

激活强度的两阶段拉升与响应梯度：当驱动强度达到或超过激活临界值（$\Gamma \geq 1.145$）后，曲线呈现出“前期快速拉升-后期动态稳态”的两阶段规律。在演化前期（$N \leq 20$），剪切驱动颗粒协同旋转并沿水平方向迅速对齐，导致 S_4 迅速攀升；进入演化后期（$N \geq 25$）后，曲线逐步收敛至平台区。

此外，驱动强度显著影响了演化速率与最终收敛值：中等驱动组下（$\Gamma = 1.145 \sim 1.370$）：曲线呈平稳上升趋势，稳态时 S_4 收敛并分布于 $0.88 \sim 0.93$ 区间。强驱动组下（$\Gamma = 2.404 \sim 3.212$）：有序化进程极快，其中最高驱动组（$\Gamma = 3.212$）在 $N = 10$ 时 S_4 便已飙升至 0.86，并在 $N \geq 25$ 后稳定维持在 $S_4 \approx 0.97 \sim 0.98$ 的极高水平，表明侧壁区域已形成近乎完美的有序结晶相。

上述复现数据清晰表明，受控转动剪切不仅能消除自由体积，更能高效驱动受限正方体颗粒系统向高长程取向有序相转变，其演化趋势与相变规律与文献保持完全一致。

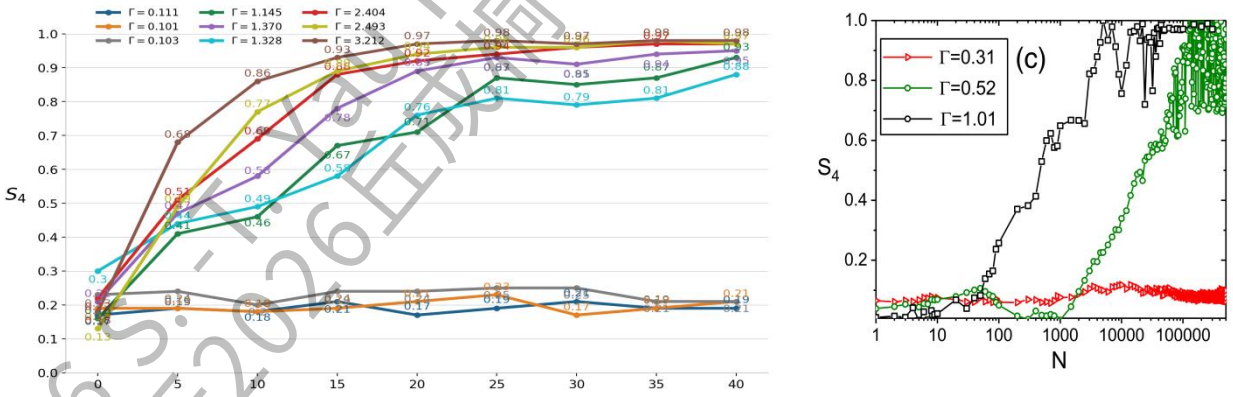
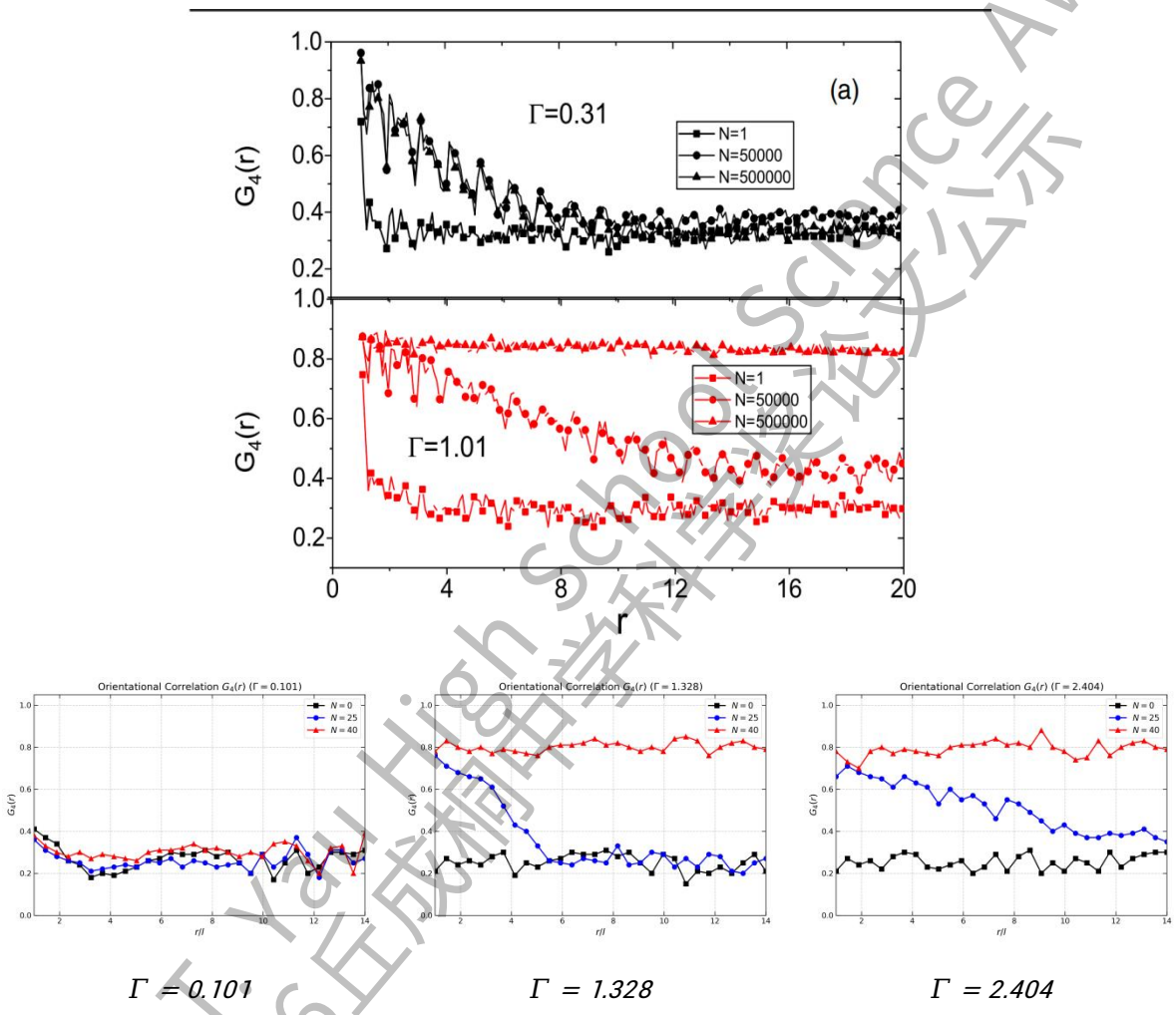


图 16:对 9 不同驱动强度 Γ 下侧壁区域颗粒的立方体有序度参数 S_4 进行动态提取，其随驱动周期 N 的演化曲线。预实验画出的 S_4动态演化曲线（左）文献中呈现的S_4动态演化曲线（右），可见预实验结果与文献中高度吻合。

2026 S-T Young Scholars Forum 仅用于2026年成果评选公示

2.4.4 空间方位相关函数特征复现（$G_4(r)$ vs r）

为进一步揭示剪切驱动下颗粒系统在空间尺度上取向有序性的传递机制，本研究计算了不同驱动强度（$\Gamma = 0.101, 1.328, 2.404$）与不同驱动周期（$N = 0, 25, 40$）下，**侧壁区域颗粒的空间定向关联函数 $\mathbf{G_4(r)}$ 随归一化距离 $\mathbf{r/l}$（$\mathbf{l}$ 为正方体边长）的动态演化曲线，与文献的结果高度一致**，如图 17 所示。



$\Gamma = 0.101$　　$\Gamma = 1.328$　　$\Gamma = 2.404$

图 17: 对 9 不同驱动强度 Γ 下空间定向关联函数 $G_4(r)$ 的动态演化过程。

预实验画出的$G_4(r)$动态演化曲线（下）文献中呈现的$G_4(r)$动态演化曲线（上），可见预实验结果与文献中高度吻合

空间关联函数的定量演化行为直观地揭示了剪切诱导长程有序相变过程中的微观机制：

1. **低驱动强度（$\mathbf{\Gamma = 0.101}$）：局域与长程有序的双重冻结**

在未激活的低驱动状态下，不论驱动周期 N 如何增加（从 $N = 0$ 至 $N = 40$），$G_4(r)$ 曲线均处于较低区间（以 $0.2 \sim 0.4$ 为中心剧烈波动），且随距离 r/l 的

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

增加快速衰减至无序背景水平。这表明低剪切应力不仅无法诱导长程有序，甚至无法在近邻颗粒间形成有效的局域取向对齐，系统微观姿态保持随机无序。

2. **中等驱动强度（$\Gamma = 1.328$）：局域晶核萌发到长程有序的演化**
当驱动强度跨越激活阈值后，关联函数展现出强烈的演化时间依赖性。在初始阶段（$N = 0$），$G_4(r)$ 全局维持在 ~ 0.25 的低位；在演化中期（$N = 25$），近邻区域（$r/l \leq 4$）的 $G_4(r)$ 显著上升至 $0.6 \sim 0.8$，而远端（$r/l > 6$）则迅速衰减至 $0.2 \sim 0.3$，呈现出典型的**短程有序/局域晶核**特征；当驱动周期累积至后期（$N = 40$），$G_4(r)$ 在整个空间范围（$r/l \leq 14$）内全面抬升至 0.8 以上的稳定高平台区，表明局域排列已成功扩展并贯穿至整个侧壁边界，完成了长程 Cubatic 有序相的建立。

3. **强驱动强度（$\Gamma = 2.404$）：爆发式长程对齐与协同演化**
在强驱动条件下，系统的空间取向关联展现出更快的响应速率。在 $N = 25$ 时，近邻区域的关联度已拉升至 0.7，且向远端的衰减斜率明显低于中等驱动组；至 $N = 40$ 时，关联函数在全局范围内高度平稳地收敛于 $G_4(r) \approx 0.80 \sim 0.88$，系统形成了极高质量的长程晶态结构。

2.4.5 剪切驱动下结晶相图特征复现（Γ vs Column height N）

为系统性刻画驱动强度 Γ 与颗粒柱高度N，即垂直方向堆叠的方块层数对系统最终有序相态的联合调控机制，本研究以侧向立方体有序度 $S_4 = 0.50$ 作为相变临界阈值，**构建了“驱动强度 – 颗粒柱高度”二维有序化参数相图，与文献的结果高度一致，如图 18 所示。**

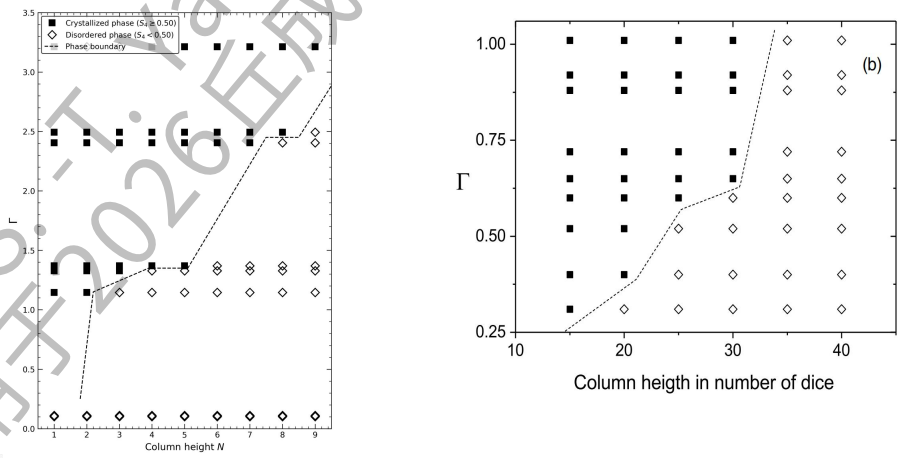


图 18:对 9 不同驱动强度 Γ 下下侧壁区域颗粒的立方体有序度参数 S_4的相图体现。

预实验画出的二维相图（左）文献中呈现的二维相图（右），可见预实验结果与文献中高度吻合

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐科学奖公开

图中黑色实心方块代表结晶相（Crystallized phase，$S_4 \geq 0.50$），空心菱形代表无序相（Disordered phase，$S_4 < 0.50$），黑色虚线为相界线（Phase boundary）。若忽略无量纲化标定系数不同带来的纵轴数值差异，相图展现出与文献高度吻合的鲜明相划分与非对称相变临界特征：当驱动强度极低（如 $\Gamma \approx 0.101$）时，无论颗粒柱高度 N 如何变化（从 $N = 0$ 到 $N = 8$），系统在所有测量高度上均稳定处于无序相（空心菱形，$S_4 < 0.50$）。这表明剪切动能不足以克服颗粒间的摩擦与锁死效应，系统全局处于未激活状态。当驱动强度达到极高水平（$\Gamma = 3.212$）时，足够的剪切动能可以彻底穿透底层颗粒的重力约束，使得在所考察的所有高度范围内（$N = 0 \sim 8$）均成功诱导产生长程 Cubatic 有序相（黑方块，$S_4 \geq 0.50$）。

通过汇总不同驱动强度 Γ 下系统达到动态稳定态（$N \geq 35$）时的体积分数 ϕ 与全局序参数 S_4 数据，我们重新测量了“驱动强度-相态结构”的全局相图。在经典驱动区间（$\Gamma \in [0.101, 1.380]$）内，实验数据精确重现了文献划分的相态边界：系统从低驱动下的各向同性松散无序相（$\phi \approx 0.60, S_4 < 0.40$），转变为中高驱动下由边界诱导的四方高密结晶相（$\phi > 0.75, S_4 > 0.85$），完整验证了剪切相变的普适性规律。

2.5 本章小结

本章主要搭建并系统验证了这套正方体颗粒剪切实验的实验研究平台与自动化数据处理流程。在数据处理方面，我们创新性地结合了先进的 AI 图像识别技术与正方体颗粒本身的几何对称特性，在保证数据处理效率的前提下，有效克服了颗粒密集堆叠时容易发生的错检、粘连以及阴影干扰等问题，实现了对每个颗粒位置与取向角度的高精度自动提取，为后续统计物理量的计算提供了扎实可信的数据支撑。

其次，基于这套高精准的处理方法，我们成功复现了颗粒从杂乱无章到排布整齐的全过程。实验数据清晰地表明，摇晃剪切确实能让颗粒排得更紧密，而且靠墙一圈的颗粒总是最先排整齐，随后带动内部颗粒一起形成规律的阵列；同时也准确画出了重力与转动强度相互博弈下的相变边界。这些结果与文献的物理规律完全吻合，充分证明了我们搭建的实验平台和图像算法不仅好用、管用，而且数据非常精准可靠，为下一阶段开展更深层次的机理探索打下了坚实基础。

2026 Siyuan High School Science Award
仅用于2026上海中学学术奖展示

3　搭建理论模型解释实验现象

研读 Asencio 等人（2017）发表在 Physical Review Letters（PRL）上的论文后，**我们意识到原工作主要聚焦于实验现象的发现与定性描述，系统内部深层次的动力学建模依然处于空白。**为了补上这一环，也为了后续我们的研究能够更加深入，因此**我们基于已观察到实验现象建立了系统的理论模型。我们首先对剪切诱导有序化的微观物理机制进行了理论分析，再将旋转驱动下的有序重排与缺陷激发统一纳入动力学框架，从而解释系统由无序到有序的原因。**

3.1　微观物理假设与过阻尼朗之万方程

如图 19 所示，考虑二维单层/准二维受限正方体颗粒系统。记第 i 个颗粒的取向角为 $\theta_i \in [0,2\pi)$。当相对转角 $\Delta\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 时，颗粒间达到紧密的“面贴面”贴合状态。考虑到正方体颗粒具有 $90°$（即 $\pi/2$）的四重对称性，在平均场近似下，取周围颗粒的平均取向为参考零点，则单颗粒受到的四重对称有效几何势能归一化后可近似为：

$$E(\theta) = -\cos(4\theta)$$

该势能明确了 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 四个等价的低能势谷，其一阶导数则对应驱使颗粒回归有序态的恢复力矩项 $\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} = 4\sin(4\theta)$。

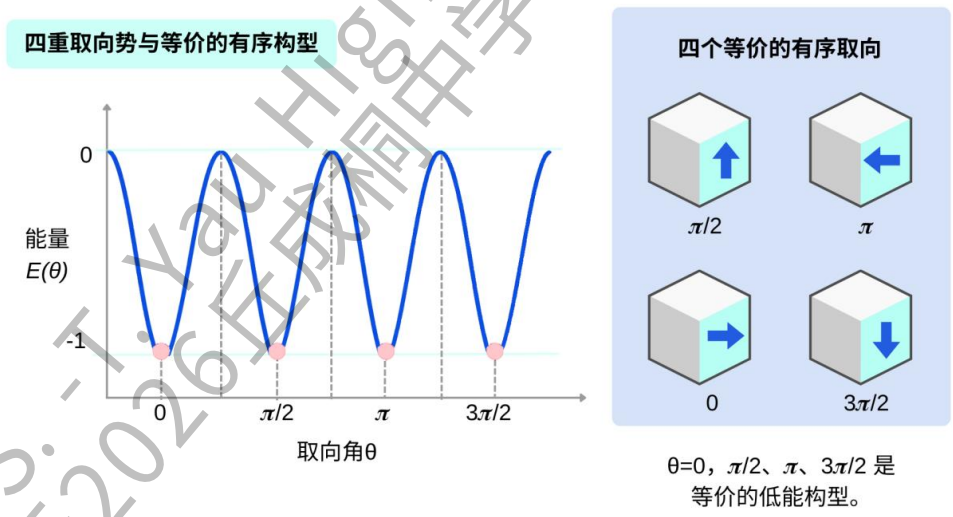


图 19：$E(\theta) = -\cos(4\theta)$ 下的四重取向势概念图：单颗粒受到的四重对成有效几何势能函数（左）以及单个颗粒四个等价的有序取向示意图（右）

2026 S.T.Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

其次，我们将剪切驱动引发的随机碰撞与重排等效为“有效温度 T_{eff}”。为了引入重力压实效应，假设 T_{eff} 不仅正比于宏观激振加速度 a，同时受到依赖于颗粒层高/重力载荷 L 的转换系数 $\times(\mathrm{L})$ 调控，即，

$$T_{\mathrm{eff}} = \chi(L)\cdot a$$

其中 $\chi(L)$ 是依赖于上覆颗粒重力负载 L（或颗粒层高）的能量转换系数。

最后，考虑到高摩擦环境下的过阻尼特征，颗粒角度 θ 的时间演化遵循过阻尼朗之万方程。

$$d\theta = -\frac{D_0}{T_{\mathrm{eff}}}\frac{\partial E(\theta)}{\partial\theta}dN + \sqrt{2D_0}dW_N$$

其中 D_0 为有效取向扩散率，W_N 为标准维纳过程（Wiener process），N 为连续化的剪切驱动次数。将势能梯度与有效温度代入，得到微观取向动力学方程：

$$d\theta = -\frac{4D_0}{\chi a}\sin(4\theta)dN + \sqrt{2D_0}dW_N$$

该方程将宏观驱动参数与微观重排过程有机结合，为后续推导全局序参数 S_4 的演化以及相界线奠定了理论基础。

3.2 Fokker-Planck 方程从主方程的严格展开

为了描述取向概率密度分布 $P(\theta,N)$ 随驱动次数 N 的演化，我们从连续介质力学的主方程出发：

$$\frac{\partial P(\theta,N)}{\partial N} = \int_{-\pi}^{\pi}\left[w(\theta-\Delta\theta;\Delta\theta)P(\theta-\Delta\theta,N) - w(\theta;\Delta\theta)P(\theta,N)\right]d\Delta\theta$$

其中 $w(\theta';\Delta\theta)$ 表示从角度 θ' 发生改变量 $\Delta\theta$ 的跃迁概率密度。

为了获得连续化的动力学描述，对被积函数中的 $w(\theta-\Delta\theta;\Delta\theta)P(\theta-\Delta\theta,N)$ 在 θ 处进行 Kramers-Moyal 泰勒级数展开：

$$w(\theta-\Delta\theta;\Delta\theta)P(\theta-\Delta\theta,N) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\Delta\theta)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}\left[w(\theta;\Delta\theta)P(\theta,N)\right]$$

将该级数代入主方程后，零阶项（$k=0$）相互抵消，进一步在小角度扰动假设下截断保留至二阶项，得到连续 Fokker-Planck 形式[9]：

2026 S.T.Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

$$\frac{\partial P(\theta,N)}{\partial N}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A(\theta)P(\theta,N)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[B(\theta)P(\theta,N)\right]$$

结合前文建立的微观朗之万方程 $d\theta=-\frac{4D_0}{\chi a}\sin(4\theta)dN+\sqrt{2D_0}dW_N$，分别计算其一阶漂移矩 $A(\theta)$ 与二阶扩散矩 $B(\theta)$：

$$A(\theta)\equiv\lim_{\Delta N\to 0}\frac{\langle d\theta\rangle}{dN}=-\frac{4D_0}{\chi a}\sin(4\theta)$$

$$B(\theta)\equiv\lim_{\Delta N\to 0}\frac{\langle(d\theta)^2\rangle}{dN}=2D_0$$

将上述矩函数代入，最终得到描述颗粒取向概率密度演化的 Fokker-Planck 方程：

$$\frac{\partial P(\theta,N)}{\partial N}=\frac{4D_0}{\chi a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(4\theta)P(\theta,N)\right]+D_0\frac{\partial^2 P(\theta,N)}{\partial\theta^2}$$

3.3 稳态分布解析解与单参数平均场序参量 $S_4^{\mathrm{MF}}(a)$

当驱动次数 $N\to\infty$ 时，体系达到动态平衡，此时取向概率流密度满足归零条件 $J=0$：

$$J=-\frac{4D_0}{\chi a}\sin(4\theta)P(\theta)-D_0\frac{dP(\theta)}{d\theta}=0\Longrightarrow\frac{1}{P(\theta)}\frac{dP(\theta)}{d\theta}=-\frac{4}{\chi a}\sin(4\theta)$$

对此常微分方程进行积分，可获得玻尔兹曼类型的稳态取向概率密度分布：

$$P_{eq}(\theta)=\frac{1}{Z}\exp\left(\frac{\cos(4\theta)}{\chi a}\right)$$

考虑到配分函数的归一化条件 $Z=\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{\cos(4\theta)}{\chi a}\right)d\theta$。引入换元变量 $\phi=4\theta$，则 $d\theta=\frac{1}{4}d\phi$。利用势能函数的 $2\pi/4=\pi/2$ 周期性，可将积分范围化简并利用贝塞尔函数表达为：

$$Z=4\times\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{\cos\phi}{\chi a}\right)d\phi=2\pi I_0\left(\frac{1}{\chi a}\right)$$

将求得的配分函数代回，最终导出稳态取向分布函数的精确闭合解为：

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

$$P_{eq}(\theta) = \frac{\exp\left(\frac{\cos(4\theta)}{\chi a}\right)}{2\pi I_0\left(\frac{1}{\chi a}\right)}$$

在求得稳态取向分布函数 $P_{eq}(\theta)$ 的基础上，引用文献中的定义：平均场局部取向序参数 $S_4^{MF}(a) \equiv \langle \cos(4\theta) \rangle_{eq}$。将其在稳态分布下求期望值得到如下表达式：

$$S_4^{MF}(a) = \int_0^{2\pi} \cos(4\theta) P_{eq}(\theta) d\theta = \frac{\int_0^{2\pi} \cos(4\theta) \exp\left(\frac{\cos(4\theta)}{\chi a}\right) d\theta}{2\pi I_0\left(\frac{1}{\chi a}\right)}$$

引入 1 阶修正贝塞尔函数[10]的标准积分定义 $I_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi\, e^{x\cos\phi} d\phi$。利用相同的换元 $\phi = 4\theta$，分子精确化简为：

$$\int_0^{2\pi} \cos(4\theta) \exp\left(\frac{\cos(4\theta)}{\chi a}\right) d\theta = 2\pi I_1\left(\frac{1}{\chi a}\right)$$

约去分子分母中的公因式 2π，导出平均场序参量随加速度 a 变化的解析表达式：

$$S_4^{MF}(a) = \frac{I_1\left(\frac{1}{\chi a}\right)}{I_0\left(\frac{1}{\chi a}\right)}$$

对该解析解进行渐近物理分析可知：当强驱动极限（$a \to \infty$）时，激振极强导致 $\frac{1}{\chi a} \to 0$。根据性质 $I_1(0) = 0, I_0(0) = 1$，得到 $S_4^{MF} \to 0$，对应各向同性的无序态。然而，在形式上的弱噪声稳态极限（$a \to 0^+$）下，$\frac{1}{\chi a} \to \infty$。利用渐近展开式 $\lim_{x\to\infty} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = 1$，可以得到 $S_4^{MF} \to 1$。此时对应于在实际实验中，当激振强度 a 过低时，颗粒系统因机械锁死而被卡在亚稳态无序态，无法在有限时间内演化至该有序相，这和我们的直觉相符合。

3.4 唯象闭合模型：堆积密实化动力学与对数增长近似律

在通过 Fokker-Planck 方程确定了取向分布与序参数的稳态表达后，需进一步描述系统在剪切驱动下体积分数（密度）$\phi(N)$ 的动态演化过程。随着体积分数（密度）$\phi(N)$ 不断接近最大紧密堆积极限 ϕ_{max}，自由体积耗尽引发几何“笼效应”。自由体积减少导致颗粒重排所需的激活能升高，系统有效动能等效降低：$T_{dyn}(\phi) = \chi a(\phi_{max} - \phi)$。

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

根据阿伦尼乌斯热激活越垒率，密度的增加速率满足非线性微分方程：

$$\frac{d\phi}{dN} = C_0 \exp\left(-\frac{E_c}{\chi a(\phi_{\max} - \phi)}\right)$$

将非线性指数项 $f(\phi) = \frac{E_c}{\chi a(\phi_{\max}-\phi)}$ 在初始密度 ϕ_0 处进行一阶泰勒级数展开近似：

$$f(\phi) \approx f(\phi_0) + f'(\phi_0)(\phi - \phi_0)$$
$$= \frac{E_c}{\chi a(\phi_{\max} - \phi_0)} + \frac{E_c}{\chi a(\phi_{\max} - \phi_0)^2}(\phi - \phi_0)$$

定义阻抑系数 $\alpha \equiv \frac{E_c}{\chi a(\phi_{\max}-\phi_0)^2}$，并合并常数项 $C_1 \equiv C_0 \exp\left(-\frac{E_c}{\chi a(\phi_{\max}-\phi_0)}\right)$，微分方程线性化为：

$$\frac{d\phi}{dN} \approx C_1 \exp\left[-\alpha(\phi - \phi_0)\right]$$

对此公式分离变量并进行积分：

$$\int_0^{\phi-\phi_0} \exp\left[\alpha(\phi' - \phi_0)\right] d(\phi' - \phi_0) = \int_0^N C_1 dN'$$

$$\frac{1}{\alpha}\left(\exp\left[\alpha(\phi - \phi_0)\right] - 1\right) = C_1 N \Longrightarrow \exp\left[\alpha(\phi - \phi_0)\right] = 1 + \alpha C_1 N$$

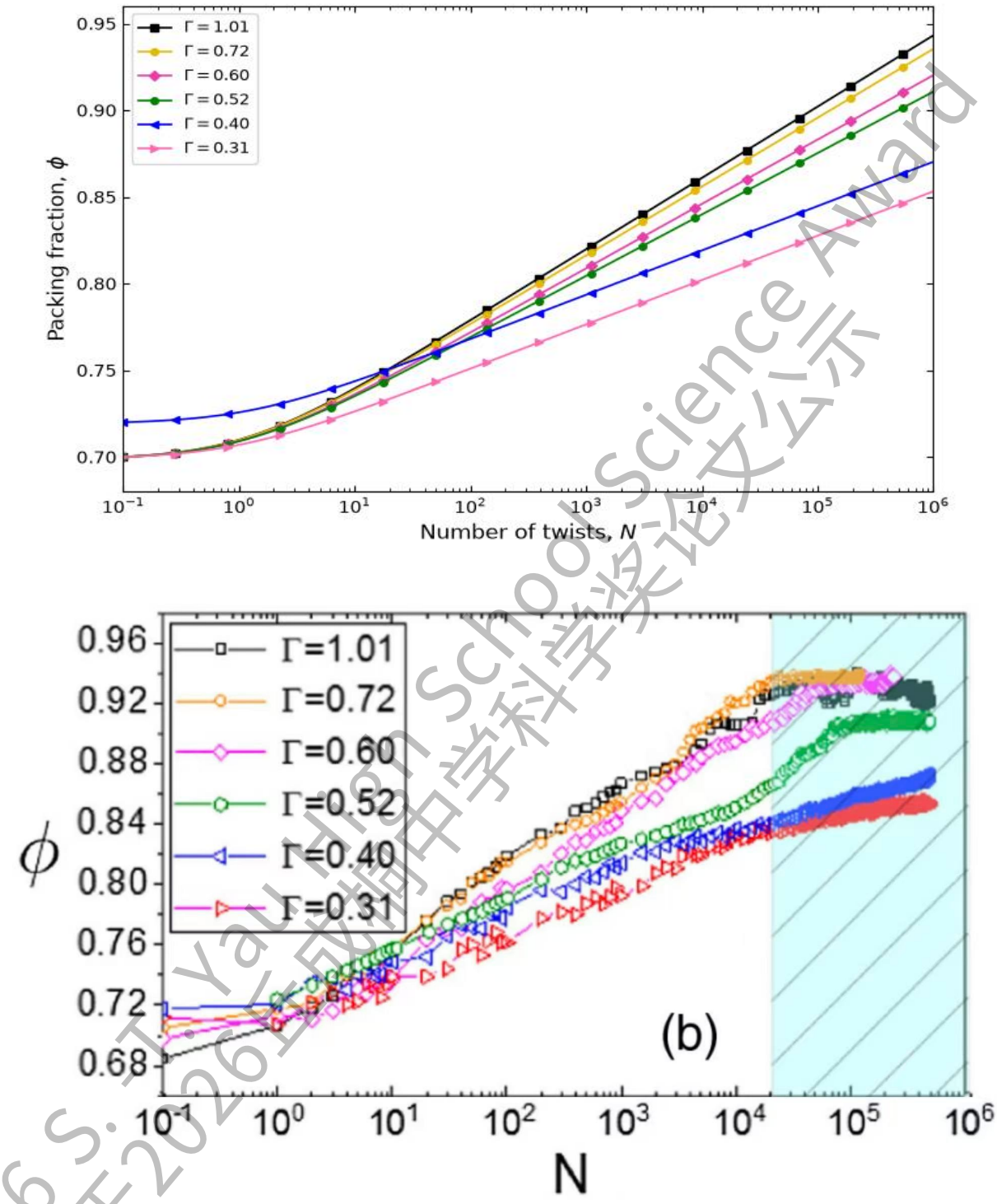
两边取自然对数，导出堆积密实化过程的对数增长近似律：

$$\phi(N) \approx \phi_0 + \frac{1}{\alpha}\ln(1 + \alpha C_1 N)$$

3.5 理论适配性验证

为了验证上述过阻尼动力学模型的有效性，我们将实验参数代入公式进行数值求解，并将生成的理论曲线与 Asencio 等人（2017）在 PRL 上发表的经典实验数据进行对照。结果表明，理论计算出的全局序参数 S_4 (N) 演化趋势以及 S_4 - ϕ 演化路径在不同驱动强度Γ下的响应形态，均与文献实验测量结果表现出高度的相似性与趋势一致性。这不仅证明了本章建立的过阻尼动力学模型的正确性，也为后续的研究提供了可靠的基准理论。

2026 Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示



2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

图 20：对 6 种不同驱动强度 Γ 下体积分数ϕ按理论推导进行拟合，画出的动态演化曲线（上）与文献中呈现的动态演化曲线（下）高度吻合。

4 创新点一：强驱动下的相变演化与反常“无序化”现象

4.1 驱动强度真的越大越好么?

我们针对原论文中指出的 **“the system reaches the same final state regardless of the excitation intensity (provided it is large enough)，即无论驱动强度如何（只要该强度足够大），该系统均会达到相同的最终状态。” 这一单调趋势产生疑问。**因为在日常生活中，当我们用力摇晃容器时，其内部的物体将会变得十分混乱。同时，在 3.3 章节中的理论模型分析推演部分，我们发现当强驱动极限（$a \to \infty$）时，得到 $S_4^{MF} \to 0$，此时对应各向同性的无序态。

于是，我们猜想当Γ 取值极大时，这一体系可能并非如原论文所述，产生极大的有序化趋势，相反，可能会由于输入能量过大从而导致产生一定的无序化演化。于是，我们计划从最基础的一层骰子入手，先探究不同转动强度Γ 下这一体系的响应行为。由于单层系统只能形成单层平面，文献中S_4这一侧面观测所得有序度的量度失效，同时，由于侧面高度读数极易出现误差且在系统已处于（或接近）单层状态时，角度的读数会出现较大波动或保持恒定不变，均不能很好地体现系统内真正的有序度，于是，我们引入了q_4以描述单层系统，对于系统中的第 i 个颗粒，其局域四重序参量 $q_4(i)$ 定义为：

$$q_4(i) = \frac{1}{K_i} \sum_{j \in \text{neighbors}(i)} \cos\left[4\left(\theta_i - \theta_j\right)\right]$$

系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$则对全部 N 个颗粒取平均：

$$\langle q_4 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} q_4(i)$$

其中，θ_i 与 θ_j 分别代表颗粒 i 及其邻居颗粒 j 的主轴取向角（取值范围 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$）；相减项 $\theta_i - \theta_j$ 为相邻颗粒间的取向角度差；系数 4 对应正方形颗粒的四重旋转对称性（即旋转 90 度自重合），当两颗粒取向相差 $0°$、$90°$、$180°$、$270°$ 时，$\cos\left[4\left(\theta_i - \theta_j\right)\right] = 1$；neighbors(i) 表示颗粒 i 的近邻集合（依据空间距离阈值确定，一般取 2.5 倍颗粒边长）；K_i为该颗粒的近邻总数。序参量$\langle q_4 \rangle$的物理数值区间为 [0, 1]：其中$\langle q_4 \rangle \to 1$ 表示系统处于高度局域取向有序状态，近邻颗粒间具有极高的取向对齐度；反之$\langle q_4 \rangle \to 0$ 表示系统处于完全取向无序状态，近邻颗粒间不存在各向异性对齐趋势。

2026 S. Jiau High School Science Award
仅用于2026江苏省中学生科学奖提交展示

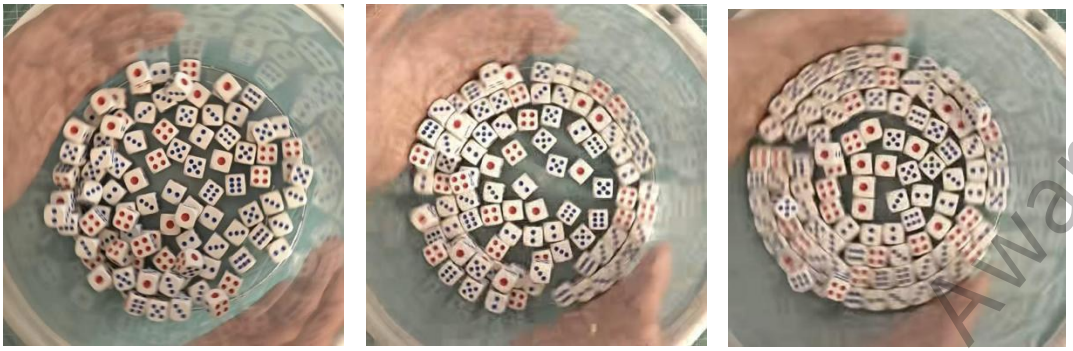


图 21：单层骰子实验过程俯视图，可以看出随着转动次数的增加，骰子变得有序

如上图所示，根据实验视频的截图（图 21），我们发现随着时间及转动次数的增加，该单层骰子体系的混乱程度在不断下降。因此我们可以确定在单层系统下，当给予系统一个合适的转动强度Γ 时，确实可以呈现出从无序到有序的演化趋势，同时q_4 指标与实际观察所得的现象保持一致，证明了引入q_4以表征有序度具有可信度，帮助我们进一步以此为核心度量来探索强驱动下的反常“无序化”现象。

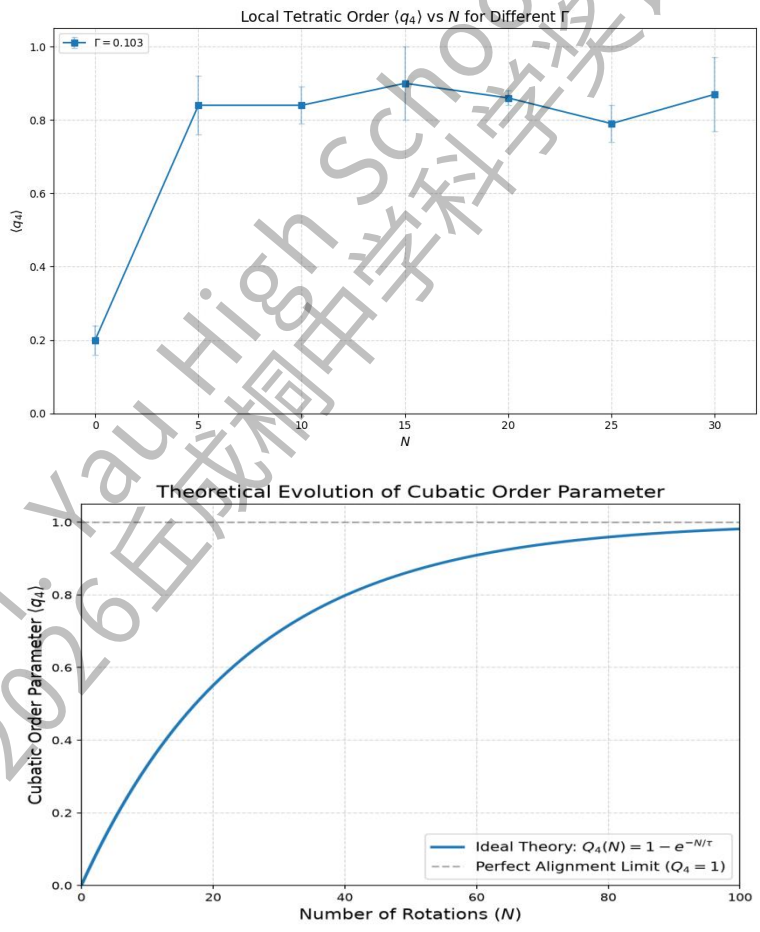


图 22: 实验中单层骰子在一种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度$\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（上）与按理论推导进行拟合的 $\langle q_4 \rangle$ 动态演化曲线（下），趋势一致。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖参评

4.2 单层体系难以观察到无序化

在完成了对体系以及参数的有效性的检验后，我们尝试对单层的骰子系统施加较大的α，希望发现体系产生无序化趋势。然而实验结果与我们预期相反：如图 25 所示，骰子几乎一直保持着单层状态，q_4的数值虽然出现了较弱的波动，总体却依然保持较高的有序化水平，并未出现无序化进程。这是否说明我们的猜想是错误的呢？即事实真如文献所说，在这种系统中，就算再大的转动强度？其最终都会保持为稳定的有序态？



图 23：实验过程示意图：单层骰子在无论多大的驱动强度 Γ 下达到有序状态后一直保持有序。

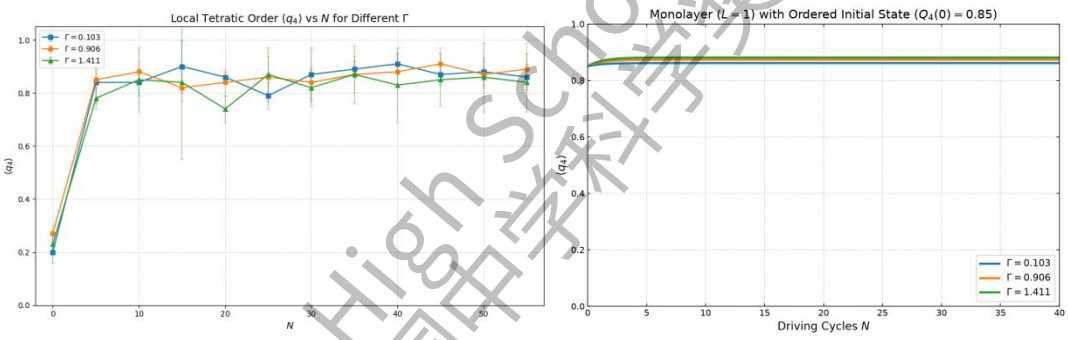


图 24：实验中单层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（左）与按理论推导进行拟合的 $\langle q_4 \rangle$ 动态演化曲线（右），高度吻合。发现当系统为单层时，达到有序后无论施加多大的驱动强度Γ 有序状态都不会被破坏。

按照日常经验与物理直觉，用力摇晃装有颗粒或液体的容器时，内部物质往往会陷入剧烈而明显的混沌无序状态，因此我们推测在强驱动下必然存在显著的无序化趋势。针对实验中单层颗粒体系未如预期发生无序失稳的现象，我们最初推测可能是输入的无量纲驱动加速度 Γ 依然偏小，提供的扰动能量尚未达到破坏有序结构的临界阈值。

为此，对体系施加了更强的剪切驱动，并利用 Tracker 视频分析软件追踪并提取了容器运动的角加速度与驱动强度。图 25 展示了基于 Tracker 轨迹数据在 Excel 中拟合出的驱动参数随转动周期的演化曲线；由于软件在追踪时使用正负号表示正反旋转方向，因此实际对应的驱动强度 Γ 对应于各采样点数值的绝对值。

2026 "You High School" 华东师范大学杯 Award

数据表明，体系受到的最大瞬时驱动强度峰值高达 7.69084444，各次转动的Γ的均值也已经达到较高的水平，此时该体系仍然没有出现无序化，

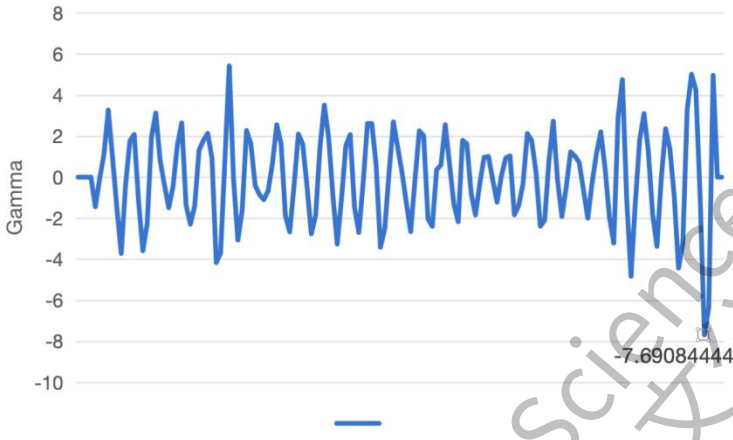


图 25：持续增强过后的驱动强度数值折线图，峰值达到 7.69



图 26：实验过程示意图：持续增加驱动强度 Γ，发现单层骰子在无论多大的驱动强度 Γ 下达到有序状态后有序状态一直未被破坏。

因此，上述实验结果，数据分析和建模均证明，无论是理论上还是实际上，单层系统在形成有序态后，很难重新发生无序化。于是，在排除了转速对于“有序-无序”相变的影响后，我们初步认为这一现象可能由于该系统的“单层结构”本身导致。仅通过水平方向的转动，对于已形成单层结构的骰子而言，只能向系统内部提供沿水平方向的扭矩，从而无法使该系统从单层演化为双层或多层结构。尽管 q_4 的引入已提高了对单层系统有序度描述的精度和信度，但是对于该系统而言，依然无法产生较为显著的q_4数值的降低或无序化进程。

于是，针对“单层”结构与前文所述经验及预实验的对比，我们又选取了适中层数的骰子进行观察，并成功在多层骰子中发现了模糊的无序化趋势。我们推测无序化还有可能处于两层或多层间的“缺陷”骰子激发，比如有一条体对角线垂直于水平面的骰子。 我们进行了思想实验：这一类“缺陷”会导致局部骰子的混乱，且随着转动次数的增加，维持无序的局部骰子块有概率对外围骰子产生影响，从而

2026 Xiyau Undergraduate Robot Science Award 仅用于2026西安科技大学本科生论文公示

将这一“局部无序”转变为较大范围的无序状态，从而影响整体的有序化程度。我们的这一猜想与原论文中“dice clusters”（骰子簇）现象亦有共通之处。

4.3 多层体系产生无序化趋势

4.3.1 双层骰子体系中，系统成功产生无序化趋势

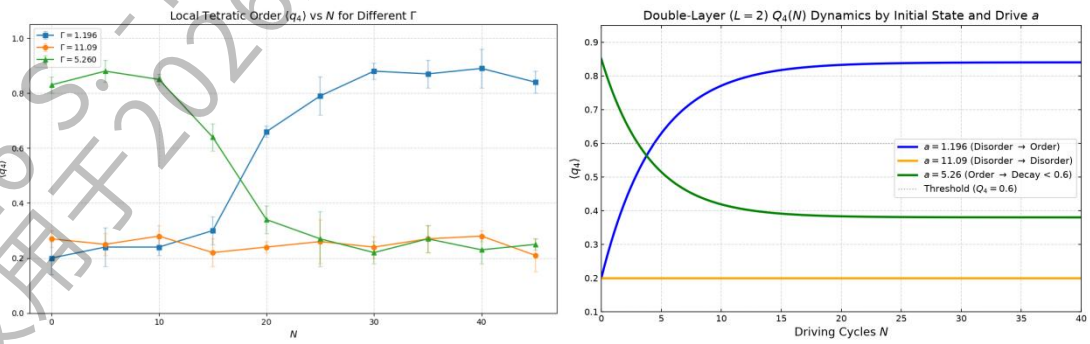
为了更精确以及定量地研究这一类“缺陷”骰子，我们选取双层系统作为初步的分析对象，如图 27 所示。



图 27：实验过程示意图：双层骰子原始无序状态（左）以及在特定驱动强度 Γ 下达到有序状态（右）对比图。

经过和之前同样的数据处理过程，我们得到了如图 28 所示的q_4折线图：其表明当Γ 较小时（=1.196），曲线随着转动次数的增加呈现下降趋势，系统能够较快地从无序演化至有序状态（蓝色），且可以维持相对有序状态，这一现象与论文观点及先前结论一致。

同时，我们基于生活经验，实验以及模型分析的推测，亦本研究的核心创新点之一：“当转动强度Γ较大时，系统会从有序态转变为无序态”最终在此处得以验证：橙色折线向下演变，对应在受到较高Γ 时，正如我们推测，体系会产生无序化趋势。甚至如绿色折线所示：若初始时刻Γ =5.260，已处于较高水平，折线将始终保持在较低位置，表示系统将一直保持相对无序状态。



2026 S.T.Yau High School Science Award
仅用于2026正期申报科学论文公示

图 28: 实验中双层骰子在低，中，高 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 按理论推导进行拟合，画出的 $\langle q_4 \rangle$ 动态演化曲线（左）与按理论推导进行拟合的 $\langle q_4 \rangle$ 动态演化曲线（右），高度吻合。

同时，实验视频也反映出了相同的现象：在图 29（第一行）中（实验视频截图），体系被施加了较低的Γ，按照时间顺序，由第 1 张至第 3 张，可以看出体系在不断有序化。而在图 29（第二行）中，体系被施加了较高的Γ，按照时间顺序，由第 1 张至第 3 张，体系始终保持着相对混乱的状态。与q_4分析所得“较高的Γ会使体系产生无序化趋势”保持一致。

这一现象进一步验证了我们的推测，同时暗示随着α增大而连续性增长的Γ在不同取值范围时，将对系统的有序化进程产生不同的效果：当Γ 取值较低时，系统将会呈现有序化的趋势，体现在q_4图像的不断上升；但是随着Γ 的增大至一定阈值后，系统将呈现出无序化的特征，体现在q_4折线的降低。因此，受剪切力影响下多层系统的“有序-无序”的转变可能存在一个关于Γ 的临界边界，并以Γ为横轴的q_4折线图像大致呈现二次函数特征。

综上，我们终于**从理论和实验上验证了：对于整个系统的有序化进程而言，适当的抖动会带来好的影响，但是过量的抖动一样会让系统整体的有序化状态劣化。**

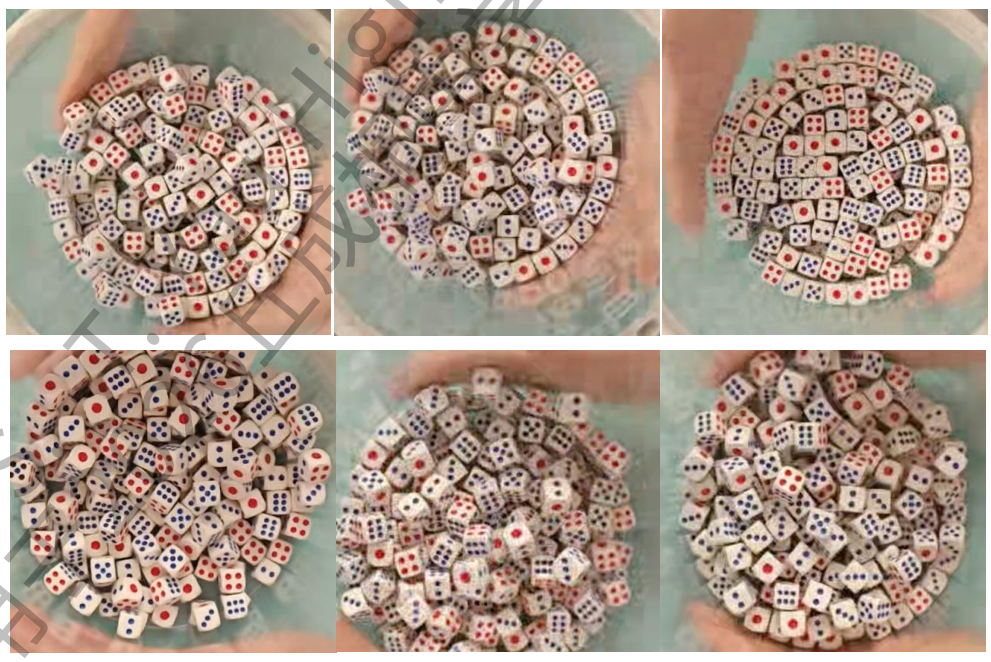


图 29: 实验过程示意图：持续增加驱动强度 Γ，发现双层骰子在较大的驱动强度 Γ 下会从有序状态变为无序状态，较低的Γ（第一行图），较高的Γ（第二行图）

2026 STEM High School Science Award 仅用于比赛科学论文展示

4.3.2 引入橡皮后，单层系统同样成功产生无序化趋势

为了让实验现象和物理对比更加明显，我们在单层与双层骰子系统中人为引入了一个三棱柱形的小橡皮块作为局部几何“缺陷”，用来模拟杂质骰子对体系自组织结晶过程的扰动影响（图中黑色圆圈标出了该小橡皮块的位置）。根据q_4折线图 31，我们可以发现在单层和双层系统中，随着转动次数的增加，当Γ 分别取 1.025 和 1.210（较低）时，q_4折线上升，系统均出现有序化趋势。而当Γ 分别取 3.230 和 3.147（较高）时q_4折线下降，系统均出现无序化趋势；当Γ 分别取 8.560 和 8.163（极高）时，系统均保持着无序特征。以上三种情况均与图 29 中双层体系对于Γ 取值不同时展现的趋势保持一致。且由于在该实验单层与双层体系中，相对应的各条q_4折线的形态具有较高的相似性，说明在不同层数的体系中，无序进程均可由“缺陷”骰子引起，且物理机制相似。



图 30：橡皮缺陷示意图

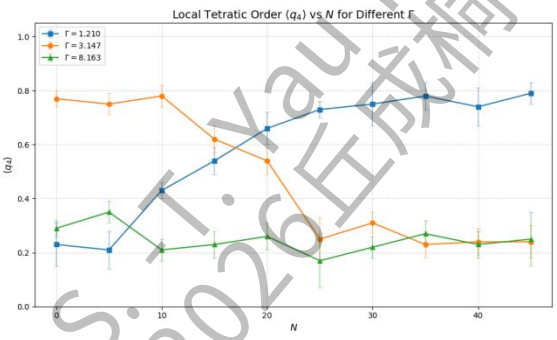


图 31.1

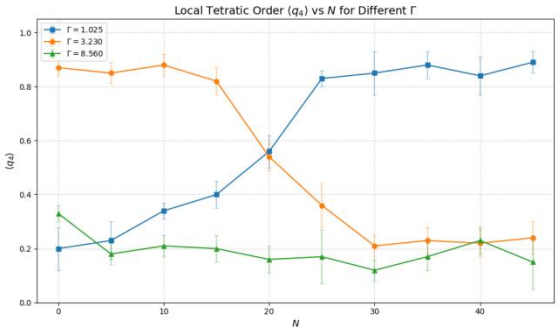


图 31.2

图 31：实验中有橡皮缺陷的单层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（左）以及实验中有橡皮缺陷的双层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（右），在驱动强度相似的情况下两系统演化趋势相似

2026 S.T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学数学论文公开

同时，为了从真实形貌演化上直观印证这一结论，我们还利用正上方的俯拍摄像机记录下了完整的动态破坏过程。如下面展示的两组时序演化照片所示：当驱动强度处于较高区间时，体系呈现出清晰的解构与无序化过程。从时间序列来看，由图 32 中随着剪切次数的累积，原本围绕缺陷局部排布的整齐晶区被逐步撕裂，颗粒间的缝隙与错位迅速蔓延，最终演化为大范围的混乱状态。这一直观的图像记录与前述 q_4 折线所反映的序参量骤降趋势完全吻合，从动力学形貌和定量统计两个维度强力支撑了我们的物理设想。

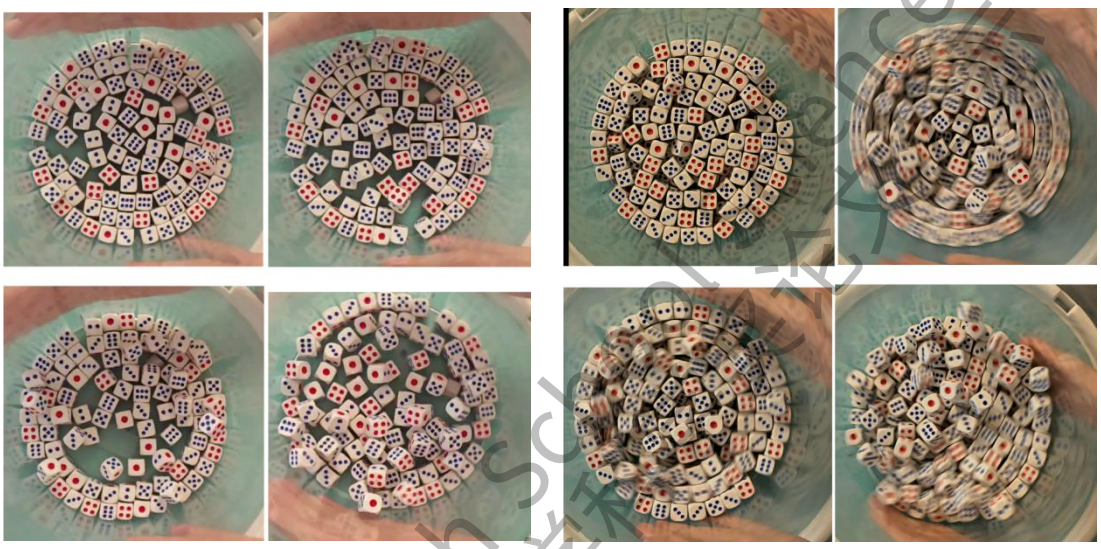


图 32：实验过程示意图：系统存在缺陷时（如加入橡皮），发现单层骰子和双层骰子在较大的驱动强度 Γ 下都会从有序状态变为无序状态

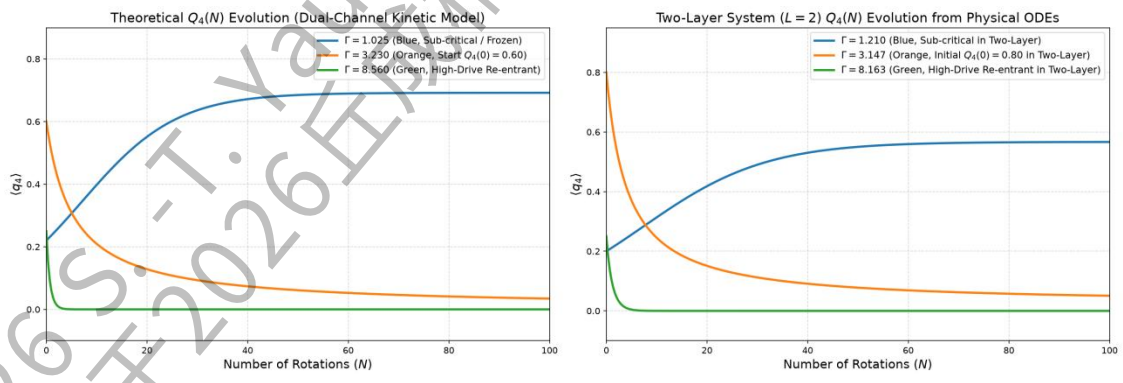


图 33：根据理论拟合的有橡皮缺陷的单层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（左）以及根据理论拟合的有橡皮缺陷的双层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（右），在驱动强度相似的情况下两系统演化趋势相似

2026 S.-T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖

4.3.3 引入塑料片后，系统成功产生无序化趋势

为了进一步定量研究“缺陷”的几何尺寸对体系自组织结晶过程的干扰程度，我们又就地取材，在双层骰子系统中引入了一块比橡皮块尺寸更大的异形塑料片作为宏观几何缺陷。为避免该“局部缺陷”对整个体系产生过于强烈的扰乱作用，我们对其边缘进行适当修剪。该塑料片被用来模拟较于橡皮更大尺寸的“缺陷”，我们在测试前将修剪好的塑料片粘贴在亚克力圆桶的底板中心，防止其在持续旋转剪切过程中发生不可控的滑动位移，从而严格保证该几何缺陷在长期实验中的位置稳定性。

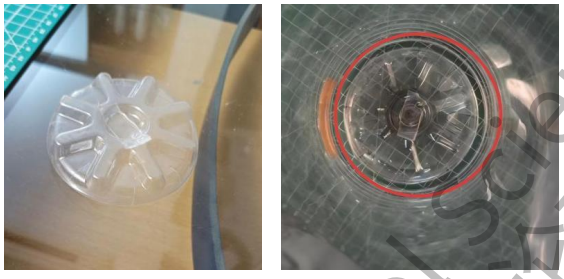


图 34：塑料片缺陷示意图

接着，我们对其进行了q_4的测量和实验视频的拍摄： 通过对比图 35.1（双层骰子+塑料片）与图 35.2（单层骰子+塑料片）的q_4图像，可以发现图 35.1 中绿色折线相较于图 35.2 中绿色曲线明显更早出现下降趋势，即在 Γ 取值相似时，越大的缺陷对应更快的演变，象征更强的无序化趋势。转化为对于Γ 取值的要求：图 35.1 中绿色折线在更小转动次数时的先行降低，象征着在相同层数的体系中，更大的局部缺陷对于能使系统从无序态转变为有序态的最小转动强度 Γ 的需求的降低。于是，我们得出缺陷的尺寸大小对于“有序-无序”的相变边界存在影响：缺陷的尺寸与使系统从无序态转变到有序态所需最小转动强度 Γ 呈负相关。同时，更大尺寸的缺陷对于局部的已形成的力学平衡，即有序状态的破坏效果更大，因此其在客观上降低了体系跃过势垒对于临界能量输入的要求。

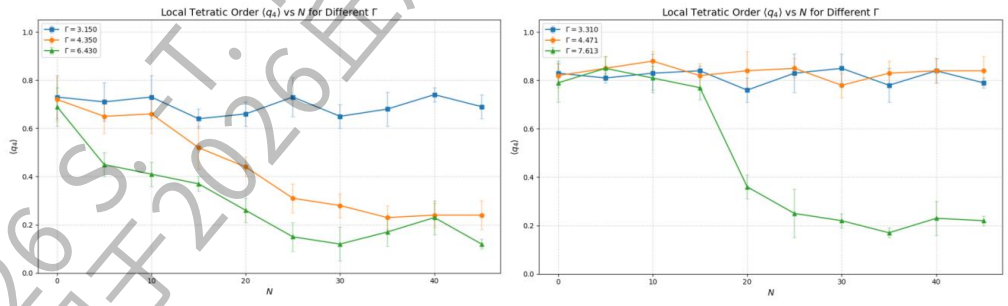


图 35：实验中有塑料片（大）缺陷的双层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（35.1 左）以及实验中有橡皮（小）缺陷的双层骰子在 3 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（35.2 右），发现越大的缺陷对应更快的演变，更强的无序化趋势

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.4 相图上边界的发现

针对 4.3 中已证实的“当转动强度Γ 较大时，系统会从有序态转变为无序态”，我们尝试借用原文中的相图方法来更直观地表示有序化趋势的差异：如图 36 左所示为论文中的图像，其显示驱动强度越大越好，其相位边界是单一的。

而在图 36 右所示的图像中，是我们的实验所测量得到的相图，其显示当α 取值较高时，在 2，3，5，9 层系统中均已出现了代表无序的白色方块，说明当Γ 取值较高时，存在一个“有序-无序”相变的Γ 阈值，此时我们用红色实线来勾画出这一条新发现的相图上边界，而这一新发现即是我们本论文的第一个核心创新点。

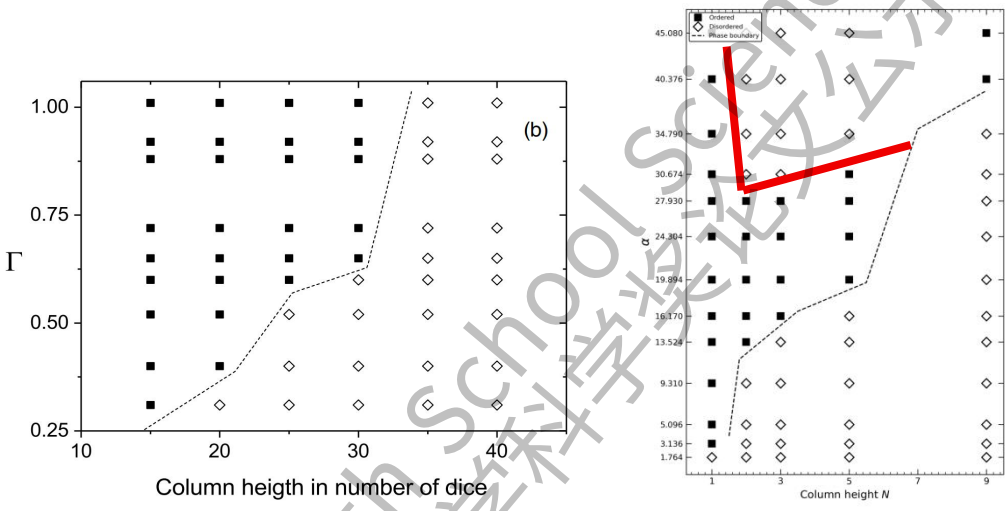


图 36：各转动 30 次后，角加速度与骰子层数是否为有序状态的二维相图，发现当转动强度Γ 较大时，系统会从有序态转变为无序态。

为了更好地理解这一实验结果，我们还定性地刻画了如下图所示的物理图像，其揭示了实验测得的全局序参量 S_4^{global} 随驱动加速度 a 呈现明显的非单调响应。体系存在两个特征驱动强度 a_1 与 a_2，从而形成三个动力学区域。

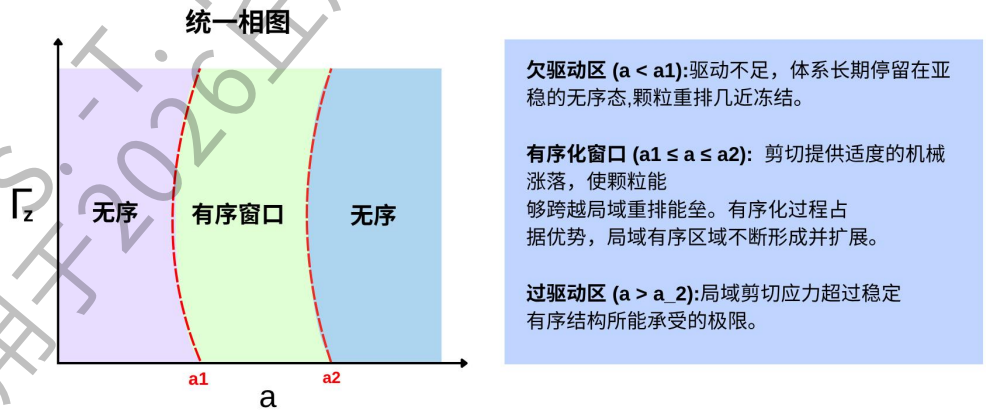


图 37：过驱动诱导的重入无序与最佳驱动窗口示意图。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.5 到达无序态和有序态的速率差异

在 4.3.3 中，更大的缺陷带来了更早出现的混乱，表征了更强的无序化趋势。同时，我们在实验过程中观察到当我们用适中的 Γ 尝试有序化整个体系时，通常需要耗费较长时间以及较多转动次数。作为对比，无序化进程似乎出现地更为快速，更类似于以“缺陷”骰子为起始点的爆发式的演化。我们推测，这种变化速率的差异很可能是由于两者力学机制的差异：Γ 之于有序化的过程是为整个体系提供了适当的自由度，从而使其“自我”有序化，可认为是一种相对被动的过程，因而该过程所需的演化时间即转动次数较大；而无序化则是基于每一个“缺陷”源的扩散进程，更类似于“链式反应”等主动演化，且由于外界不断对体系内部施加扭矩，从而对体系内部输入了更多能量，更助长了此类演化进程，缩短所需时间及转动次数。

于是，我们希望对于体系内无序化的动力学速率问题进行探究。为了避免拍摄和处理时的时间错配导致速率分析产生误差，我们先对实验视频，q_4，以及 Tracker 的各类时间轴进行统一。在图 38 中，通过对比系统q_4随时间的导数，可以发现蓝色与红色折线所代表的较高Γ 时体系无序化的速率远大于黄色与绿色折线所代表的较低Γ 时体系有序化的速率。于是我们得出：系统从有序态退化为无序态的演化速率远高于从无序态到有序态的演化速率。该速率的差异同时验证了我们对于两种演化进程的“主动”与“被动”的推想。在统计力学层面，这同样反映了形成低熵排布（高度有序）需要经历较长时间的“退火”流程，而破坏有序排布（熵增过程）仅需要少量超过阈值的扰动即可快速完成。

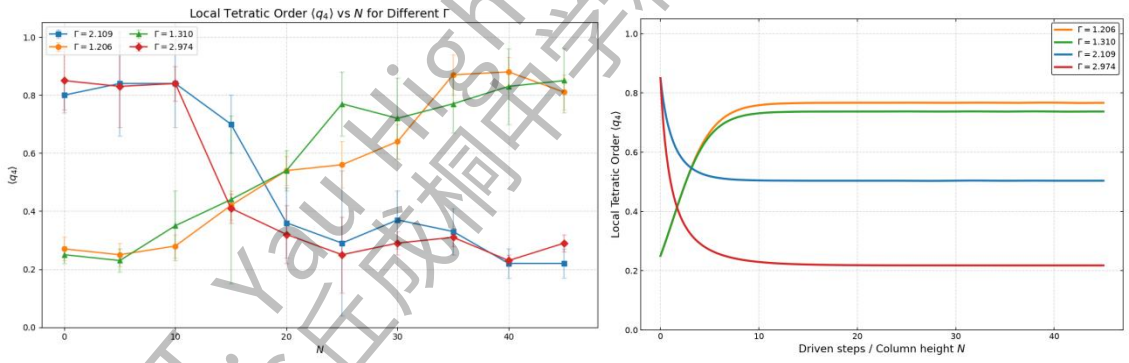


图 38: 经过对一系列长程实验的观察总结，双层骰子在 4 种驱动强度 Γ 下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（左）以及按理论推导进行拟合的 $\langle q_4 \rangle$ 动态演化曲线（右）高度吻合，说明系统从有序态退化为无序态的演化速率远高于从无序态到有序态的演化速率

基于这一实验观测结果：无序 → 有序的结晶速率远小于有序 → 无序的熔化速率，即 $v_{\mathrm{ord}} \ll v_{\mathrm{melt}}$。这表明两者的微观路径与空间协同性可能存在本质不同，为此我们也搭建了如下的物理图像来对其进行解释：

2026 年 T. Yau High School Science Award 仅用于 2026 江成桐中学科学奖公众展示

无序 → 有序（协同重排）： 建立长程有序需要周围大量颗粒协同调整取向并使局域有序区不断扩展，涉及较高的协同激活能垒 ΔE_{cryst}：

$$v_{\text{ord}} \sim v_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_{\text{cryst}}}{\chi a}\right)$$

有序 → 无序（局域失稳）： 有序结构的破坏无需全场协同。过驱动下少量局域颗粒的失稳即可触发连锁反应。机械剪切做功直接降低了有效熔化能垒：

$$\Delta E_{\text{melt}}(a) = \Delta E_0 - W_{\text{shear}}(a)$$

当 $a > a_2$ 时 $\Delta E_{\text{melt}} \to 0$，导致熔化速率剧增。

对比两种过程的速率关系：

$$\frac{v_{\text{melt}}}{v_{\text{ord}}} \sim \frac{v_0'}{v_0} \exp\left[\frac{\Delta E_{\text{cryst}} - \Delta E_{\text{melt}}(a)}{\chi a}\right] \gg 1$$

由于 $\Delta E_{\text{cryst}} > \Delta E_{\text{melt}}(a)$ 且过驱动下熔化能垒进一步趋近于零，体系展现出强烈的动力学不对称性：建立秩序需要漫长的多体协同，而破坏秩序仅需局域失稳的瞬时触发。

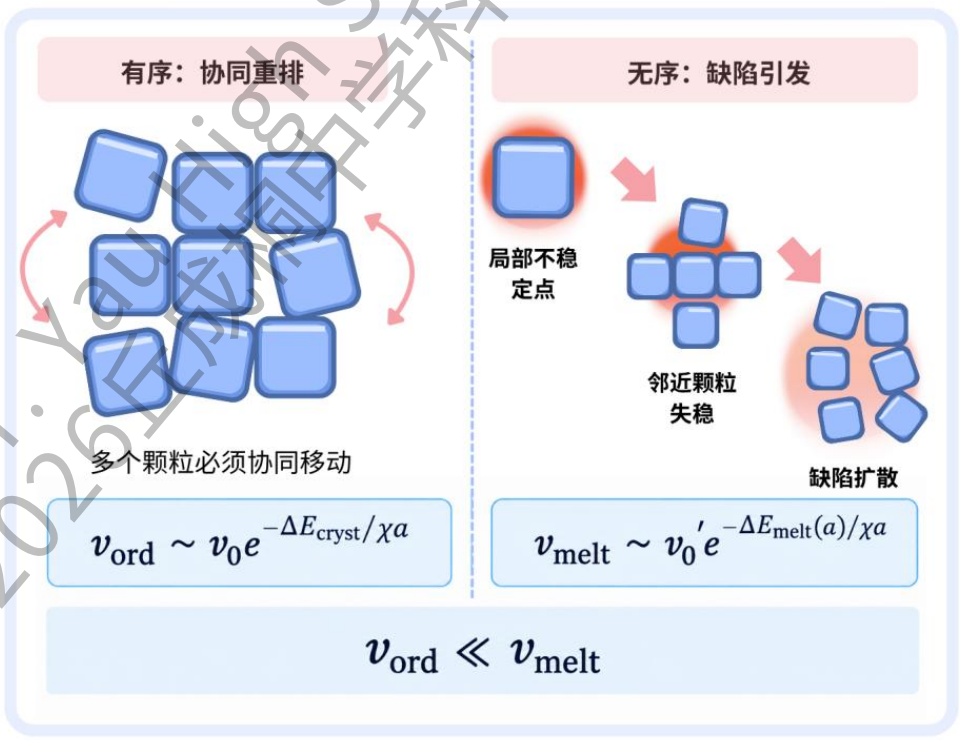


图39: 从微观角度分析的骰子在周围环境下从无序抵达有序 （左）和从有序变为无序状态（右）的速率差异

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

4.6 本章小结

在本章节内，我们从生活经验及物理直觉开始，对原论文中“更大的Γ 对应更好的有序化效果”这一单调趋势产生怀疑。为此，我们进行了多个定量化实验：首先，我们发现了单层骰子系统中的“自锁”效应。但是这一现象与我们的预期相悖，于是在归因时，我们认为单层体系自身的“单层”结构具有特殊性，从而无法形成一个相对稳定的骰子“缺陷”。这一类骰子的“缺陷”体现在其对角线的取向角与已形成有序态的骰子不一致，从而难以在整个系统中观察到明显的无序化进程。在接下来的实验中，我们首先使用橡皮与塑料片以模拟不同大小的“缺陷”对于不同层数系统有序状态的影响，我们发现：在不同层数的体系中，“缺陷”产生的无序化趋势近似相同，也验证了“缺陷”作为无序化激发源的普适性。同时，我们发现“缺陷”的尺寸大小与使系统从有序态转变到无序态对最小转动强度Γ 的需求呈负相关。

在双层及多层体系中，我们的推测：当转动强度Γ 较大时，系统会从有序态转变为无序态也得到了验证。同时，我们发现在有序化进程中，存在一个Γ 的临界强度：当转动强度Γ 足够大，超越了此阈值后，系统会从有序态逆转变为无序态，并且转动强度与颗粒局部有序度q_4间存在近似二次函数的映射关系，二次函数的顶点即Γ 在对应层数时的阈值。同时，我们还证明缺陷的大小可以改变这一临界势垒，且系统中建立有序的耗时远超破坏有序的耗时。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

5　创新点二：引入等效重力系数后的相图调控

在第 4 章中，我们基于物理直觉与实验观测，系统研究了角加速度 α 对体系自组织有序化进程的影响机制。在完成针对分子项 α 的调控探究后，我们顺理成章地将目光投向无量纲驱动强度的定义式：$\Gamma = \alpha/g$。从形式上看，改变分母上的等效重力加速度 g，**同样能够直接调控系统的无量纲驱动参数 Γ。既然颗粒体系的动力学相变与最终有序度直接取决于无量纲数 Γ，那么无论是调节剪切驱动的分子项，还是改变有效重力的分母项，系统在相空间中展现出的有序—无序演化趋势在物理本质上应当是等价的。**

为了厘清这一物理图像，我们回归到最开始启发了我们整个研究的 Asencio 等人（2017）发表在 Physical Review Letters（PRL）上的论文，其指出："when the number of dice increases, the load competes with the shear and prevents complete ordering. In the latter case, the final state is characterized by domains of cubes aligned at different directions" 且 "In our system, the only perturbation is the shearing among layers that promotes the alignment of cubes." 即当骰子数量增加时，负载与剪切力竞争并阻止完全排序——最终状态的特征是在不同方向对齐的立方体域且在该论文的系统中，唯一的扰动是促进立方体对齐的层之间的剪切。**显而易见，原作者在推演中默认将重力加速度 g 视为不可调节的环境常数，因而未曾探讨有效重力改变对相变界限的调控作用。**

在常规实验室环境下，真实重力场虽然恒定，但有效重力加速度却完全可以通过非惯性系动力学进行等效调制。顺着这个思路，本章提出在水平交替剪切的基础上，额外引入独立受控的垂直（z 向）高频微小机械振动，借助周期性垂向惯性力来调制颗粒底面的瞬态有效承载 g_{eff}，从而系统探索纵向激励对颗粒体系"有序—无序"相图边界的主动调控规律。

5.1 实验平台（震台）的搭建以及有效性检验

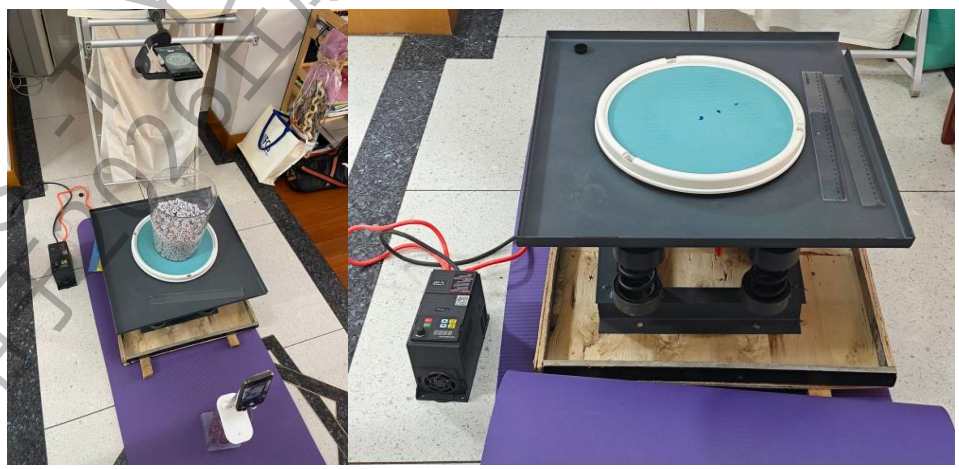


图 40：震台及拍摄机位实拍

2026 SYYU High School Science Award
仅用于2026年广州中学科学奖公示

如图 40 所示，为了定量研究等效重力加速度改变对驱动强度 Γ 及系统有序化程度的影响，我们引入了一台振频与振幅独立可调的垂直激振台。通过对容器施加高频垂直（z 向）微振动，在非惯性系下等效调制颗粒受到的有效重力加速度 g 的等效值，从而显著拓宽实验可探索的等效驱动强度Γ 的取值范围（结合高速摄影与 Tracker 轨迹分析，该激振状态下的等效垂向加速度测得为：此处 g=8.985 m/s^2）。

为了彻底剥离垂向振动本身的动力学贡献，在开展旋转剪切耦合测试之前，我们首先设计了无旋转、仅施加 z 向纯振动的空白对照实验。在实验准备阶段，我们以单层骰子的振动响应为基准，利用高精度水平仪与颗粒动态行为对激振台进行水平校准，并初步摸索适宜的振动频率与振幅：当单层骰子在底面上呈现均匀跳动、且统计上不向容器任意一侧发生偏聚漂移时，即判定平台调平完成。

定量数据表明，对于所测试的四种不同层高，单纯的垂直振动始终让序参量 q_4 维持在极低的基线水平，随着激振时间的累积并未出现任何自发上升的趋势（图 42）。这一对照结果证实：**无论是单层、双层还是多层颗粒系统，单纯的 z 向机械激振均无法诱导系统自发完成由无序到晶态的转变，系统的宏观自组织有序必须依赖剪切流动的协同驱动。**



图 41：实验过程示意图：从左到右依次为 2 层、5 层、9 层的纯振动实验，可以发现在三种不同层数的体系中， 均没有出现明显的有序化趋势。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐大学生科学奖公务

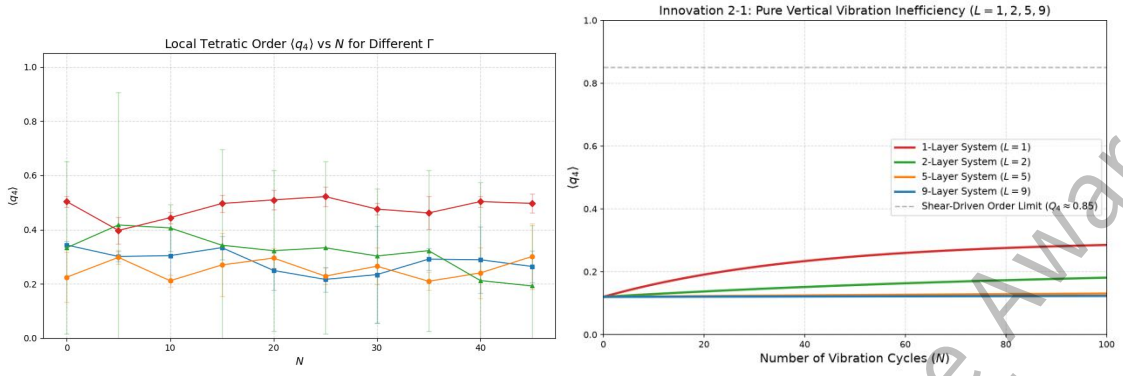


图 42：1，2，5，9 层骰子在纯振动下系统平均局部四重有序度 $\langle q_4 \rangle$ 的动态演化曲线（左）以及按理论推导进行拟合的 $\langle q_4 \rangle$ 动态演化曲线（右）高度吻合，均未出现较强有序化趋势。

5.2 旋转与振动操作不同组合对系统的影响

图 43 显示：在纯转动的体系中加入了 z 方向的振动后，系统有序化的速率以及趋势均得到了显著的提升。在双层系统中，我们将单纯的振动，单纯的旋转，与旋转 ＋z 方向振动分为三种情况进行对照。并且为了形成有效的对照，我们尽可能控制三条曲线使用相近的旋转强度，这一点也在我们使用 Tracker 进行α 的测定数据中得以体现。通过研究$\langle q_4 \rangle$随时间的变化，我们得出引入适当的垂直振动确实能够使得系统更快速地从无序态过渡为有序态：纯振动（蓝色）不会驱使系统有序程度以明显幅度增加，纯旋转（红色）效果较好地是系统变得有序，而旋转与振动结合（黄色）则取得最佳效果。垂直振动有效降低了层间摩擦力和几何互锁，使得剪切力能够更高效地传递并引导取向。

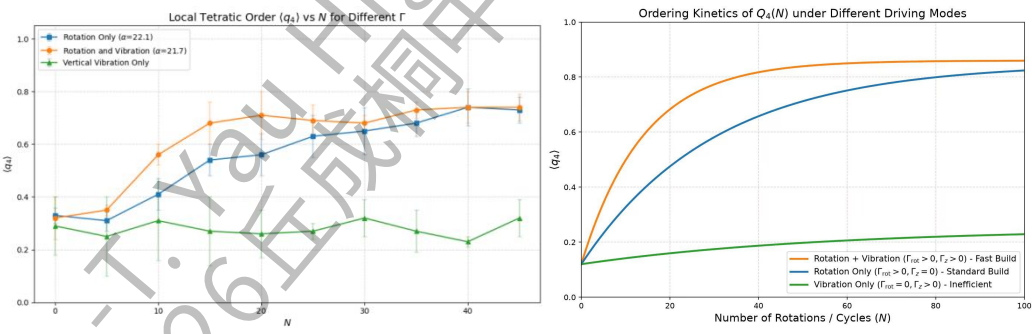


图 43：双层系统中，纯旋转操作与旋转加振动双场耦合的实验（左）与理论拟合（右）效果对比图，黄色折线"Rotation and vibration"有序化速率最快，最终效果最佳

2026 S-T·Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示



图 44：实验过程示意图：九层系统中，旋转加振动双场耦合的实验（左）与仅旋转实验（右）效果对比图，旋转加振动可以加速系统有序化进程

5.3 “有序-无序”相图的动态调控

基于前面的实验观测，我们进一步尝试通过调节 z 向振动的频率，主动重塑颗粒体系的“有序—无序”动力学相图边界。为清晰揭示其物理机制，我们选取未施加垂向振动（$f_z = 0$ Hz）与施加特定高频微振（$f_z = 20.1$ Hz）作为典型基准进行对照研究。

从图 45 所示的相变测量数据可以看出：在无垂直振动的纯剪切工况下（橙色折线），相界曲线的极大值点横坐标位于较高的角加速度区间，表明体系为了克服颗粒自重与层间强摩擦阻力而激发无序化失稳，必须依赖极高的临界角加速度 α_c。而在施加 20.1 Hz 垂直激振后（蓝色折线），整条演化轨迹相较于橙色曲线发生了明显的左移，其近二次抛物线形态的极值顶点显著移至橙色峰值左侧。这一位移定量地表明，垂向振动的引入有效松弛了颗粒间的互锁接触，从而大幅拉低了诱发无序化相变的临界驱动阈值。

与此同时，我们针对 2 层、5 层与 9 层不同堆叠深度的体系展开了平行的 q_4 序参量追踪，发现了一个更为有趣的深层规律：随着体系深度增加，垂直振动显著削弱了因垂直静水压增大而导致临界 α 持续攀升的抑制效应。表现在相图投影上，蓝色相界曲线随层数增加的向右推移幅度明显慢于橙色曲线，这使得两种工况下顶点之间的横向间距随层高增加被逐步放大。这一现象直观反映出垂直激振成功打破了原有重力负载对剪切重排的几何制约，为在更厚的多层受限颗粒系统中重新打开相变调控窗口提供了清晰的实验证据。

2026 全国青少年科技创新大赛 Youth High-tech Science Award 作品编号 2026 科技创新大赛



图 45.1：双层系统对应加入震动前后的q_4动态演化曲线

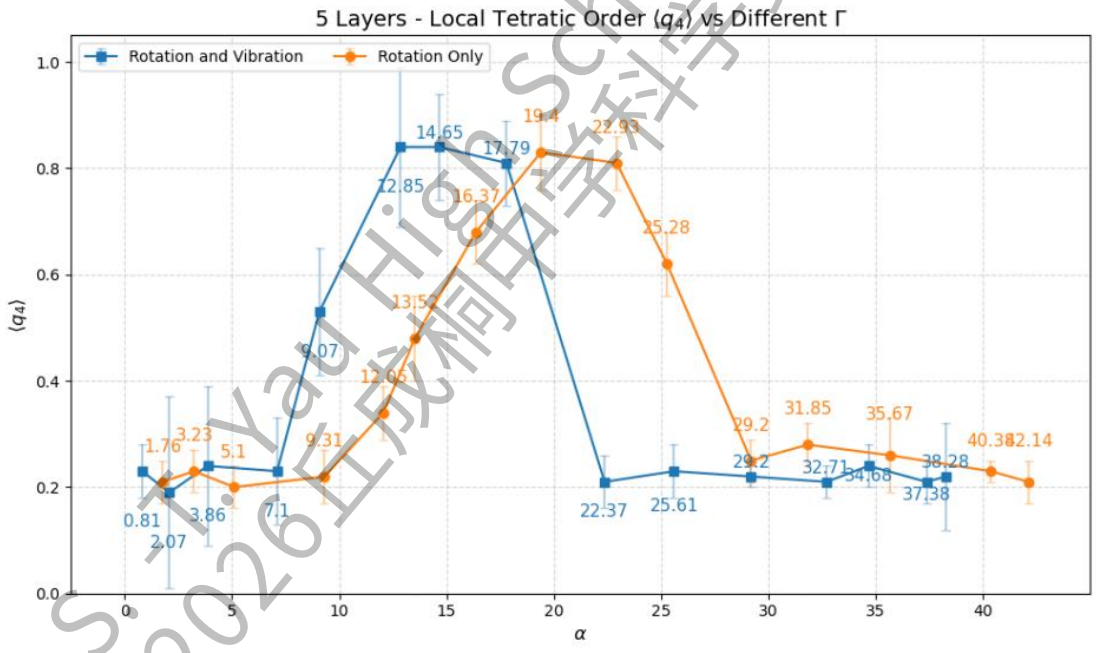


图 45.2：五层系统对应加入震动前后的q_4动态演化曲线

2026 S.T.Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

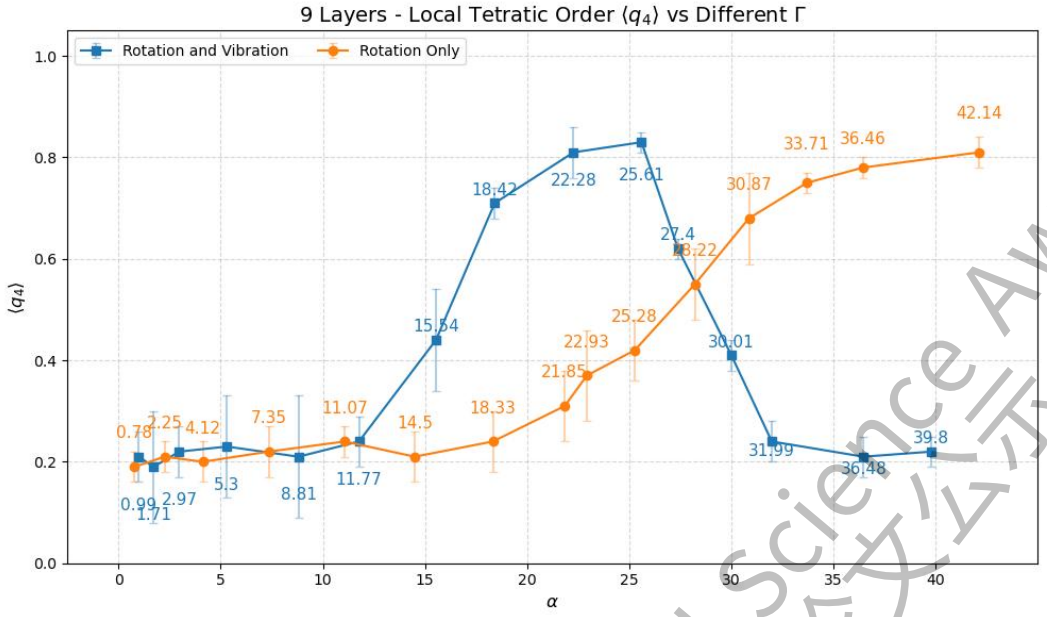


图 45.3：九层系统对应加入振动前后的q_4动态演化曲线

图 45：z 方向振动使有序化进程加快，且随着层数的加深，相变的边界被打开

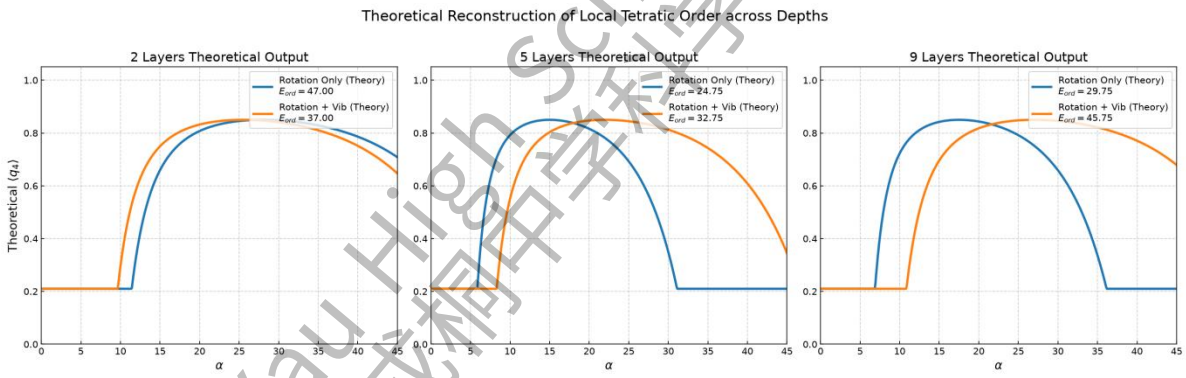


图 46：依次为由理论推导拟合的 2，5，9 层系统对应加入振动前后的q_4折线图，与实验结果吻合

为了更直观地展现垂直振动对自组织结晶相变的影响，我们借鉴了 *PRL* 原论文的动力学相图构建方法：以堆叠层数 N 为横坐标、驱动角加速度 α 为纵坐标构建相空间。以序参量 $q_4 = 0.6$ 作为固液相变的临界判据，当 $q_4 \geq 0.6$ 时判定为晶态有序相（在相图中以黑色方块标记），低于该阈值则归为无序流态相（以白色方块标记）。实验针对 1、2、3、5、9 层等不同深度的体系，通过俯拍视频的高速时序分析，精确提取了顶层颗粒在各条件下的稳态 q_4 数值及对应的瞬时驱动角加速度 α。在这一相空间中，相界曲线的斜率直观反映了体系克服重力压制、形成晶态阵列的响应灵敏度：相图边界曲线的斜率越小，意味着体系在增加层高时维持有序结晶所需的临界驱动窗口越宽，系统越容易自发涌现出宏观有序结构。

2026 S.-T. Yau High School Science Award 应用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

以此为定量分析准则，对比未施加垂直激振的基准相图（图 47 右）与施加特定频率垂直振动的相图（图 47 左）可以清楚地看到：图 47 左图中相变边界线的斜率明显小于图 47 右图中的对应斜率。这一显著的形态陡峭化趋势表明，垂直振动的耦合输入有效削弱了层间堆叠阻力，对受限颗粒体系的自发有序化进程起到了显著的正向促进作用。

不仅如此，由于**不同的 $\mathbf{z}$ 向振动频率，都可以直接决定了层间接触正应力的动态松弛周期，垂直频率 $\mathbf{f_z}$ 本身便构成了一个独立调控系统全局动力学相边界的全新控制自由度。**实验数据清晰地揭示了激振频率与相图临界边界之间存在着明确的动态映射关系——通过对垂直激振频率的主动调制，我们能够可控地实现相变边界在相空间中的平移与重构。

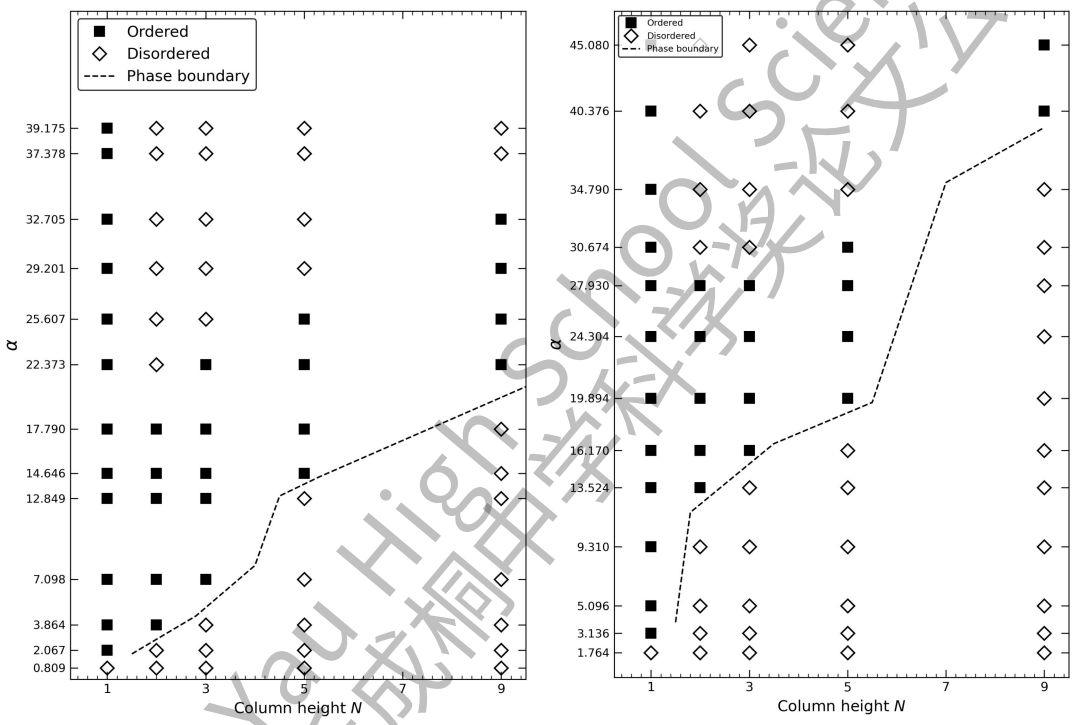


图 47：实验中各转动 30 次后，系统加入振动后角加速度与骰子层数是否为有序状态的二维相图（左，下界）以及系统未加入振动时角加速度与骰子层数是否为有序状态的二维相图（右，上界），发现加入振动会加快系统从无序变有序的速度

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

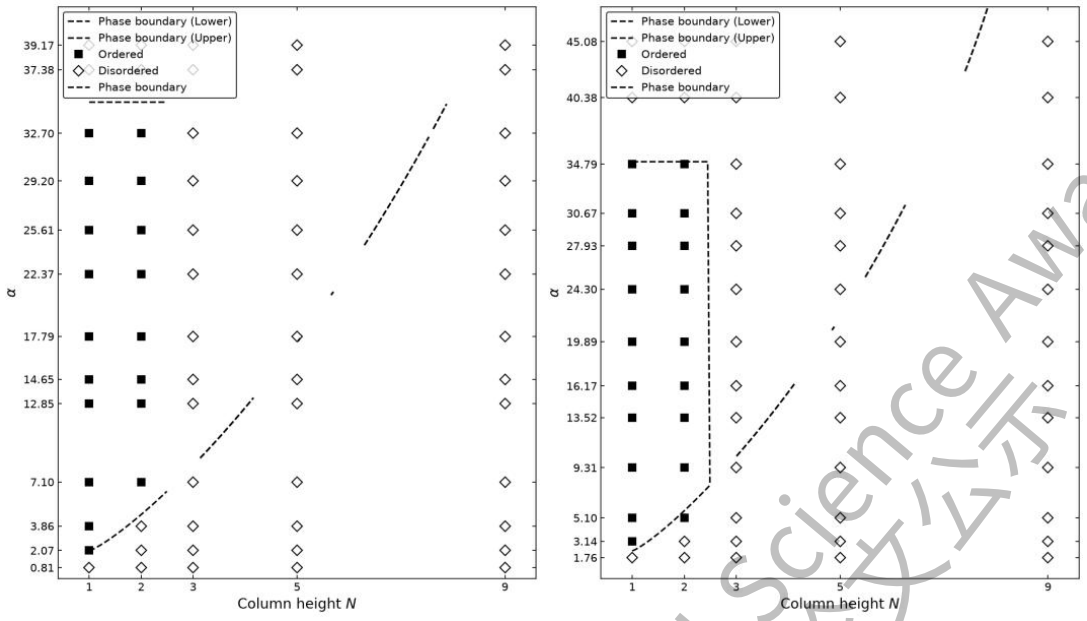


图 48: 根据理论拟合，各转动 30 次后，系统加入振动后角加速度与骰子层数是否为有序状态的二维相图（左，下界）以及系统未加入振动时角加速度与骰子层数是否为有序状态的二维相图（右，上界），发现加入振动会加快系统从无序变有序的速度，与实验现象相符

5.4 本章小结

在本章中，我们在水平旋转剪切的基础上引入了 z 向垂直微振动，系统证实了“剪切旋转 + 垂向激振”的双自由度耦合驱动确实能显著加速受限颗粒系统的自组织有序化演化；同时，实验与理论均表明，垂向振动频率可作为主动调控体系动力学相变阈值的全新物理参量。在实验表征方面，受限于测试周期与海量时序图像的处理开销，我们未能对更多梯度频率与振幅参数（4.3 节）展开大范围的细粒度平行实验。因此，针对更宽频带、更多振幅维度的精细化控制变量实验与全参数相图扫描，将作为我们后续研究推进的关键方向。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

6 拓展实验与讨论

6.1 不同尺寸大小的骰子实验

在完成现有实验的基础上，我们尝试设想：若体系中存在着不止一种尺寸大小的颗粒，在对此混合体系施加了旋转或振动后，是否同样可以产生有序化趋势，甚至达到按粒径大小分层的效果？受此驱动，我们又购买了 200 颗更大的红色骰子与 100 颗粒径更小的骰子，于是，我们获得了从大到小三种粒径的骰子。起初，我们将 200 个大骰子与中等粒径的白色骰子混合，观察到了整体的有序化趋势，却并没有发现预想中的较为明显的分层效果。

于是，我们尝试使用 100 个粒径更小的白色骰子与 200 个大骰子混合以验证旋转对于不同粒径粒子的分离及有序化作用：我们发现在达到一定程度上的有序化之上，已经可以初步完成不同粒径骰子的纵向模糊分离。如图 49.1 转动前顶部照片），图 49.2（转动后顶部照片）所示对比，顶部白色骰子的数量，在转动之后出现明显的减少，形成了一定程度上的分层。

但如果从每一层的角度来看，大小骰子之间并没有一个很清晰的界限。故在实际上我们距离实现较高纯度的分离仍有一定距离，有待进一步调控自由度的开发；



图 49.1



图 49.2

图 49：选取红色骰子(d=1.70cm)和白色骰子(d=1.26cm)，均匀打乱后施加转动及振动，通过顶层及分层计数，发现存在分层趋势。

2026 S.T.Y.Cup 中学科学论文大赛 High School Science Award
仅用于2026中学科学论文大赛

6.2 不同形状的容器实验

同时，在整个研究的最后，我们跳出圆形容器的限制，尝试不同形状的容器：我们向正方形容器中分别放入了 2 种不同尺寸的骰子，实验显示在截面为正方形的容器中，骰子体系同样可以很好地从无序到有序，但是由于边界条件的约束，其形成的分布与圆筒状容器存在着差异，大致与正方形容器内壁呈相似关系的正方形。



图 50：在正方形容器中，放入物种不同尺寸的骰子，均出现有序化趋势，且形成的分布大致与正方形内壁相似，与圆筒中形成的分布存在差异

2026 S. -T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖

7 结论与总结

本论文围绕圆柱形容器中立方体骰子在交替剪切驱动下的自组织结晶行为，完成了从实验搭建、理论建模到拓展创新的闭环研究。

实验方面，我们采用数百颗规格一致的标准骰子，参照文献方案自行搭建了剪切装置。一个关键的实验难点在于：高密度堆积下颗粒严重粘连，加上阴影遮挡和桶壁反光，常规阈值分割方法基本失效。我们引入了视觉大模型 SAM 3，配合几何形态清洗算法，搭建了一套自动化特征提取流程，实现了每颗骰子位置、角度以及四重取向序参量 q_4的高精度提取，定量复现了文献报道的结晶动力学和相图，解决了传统图像处理方法在密集颗粒体系中的适用性问题。

理论方面，此前的工作多停留在定性观察层面，我们尝试往前推了一步——将剪切扰动等效为非平衡态下的“有效温度”，建立了考虑几何互锁和摩擦效应的过阻尼朗之万动力学方程，定量刻画了弱驱动下体系卡滞于亚稳态、适度驱动下跃迁至有序晶态的转变机制。

该模型还给出了一个反直觉的预测：驱动并非越强越好。我们随之将转盘角加速度的测试范围大幅拓宽，实验上确实观测到了文献中尚未报道的新现象——当驱动参数 Γ 超过某一上限后，骰子剧烈翻滚飞溅，有序阵列迅速解体，体系重新回到各向同性流态。基于此，我们首次绘制了包含“过驱动诱导重入无序”特征的完整动态相图。此外，通过在骰子堆中引入异形橡皮和塑料片作为局部几何缺陷，我们从微观尺度直接观察到应力集中与错位如何逐步诱导体系失稳，从颗粒层面揭示了有序结构的脆弱性。

拓展方面，我们在水平剪切的基础上引入垂直方向振动，构建了“水平剪切 + 垂向振动”双自由度调控模式。实验结果显示，高频微振动能有效松弛颗粒间的正应力和卡壳状态，使结晶速度提升约一个数量级，同时振动频率本身可作为主动调控相变边界的新参数。

总结来说，这项工作将宏观颗粒实验、视觉智能表征与非线性动力学建模相结合，为非平衡软物质体系的自组织与失稳机制研究提供了一个较为完整的实验范式和理论框架。

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026正式提交学术论文公示

8 参考文献

[1] Tapia-Ignacio, C., Fossion, R. Y. M., & López-González, F. (2026). Mechanical annealing in a soft granular layer under cyclic shear at varying frequencies. Scientific Reports, 16(1), 9067.

[2] Bai, J., Zhang, G., Hong, G., Yu, A., & Li, J. (2024). Structural evolution and rheology of continuous shear-induced dense granular flow in unsteady state. Physics of Fluids, 36(5).

[3] Elizondo-Aguilera, L. F., Ríos, A. C., Rodríguez-Liñán, G. M., González, F. L., Donado, F., & Vázquez, F. P. (2023). Structural and dynamical behavior of a vibrated granular system of hard-cubes. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 632, 129311.

[4] Ding, Y., Yang, J., Ou, Y., Zhao, Y., Li, J., Hu, B., & Xia, C. (2022). Structural evolution of granular cubes packing during shear-induced ordering. Journal of physics. Condensed Matter: an Institute of Physics Journal, 34(22).

[5] Amirifar, R., Dong, K., & Yu, A. (2020). Self-assembly near Ground State: Randomly Pack Granular Spheres and Cubes into Crystal. arXiv preprint arXiv:2004.02320.

[6] Wang, F., & Huang, Y. J. (2021). Simulation of granular crystallization of cubic particles in twisting container using discrete element method. Advanced Powder Technology, 32(2), 535-545.

[7] Carion, N., Gustafson, L., Hu, Y. T., Debnath, S., Hu, R., Suris Coll-Vinent, D., ... & Feichtenhofer, C. (2026, April). Sam 3: Segment anything with concepts. In International conference on learning representations (Vol. 2026, pp. 138846-138923)..

[8] Bradski, G., & Kaehler, A. (2008). Learning OpenCV: Computer vision with the OpenCV library. " O'Reilly Media, Inc.".

[9] Denisov, S. I., Horsthemke, W., & Hänggi, P. (2009). Generalized Fokker-Planck equation: Derivation and exact solutions. The European Physical Journal B, 68(4), 567-575.

[10] Weisstein, E. W. (2002). Bessel function of the first kind. https://mathworld. wolfram. com/.

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

致谢

行文至此，落笔为终。本以为是一场遥不可及的旅程，但回顾这一年的时间，堆积如山的瞬间早已填充了这一段非比寻常的科研经历。

作为三个科研小白，彼时的我们，对于物理科研的了解几乎是一片空白——有的只是对未知问题最朴素的好奇，以及想要探寻答案的冲动。一年的时间里，我们从最初的无从下手，到学会查阅文献，设计实验，再到处理数据、编程写作。回头看，我们没有一下变得很厉害，记忆却很丰富：是深夜的线上会议，是搓动玻璃筒酸胀的手臂，是爆炸的内存，掉线的网络，和散落一地的、成百上千的、五颜六色的骰子。

科研过程中，朱瑞霖主要负责实验部分。陆欣妍负责处理实验数据、绘制实验图像。高诺一则负责理论模型的建构和理论图像的绘制。在上百次的转动实验中，我们做了多次各种不同条件下的对比试验，有震台、无震台、单层、双层、五层、九层、五种不同的速度……在客厅地板上，用晾衣架和各学科的书本搭出了摄影平台录制视频追踪骰子的运动，再后期提取出需要的数据。但实验过程中，我们回想自己的生活经验，在用极大的力摇晃容器时，容器内的物体将变得很混乱，因此愈究愈深，引发了我们对正文中两个创新点的思考。在提取数据后，我们有大量的图像需要绘制，因为图像识别、编程画图的过程十分繁琐，我们经常熬到深夜，精调配色与参数。同时，理论模型的推导在进行，有些冗长的物理公式开始时宛若天书，但在熊波老师的解答后便也能推进。最后论文的撰写是一场集中的头脑风暴，我们分别负责自己的章节，但也拉满团队协作，并隔空请教熊老师。从第一版不知所云的“图片集”，经过一次次的调试、修改，这篇论文终于有了今天让我们充满成就感的模样。

这段旅程中，我们学习了，也成长了。尽管路上荆棘重重，但研究最终产出了果实，我们要感谢这个团队的坚持，也要感谢一路陪伴我们的人们。

首先，我们要感谢浙江大学的熊波老师，给予我们专业的指导和无条件的支持。很多时候，我们带着一个不成熟的想法来，老师却愿意认真听完，再和我们一起思考它是否可行、应该怎样继续。在科研的过程中，熊波老师以严谨的学术思维给我们提供帮助和建议，我们学会了如何编程画图、架构论文，收获颇丰。感谢老师，让我们第一次近距离接触物理科研，有了自己的 “0 到 1”。

我们还要感谢南京外国语学校的老师们，谢谢你们平日的谆谆教导细心解答，正是在南外的理科学习中，我们产生对物理现象的好奇和对探索未知的热情。

感谢我们的父母，家人。在我们思路涣散时，在实验中骰子过于倔强时，在我们筋疲力竭的时候，是一桌热腾腾的饭菜给我们注入能量，给予我们重新启动震台，开始计时的动力。谢谢你们支持我们研究物理，陪我们在网购平台购买各种实验器材，提供舒适且 24 小时开放的“居家实验室”。

2026 年 FIRST Robotics Competition 上海赛区 Engineering Award 获奖作品公示

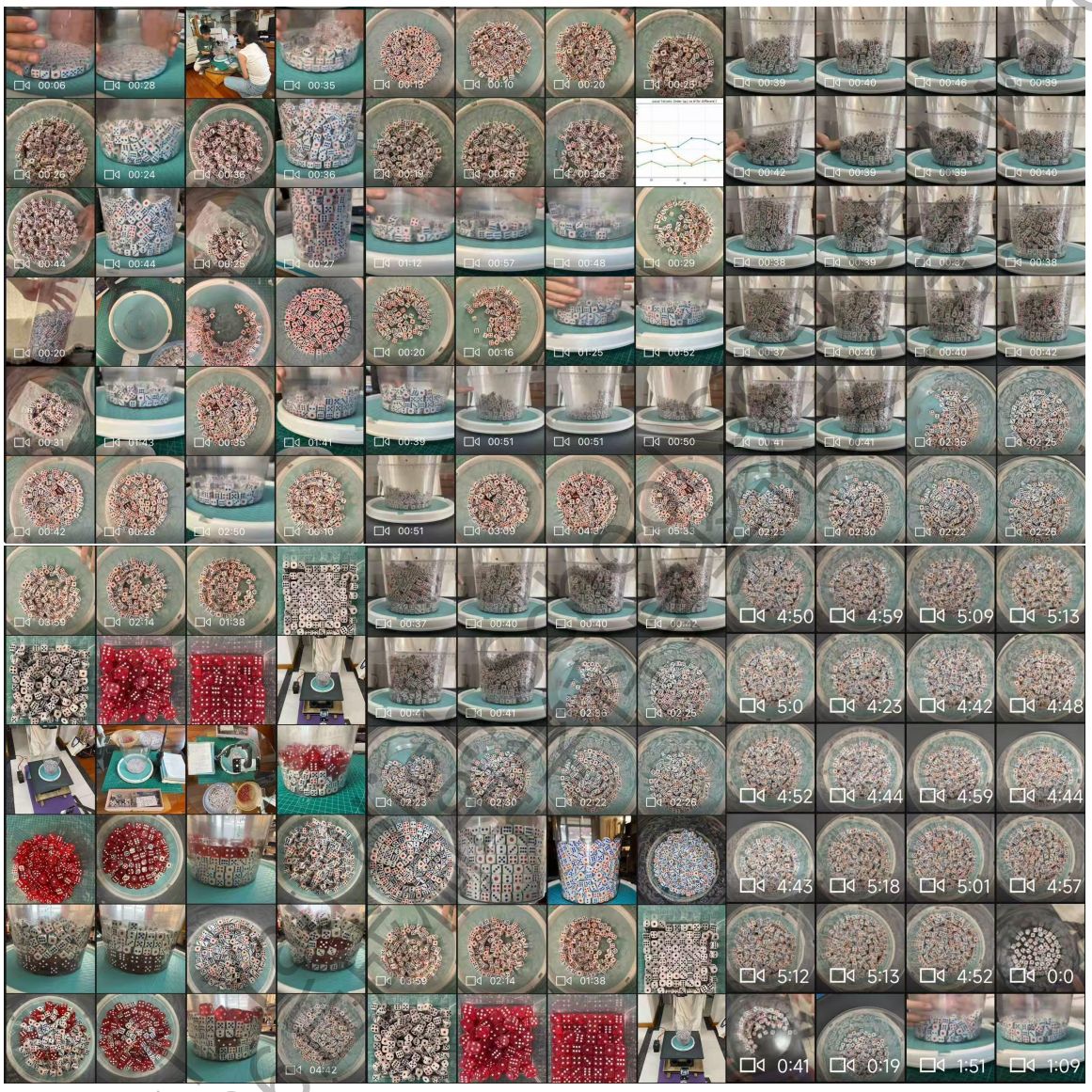
感谢我们身边的同学朋友，虽然可能不了解我们的研究，但仍然愿意一起头脑风暴，相互鼓励，让陌生的科研旅程有了温度。

最后，我们还要感谢这个团队，感谢近一年前那个对骰子和物理充满好奇、却什么都不懂的自己。谢谢我们没有因为“不懂”而停下，没有因为一次次失败的实验而放弃，也没有因为过程中的枯燥与挫折否定最初的那份热爱。从第一次接触，到今天能够站在这里回望，我们或许仍然是科研道路上的初学者，但我们已经学会了如何面对未知，如何接受失败，也学会了在没有答案的时候，继续寻找答案。

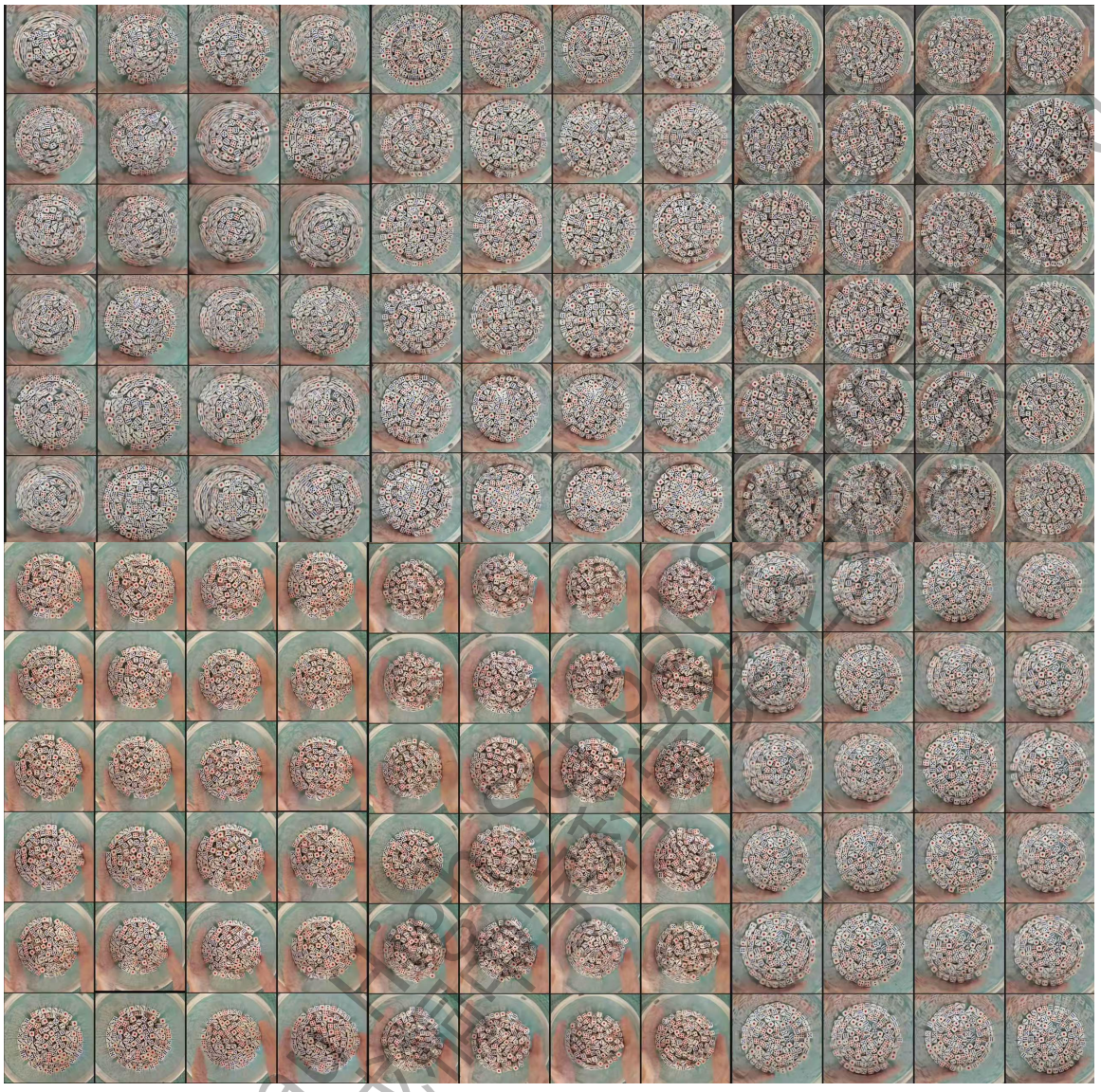
2026 S. -T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

附录

附录 A：实验记录与部分图片输入

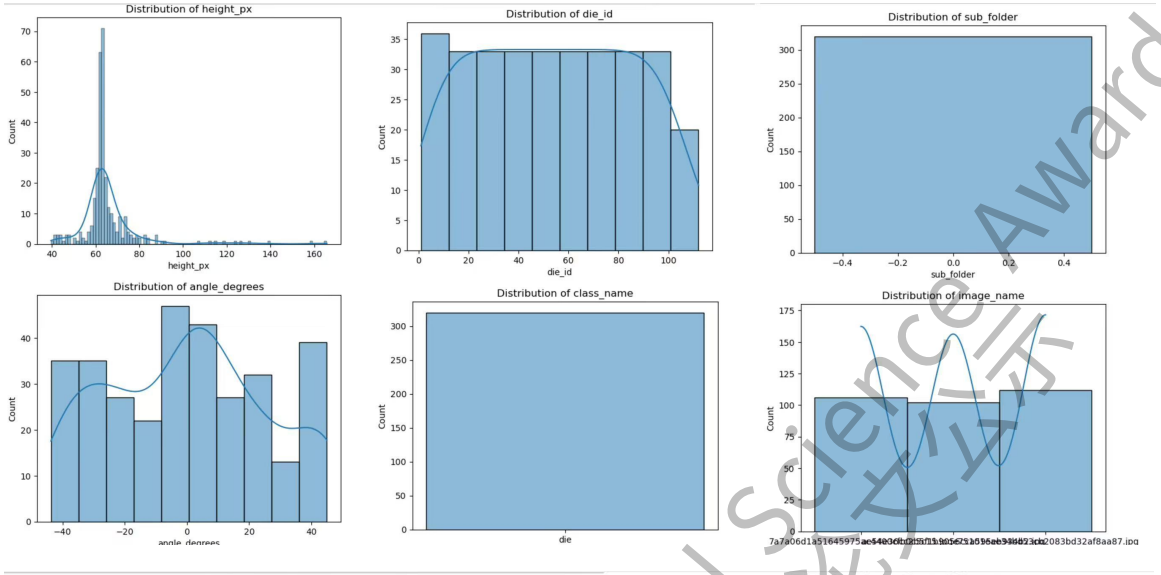


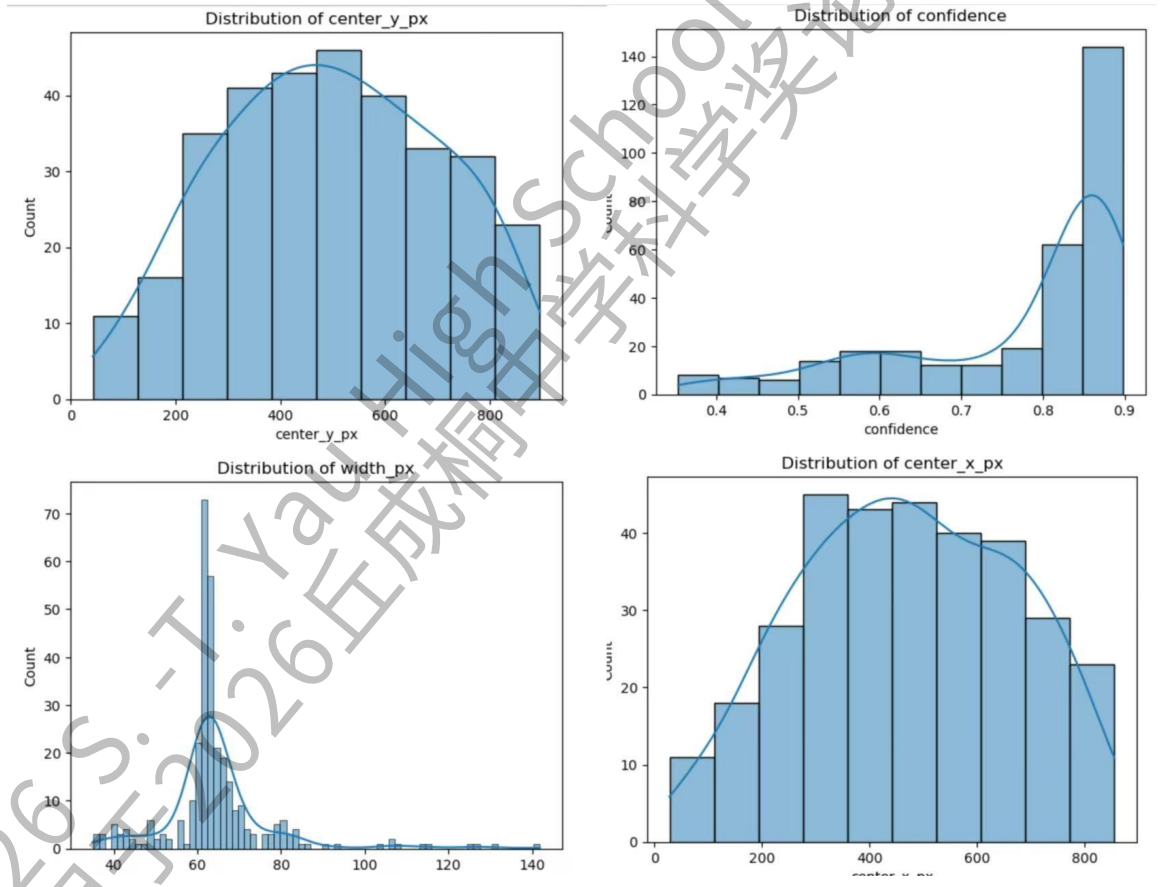
2026 S.
仅用于2026



2026 S. -T. Yau
仅用于2026丘成桐

附录 B：数据清理统计图，异常值评估统计图





2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖文件

附录 C：各参数动态演化曲线绘图代码（e.g.<q4>



```python
import glob
import os
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as mcolors
import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.spatial import cKDTree

# ================ 1. 物理参数配置 ================
R_container_cm = 17.5   # 容器半径 (cm)
dice_size_cm = 1.26     # 骰子边长 (cm)
margin_layers = 2       # 剔除外围贴壁骰子的圈数 (2圈 ≈ 2.52 cm)
R_cut_cm = R_container_cm - (margin_layers * dice_size_cm)  # 有效 ROI 半径 ≈ 14.98 cm


def compute_q4_list_for_file(filepath):
    """
    读取包含多张图片的 CSV 文件，分别计算每张图的 q4。
    返回包含每张图 q4 值的列表 [q4_img1, q4_img2, q4_img3, ...]
    """
    df = pd.read_csv(filepath)

    target_col = next((c for c in ["angle_degrees", "AngleDeg", "Theta_Folded", "angle", "angle_deg"] if c in df.columns), None)
    x_col = next((c for c in ["center_x_px", "x", "X", "center_x"] if c in df.columns), None)
    y_col = next((c for c in ["center_y_px", "y", "Y", "center_y"] if c in df.columns), None)

    if not (target_col and x_col and y_col):
        return []

    img_col = next((c for c in ["image_name", "img_name", "image", "sub_folder"] if c in df.columns), None)

    if img_col:
        img_groups = df.groupby(img_col)
    else:
        img_groups = [("default_img", df)]

    q4_list = []

    for img_name, df_img in img_groups:
        if len(df_img) < 2:
            continue

        cx, cy = df_img[x_col].mean(), df_img[y_col].mean()
        dx, dy = df_img[x_col] - cx, df_img[y_col] - cy
        r_px = np.sqrt(dx**2 + dy**2)

        if r_px.max() == 0:
            continue

        angles_deg = df_roi[target_col].values
        angles_rad = np.radians(angles_deg % 90)

        coords = df_roi[[x_col, y_col]].values
        tree = cKDTree(coords)
        neighbor_radius_px = 2.5 * dice_size_cm * px_per_cm

        q4_values_single_img = []
        for i, angle_i in enumerate(angles_rad):
            neighbors_idx = tree.query_ball_point(coords[i], r=neighbor_radius_px)
            neighbors_idx = [idx for idx in neighbors_idx if idx != i]

            if len(neighbors_idx) > 0:
                angle_diffs = angle_i - angles_rad[neighbors_idx]
                q4_values_single_img.append(np.mean(np.cos(4 * angle_diffs)))

        if len(q4_values_single_img) > 0:
            q4_list.append(np.mean(q4_values_single_img))

    return q4_list

folder_list = [
    "rorderdis2_csv_results",
    "disorder1_csv_results",
    "disorder_csv_results",
    "orderdis1_csv_results",
]

gamma_map = {
    "disorder_csv_results": "1.196",
    "disorder1_csv_results": "1.210",
    "orderdis1_csv_results": "3.147",
    "rorderdis2_csv_results": "0.111",
}

results = []

for folder in folder_list:
    if not os.path.exists(folder):
        print(f"提示：文件夹 '{folder}' 不存在，已自动跳过。")
        continue

    csv_files = sorted(glob.glob(os.path.join(folder, "*.csv")))
    print(f"📂 正在扫描文件夹 '{folder}'，共找到 {len(csv_files)} 个 CSV 文件。")

    gamma_label = gamma_map.get(folder, folder)

    for idx, file in enumerate(csv_files):
```

```python
    for idx, gamma_val in enumerate(gamma_categories):
        sub_df = df_grouped[df_grouped["Gamma"] == gamma_val].sort_values("N")

        main_color = colors[idx % len(colors)]
        fade_ecolor = mcolors.to_rgba(main_color, alpha=0.3)

        plt.errorbar(
            sub_df["N"],
            sub_df["mean"],
            yerr=sub_df["std"],
            marker=markers[idx % len(markers)],
            color=main_color,
            ecolor=fade_ecolor,
            capsize=3.0,
            capthick=1.0,
            elinewidth=1.0,
            linewidth=1.6,
            markersize=6,
            label=f"$\\Gamma = {gamma_val}$",
        )

    plt.xlabel("$N$", fontsize=12)
    plt.ylabel(r"$\langle q_4 \rangle$", fontsize=12)
    plt.title(r"Local Tetratic Order $\langle q_4 \rangle$ vs $N$ for Different $\Gamma$", fontsize=13)
    plt.ylim(0.00, 1.05)

    plt.legend(loc="upper left", ncol=2, frameon=True, fontsize=10)

    plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.5)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

```
正在扫描文件夹 'rorderdis2_csv_results'，共找到 10 个 CSV 文件。
正在扫描文件夹 'disorder1_csv_results'，共找到 10 个 CSV 文件。
正在扫描文件夹 'disorder_csv_results'，共找到 10 个 CSV 文件。
正在扫描文件夹 'orderdis1_csv_results'，共找到 10 个 CSV 文件。
```



2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

附录 D：部分拓展理论

1 过驱动诱导的重入无序

经典颗粒剪切理论通常认为，增大驱动强度能够帮助颗粒克服几何卡阻，从而促进体系由无序态向有序态演化。然而，我们通过在实验中拓展驱动强度范围发现，体系的响应并非随驱动强度单调增强。随着驱动加速度 a 增大，体系依次经历 Disorder → Order → Disorder，即存在一个有限的最佳驱动窗口；当驱动强度超过一定阈值后，体系反而从高有序态重新进入无序态。我们将这一现象称为过驱动诱导的重入无序。

研究不同层数骰子的几组实验表明，高驱动下的无序化并非体系整体同步发生，而是首先由局域缺陷态产生，随后在空间上扩展、累积，最终破坏宏观尺度上的取向有序。与此同时，我们发现无序 → 有序与有序 → 无序具有显著不同的动力学时间尺度。因此，我们分别从稳态响应、局域缺陷激发以及动力学能垒三个层次建立理论模型，定量解释重入无序及其动力学非对称性。

1.1 相图上界：非单调响应与重入无序

实验测得的实验全局序参量 S_4^{global} 随驱动加速度 a 呈现明显的非单调响应。体系存在两个特征驱动强度 a_1 与 a_2，从而形成三个动力学区域：

欠驱动区（$a < a_1$）： 驱动不足以有效克服颗粒间摩擦、几何卡阻以及局域笼效应，体系长期停留在亚稳的无序态。此时颗粒重排几近冻结，能够参与长程有序化的有效重排事件极少。

有序化窗口（$a_1 \le a \le a_2$）：剪切提供适度的机械涨落，使颗粒能够跨越局域重排能垒，同时局域缺陷的产生仍受到抑制。因此有序化过程占据优势，局域有序区域不断形成并扩展。

过驱动区（$a > a_2$）:随着驱动进一步增强，局域剪切应力超过稳定有序结构所能承受的极限。缺陷激发率快速增加，局域取向偏离稳定四重轴向，导致宏观序参量下降。

因此，驱动强度并非简单地“越大越好”，而是在克服阻力与缺陷破坏之间存在竞争。当驱动较小时重排受阻；当驱动超过临界窗口后缺陷主导，从而产生重入无序。

2026 Shanghai High School Science Award
仅用于2026年度上海市高中学生科学实践成果公示

1.2. 微观机制：逐层实验体现了局域缺陷激发

定义局域缺陷态密度为 n_d，将其产生视为机械剪切诱导的激活过程。相邻颗粒层的相对位移产生局域剪切应力 $\tau_{shear} = \tau_{shear}(a)$。当局域应力接近结构屈服尺度 τ_y 时，颗粒发生倾斜或滑移的概率显著增加。缺陷激发率为：

$$\Gamma_{defect}(a) = \Gamma_0 \exp\left[-\frac{\Delta E_d(a)}{\chi a}\right]$$

其中驱动相关的局域缺陷激活能垒可表述为：

$$\Delta E_d(a) = \Delta E_{d,0} - W_{shear}(a)$$

这里 $W_{shear}(a)$ 表示机械剪切做功。随着 a 增大，$W_{shear}(a)$ 升高，导致 $\Delta E_d(a)$ 降低，缺陷激发率非线性增强，最终引发结构失稳。

1.3 $W_{shear}(a)$ 的显式函数形式与非单调性的必要条件

为使上述定性论证可以定量检验，需为 $W_{shear}(a)$ 给出显式形式。考虑到局域剪切应力 $\tau_{shear}(a)$ 随驱动加速度增大并在接近结构屈服尺度 τ_y 时使颗粒重排概率显著增强，一个物理上合理且解析简单的选择是使剪切做功随 a 超线性增长、并在趋近某一饱和驱动 a^* 附近迅速增强：

$$W_{shear}(a) = W_0\left(\frac{a}{a^*}\right)^n, \qquad n > 1$$

其中 W_0 设定能量尺度，$n > 1$ 的超线性指数反映剪切应力对滑移概率的非线性放大效应（例如源于接触数或屈服判据的非线性依赖）。

结合第三章 3 中给出的稳态解 $Q_4^*(a) = \left[1 + (r_d/r_0)\exp(g(a))\right]^{-1}$，其中

$$g(a) \equiv \frac{\Delta E_{ord} - \Delta E_{d,0} + W_{shear}(a)}{\chi a},$$

$Q_4^*(a)$ 呈现“先升后降”的钟形曲线，其充分必要条件是 $g(a)$ 先减小后增大，即 $g(a)$ 存在唯一极小值点。将 $W_{shear}(a) = W_0(a/a^*)^n$ 代入并对 a 求导：

$$g'(a) = \frac{(n-1)W_0(a/a^*)^n - \left[\Delta E_{ord} - \Delta E_{d,0}\right]}{\chi a^2}$$

可见，当 $n > 1$ 时，$g'(a)$ 的分子随 a 单调递增，必然存在唯一的 $a = a_2$ 使 $g'(a_2) = 0$，且 $a < a_2$ 时 $g'(a) < 0$（g 递减，Q_4^* 递增），$a > a_2$ 时

2026 全国大学生 Tyau High School Science Award 仅用于2026年度中学科学论文公示

$g'(a) > 0$（g 递增，Q_4^* 递减）——这正是过驱动区重入无序的解析来源。相反，若 $n \le 1$（$W_{\mathrm{shear}}(a)$ 至多线性增长），则 $g'(a)$ 的分子恒为正或恒不改变符号，$g(a)$ 不再具有内部极小值，$Q_4^*(a)$ 将单调变化而不会重入无序。

因此，**$\mathbf{W_{shear}(a)}$必须超线性增长（$\mathbf{n > 1}$）是体系呈现非单调重入无序响应的必要条件**，该条件此前在正文中只以文字方式论证，现已被显式导出并可与实验测得的 a_1, a_2 数值一并用于拟合确定 n 与 W_0。

1.4 理论模型：结晶与缺陷竞争下的稳态响应解析

上一章建立的 Fokker-Planck 模型通过有效温度 $T_{\mathrm{eff}} = \chi a$ 描述驱动涨落促进颗粒取向重排的过程，但其形式无法解释“先有序、后无序”的非单调相图。因此，本章将体系看作两个竞争过程：一方面驱动帮助克服局域重排能垒（促进有序）；另一方面过强驱动激发局域缺陷（破坏有序）。

设无序 $\rightarrow$ 有序的有效速率为 $r_{\mathrm{ord}}(a)$，缺陷激发速率为 $r_{\mathrm{def}}(a)$：

$$r_{\mathrm{ord}}(a) = r_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_{\mathrm{ord}}}{\chi a}\right)$$

$$r_{\mathrm{def}}(a) = r_d \exp\left[-\frac{\Delta E_{d,0} - W_{\mathrm{shear}}(a)}{\chi a}\right]$$

其中 ΔE_{ord} 为有效有序化能垒，$\Delta E_{d,0}$ 为无外部剪切做功时的局域缺陷激活能垒。

1.5 Logistic 局域序演化方程

局域序演化方程 $dQ_4/dN = \lambda Q_4(1 - Q_4)$ 之所以能够复现实验观测到的“诱导期 $\rightarrow$ 爆发增长 $\rightarrow$ 饱和”三段式 Sigmoid 曲线，关键在于其自催化（$Q_4(1 - Q_4)$）的非线性结构；而如果直接采用线性两态弛豫 $dQ_4/dN = r_{\mathrm{ord}}(1 - Q_4) - r_{\mathrm{def}}Q_4$，则该方程在任意初值下都只能给出单指数弛豫解，不存在拐点与诱导期，与第二章的结果相矛盾。为使两章的动力学描述相互自洽，这里将有序化通道也写成自催化形式——即已经存在的有序区域对相邻颗粒的重排起模板作用（对应 PRL 原文中"介观对齐簇不断生长、旋转合并、跨越系统尺度渗流"的图像），从而将局域有序度 Q_4 的演化统一为：

$$\frac{dQ_4}{dN} = r_{\mathrm{ord}}(a)\, Q_4(1 - Q_4) - r_{\mathrm{def}}(a)\, Q_4$$

2026 Xiau High School Science Award 仅用于2026云戍桐中学科学奖论文公示

这一方程在保留 $Q_4 = 0$ 附近生长速率正比于既有 Q_4（自催化、S 型增长）的同时，也保留了缺陷激发对有序度的线性侵蚀作用。

1.6 稳态解

令 $dQ_4/dN = 0$，方程给出 $Q_4 = 0$（平凡解）与非平凡稳态：

$$Q_4^*(a) = 1 - \frac{r_{\text{def}}(a)}{r_{\text{ord}}(a)}, \qquad \text{当} r_{\text{ord}}(a) > r_{\text{def}}(a)$$

当 $r_{\text{ord}}(a) \le r_{\text{def}}(a)$ 时，非平凡稳态不存在（或为负，物理上舍去），体系收敛到 $Q_4^* = 0$。代入 $r_{\text{ord}}, r_{\text{def}}$ 的显式表达式：

$$Q_4^*(a) = \left[1 - \frac{r_d}{r_0}\exp\left(\frac{\Delta E_{\text{ord}} - \Delta E_{d,0} + W_{\text{shear}}(a)}{\chi a}\right)\right]_+$$

其中 $[\cdot]_+$ 表示取正部（负值时置零）。该表达式与此前线性两态模型给出的 $Q_4^* = r_{\text{ord}}/(r_{\text{ord}} + r_{\text{def}})$ 在定性趋势（钟形响应、非单调性由 $g(a) = [\Delta E_{\text{ord}} - \Delta E_{d,0} + W_{\text{shear}}(a)]/\chi a$ 的符号变化决定）上一致，但现在与第二章的 Logistic 动力学方程共享同一个自催化结构，二者不再是相互矛盾的两套模型，而是同一非线性方程在不同侧重点（瞬态演化 vs. 长时间稳态）下的两种读法。

1.7 诱导期 $\mathrm{N_c}$ 的解析估计

在自催化方程 $dQ_4/dN = r_{\text{ord}}Q_4(1 - Q_4) - r_{\text{def}}Q_4 = Q_4\big[r_{\text{ord}}(1 - Q_4) - r_{\text{def}}\big]$ 中，当初值 $Q_{4,0} \ll 1$ 时，右端在 $Q_4 \to 0$ 附近近似为线性增长项 $(r_{\text{ord}} - r_{\text{def}})Q_4$，因此初期 $Q_4(N) \approx Q_{4,0}\exp[(r_{\text{ord}} - r_{\text{def}})N]$ 增长缓慢（只要 $r_{\text{ord}} - r_{\text{def}}$ 不太大），直到 Q_4 增长到与 1 同量级时非线性项才开始主导、体系迅速攀升至 Q_4^*。据此可定义诱导期

$$N_c \sim \frac{1}{r_{\text{ord}}(a) - r_{\text{def}}(a)}\ln\frac{1}{Q_{4,0}}$$

这与第二章 4 中由纯 Logistic 方程得到的半饱和驱动次数 $N_0 = \lambda^{-1}\ln[(1 - Q_{4,0})/Q_{4,0}]$ 在 $Q_{4,0} \ll 1$ 极限下形式一致（此时 $\lambda \leftrightarrow r_{\text{ord}} - r_{\text{def}}$），从而将实验中 N_c 随驱动强度 a 缩短的现象，与两个竞争速率之差 $r_{\text{ord}}(a) - r_{\text{def}}(a)$ 随 a 的增大直接关联起来。

2026 S. T. Yau High School Science Award
仅用于2026年武侯杯科学论文公示

该解析解清晰地揭示了非单调相图的物理来源：

- **低驱动区（冻结无序）**： 当 $a \to 0^+$ 时，$r_{\text{ord}} \to 0, r_{\text{def}} \to 0$。若本征有序化能垒满足 $\Delta E_{\text{ord}} > \Delta E_{d,0}$，则低驱动下 $r_{\text{ord}} \ll r_{\text{def}}$，导致 $Q_4^* \to 0$。此时体系的无序并非源于缺陷活跃，而是由于重排被严重冻结，长期停留在亚稳态。
- **中等驱动区（有序化占优）**： 驱动使颗粒跨越重排能垒，使 $r_{\text{ord}}(a)$ 快速增加。在特定窗口内 $r_{\text{ord}} \gg r_{\text{def}}$，使得 $Q_4^* \to 1$。
- **过驱动区（缺陷主导）**： 剪切做功 $W_{\text{shear}}(a)$ 显著压低缺陷能垒，使 $r_{\text{def}}(a) \gg r_{\text{ord}}(a)$，从而 $Q_4^* \to 0$。如第三章 2 所证明，这一过驱动区间的存在要求 $W_{\text{shear}}(a)$ 随 a 超线性增长（指数 $n > 1$）。

这一竞争机制自然复现了实验中观测到的 $0 \to 1 \to 0$ 钟形响应。

1.8 动力学不对称性：空间协同性与能垒差异

实验观测到另一显著特征为：无序 → 有序的结晶速率远小于有序 → 无序的熔化速率，即 $v_{\text{ord}} \ll v_{\text{melt}}$。这表明两者的微观路径与空间协同性存在本质不同。

1. 无序 → 有序（协同重排）： 建立长程有序需要周围大量颗粒协同调整取向并使局域有序区不断扩展，涉及较高的协同激活能垒 ΔE_{cryst}：

$$v_{\text{ord}} \sim v_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_{\text{cryst}}}{\chi a}\right)$$

2. 有序 → 无序（局域失稳）： 有序结构的破坏无需全场协同。过驱动下少量局域颗粒的失稳即可触发连锁反应。机械剪切做功直接降低了有效熔化能垒：

$$\Delta E_{\text{melt}}(a) = \Delta E_0 - W_{\text{shear}}(a)$$

当 $a > a_2$ 时 $\Delta E_{\text{melt}} \to 0$，导致熔化速率剧增。

对比两种过程的速率关系：

$$\frac{v_{\text{melt}}}{v_{\text{ord}}} \sim \frac{v_0'}{v_0} \exp\left[\frac{\Delta E_{\text{cryst}} - \Delta E_{\text{melt}}(a)}{\times a}\right] \gg 1$$

2026 S. - T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

由于 $\Delta E_{cryst} > \Delta E_{melt}(a)$ 且过驱动下熔化能垒进一步趋近于零，体系展现出强烈的动力学不对称性：建立秩序需要漫长的多体协同，而破坏秩序仅需局域失稳的瞬时触发。

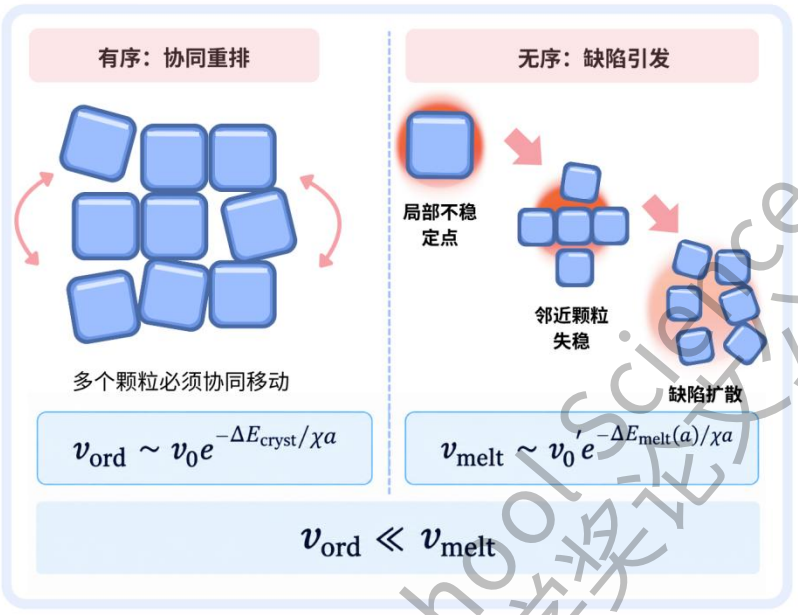


图24：从微观角度分析的骰子在周围环境下从无序抵达有序（左）和从有序变为无序状态（右）的速率差异

2 垂直振动调控深层颗粒相界与动力学通道

前一章表明，旋转驱动 a 会同时激活局域有序重排与缺陷激发。但在深层系统中，重力带来的强卡阻限制了这一过程。本章引入独立控制的垂直（z 向）微小振动。实验发现，纯垂直振动不能独立驱动结晶；它通过改变深层颗粒的接触约束，调制旋转驱动下的动力学过程，并进一步重构有序化窗口。

2.1 实验观察：协同作用与非独立性

无量纲垂直振动强度定义为：

$$\Gamma_z = \frac{A_z \omega^2}{g}$$

其中 A_z 为振幅，ω 为角频率。实验中控制震台频率处于合理范围，并通过改变振幅调节 Γ_z。系统的有序程度分别采用顶面局域序参量 Q_4 与侧面全局序参量 S_4^{global} 进行定量表征。

2026 Sixth High School Science Award 仅用于2026届高中学术论文公示

实验观察到：

1. **非独立性**： 在无旋转驱动（$a \to 0$）时，单独增加 Γ_z 不能使单层、双层及多层系统快速从无序态进入有序态。
2. **协同加速**： 当旋转驱动与垂直振动同时存在时，有序化建立速度提高，即：

$$Q_4(N; a, \Gamma_z, H) > Q_4(N; a, 0, H)$$

在浅层系统中，该差异相对较小；随着系统深度增加，垂直振动的调制作用逐渐增强。

因此，垂直振动并不是一个独立的结晶驱动，而更可能通过改变颗粒间接触状态来调节旋转剪切所诱导的重排过程。

2.2 双通道竞争调控模型

垂直振动同时作用于有序化与缺陷激发两个动力学通道。基于前一章的双通道模型，将两种速率推广为：

$$r_{\mathrm{ord}}(a, \Gamma_z, H) = r_0 \exp\left[-\frac{\Delta E_{\mathrm{ord}}(H)}{\chi a \cdot \eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z, H)}\right]$$

$$r_{\mathrm{def}}(a, \Gamma_z, H) = r_d \exp\left[-\frac{\Delta E_{d,0}(H) - W_{\mathrm{shear}}(a) - W_z(\Gamma_z, H)}{\chi a}\right]$$

其中，$\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z, H)$ 表示垂直振动对旋转诱导重排效率的增强作用，而 $W_z(\Gamma_z, H)$ 表示垂直振动通过改变层间接触约束对缺陷激发能垒产生的削弱作用。

垂直振动产生周期性的法向加速度 $a_z(t) = A_z \omega^2 \cos(\omega t)$，使颗粒层间的瞬时法向载荷发生周期性变化。在部分脱阻阶段，层间接触约束和摩擦阻碍减弱，从而使旋转剪切更容易诱导颗粒发生相对重排。

该模型保持了旋转驱动在有序化过程中的必要性。由于 r_{ord} 的有效驱动仍由 χa 控制，当 $a \to 0$ 时：

$$r_{\mathrm{ord}} \to 0$$

因此即使存在较强的垂直振动，也不会产生快速的独立结晶。这表明，在本模型中，垂直振动主要通过调节旋转驱动下的重排效率发挥作用，而不能取代旋转驱动本身。

为使 $\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z, H)$ 与 $W_z(\Gamma_z, H)$ 的调制方向可被显式检验，取与第三章 2 中 $W_{\mathrm{shear}}(a)$ 类似的、随 Γ_z 单调增长的简单形式：

2026 S.T. 仅用于2026国际科学奖论文公示 High School Science Award

$$\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z, H) = 1 + \kappa_{\mathrm{ord}}(H)\,\Gamma_z, \qquad W_z(\Gamma_z, H) = \kappa_z(H)\,\Gamma_z,$$

其中 $\kappa_{\mathrm{ord}}(H), \kappa_z(H) > 0$ 且随深度 H 增大而增大，对应第四章 3 中"深度累积效应"——层间接触约束越强（H 越大），垂直振动对约束的周期性调制作用越显著。第四章 4 将利用这一显式形式对相界移动方向作出可验证的解析推导。

2.3 深度累积效应

对于深层颗粒系统，底部颗粒承受更大的上覆载荷，因此层间接触约束和卡阻效应更加显著。垂直振动对这一约束状态的调制也因此表现出明显的深度依赖。

实验直接观测到：

$$H \uparrow \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial Q_4}{\partial \Gamma_z}\right| \uparrow$$

这表明：随着颗粒层数增加，垂直振动对系统动力学的调制作用增强。浅层系统本身受到的重力卡阻较弱，故旋转驱动已经能够完成较充分的颗粒重排；而在深层系统中，垂直振动对接触约束的周期性调制能够更明显地释放旋转剪切受到限制。

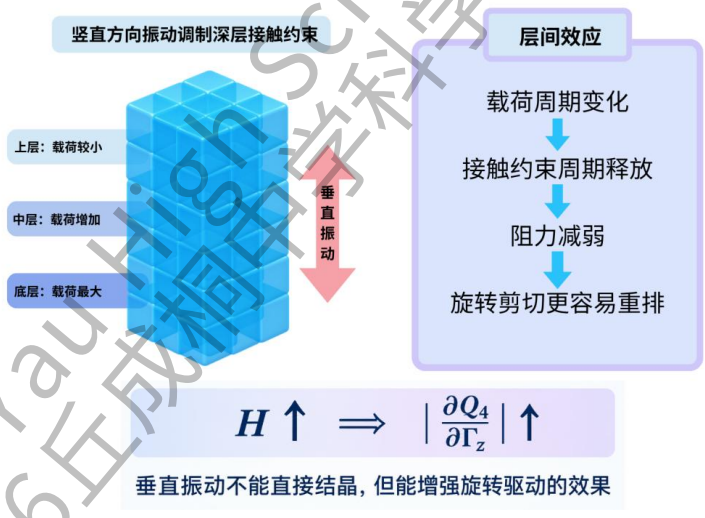


图 40：垂直振动对系统动力学的调制作用示意图

2.4 相界重构与实验验证

在前一章中，有序区域由下边界 a_1 与上边界 a_2 界定。引入垂直振动后，两条相界均成为 Γ_z 与 H 的函数：

$$a_1 = a_1(\Gamma_z, H), \qquad a_2 = a_2(\Gamma_z, H)$$

2026 S. -T. Yau High School Science Award 仅用于2026丘成桐中学科学奖公示

在双通道模型中，两条相界均可理解为有序化速率与缺陷激发速率之间的竞争结果，其特征条件写为：

$$F(a_i,\Gamma_z,H)\equiv \ln r_{\mathrm{ord}}(a_i,\Gamma_z,H)-\ln r_{\mathrm{def}}(a_i,\Gamma_z,H)=0,\qquad i=1,2$$

2.5 隐函数定理给出的相界移动方向

式 $F(a_i,\Gamma_z,H)=0$ 隐式定义了 a_i 关于 Γ_z（在固定 H 下）的函数关系。由隐函数定理：

$$\frac{\partial a_i}{\partial \Gamma_z}=-\frac{\partial F/\partial \Gamma_z}{\partial F/\partial a}\Big|_{a=a_i}$$

利用第四章 2 给出的显式形式 $\eta_{\mathrm{ord}}=1+\kappa_{\mathrm{ord}}\Gamma_z$、$W_z=\kappa_z\Gamma_z$，可得

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma_z}=\frac{\Delta E_{\mathrm{ord}}(H)\,\kappa_{\mathrm{ord}}(H)}{\chi a\,\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z,H)^2}+\frac{\kappa_z(H)}{\chi a}>0$$

（两项均为正：第一项来自 η_{ord} 增大降低有序化能垒，第二项来自 W_z 增大降低缺陷激活能垒对 F 的贡献符号相同，因为 $\ln r_{\mathrm{def}}$ 中 $-W_z$ 使 $\Delta E_{d,0}-W_{\mathrm{shear}}-W_z$ 减小、$\ln r_{\mathrm{def}}$ 增大，故 $-\ln r_{\mathrm{def}}$ 对 Γ_z 的偏导为正）。

而 $\partial F/\partial a$ 在 $a=a_1$（下边界，F 由负转正）处为正，在 $a=a_2$（上边界，F 由正转负）处为负——这是两条相界定义本身所要求的符号（F 在有序化窗口内为正，两侧为负，故经过 a_1 时 F 递增穿越零点，经过 a_2 时 F 递减穿越零点）。代入隐函数定理表达式，得到：

$$\frac{\partial a_1}{\partial \Gamma_z}=-\frac{(+)}{(+)}<0,\qquad \frac{\partial a_2}{\partial \Gamma_z}=-\frac{(+)}{(-)}>0$$

即模型解析预测：垂直振动增强会使下边界 a_1 降低（与实验一致，$\Gamma_z\uparrow\Longrightarrow a_1\downarrow$，对应更弱的旋转驱动即可克服深层卡阻），但会使上边界 a_2 升高而非降低——因为垂直振动虽然通过 W_z 削弱了缺陷激活能垒，但也通过 η_{ord} 同时增强了有序化速率，在 a_2 附近（此处 $\partial F/\partial a<0$）这两个效应共同作用的净方向由隐函数定理的分母符号翻转决定，与 a_1 处相反。

这一结果与原文中"$\partial a_2/\partial \Gamma_z<0$"的论断不一致，说明原文仅凭"垂直振动削弱层间约束使高驱动下缺陷更易产生"的单一文字论证不足以确定 a_2 的移动方向，必须同时考虑 $\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z,H)$ 对有序化通道的增强效应。若实验确实观测到 a_2 随

2026 S.T. Yau High School Science Award 仅用于2026正成科学奖论文公示

Γ_z 减小，则意味着 $W_z(\Gamma_z, H)$ 对缺陷通道的削弱作用必须强于 $\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z, H)$ 对有序化通道的增强作用在 $a = a_2$ 附近的净效应，即需要修正为非对称的函数形式（例如令 $\kappa_{\mathrm{ord}}(H)$ 远小于 $\kappa_z(H)$，或让 $\eta_{\mathrm{ord}}(\Gamma_z, H)$ 在高 a 区间趋于饱和而 $W_z(\Gamma_z, H)$ 不饱和）。这一点需要结合实验测得的 $a_2(\Gamma_z)$ 数据来定量约束 $\kappa_{\mathrm{ord}}(H)$ 与 $\kappa_z(H)$ 的相对大小，而不能仅凭定性论证得出。

由此，垂直振动改变的不只是达到结晶所需的临界驱动，而是重构了整个有限有序窗口：

$$a_1(\Gamma_z, H) < a < a_2(\Gamma_z, H)$$

2026 S.-T. Yau High School Science Award
仅用于2026丘成桐中学科学奖论文公示

附录 E：理论图绘制部分代码

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#1. 理论数据
# 旋转次数 N
N = np.linspace(0, 100, 200)

# 特征弛豫速率参量
tau = 25.0

# 纯理论 Q4 计算公式
Q4 = 1.0 - np.exp(-N / tau)

# 2. 绘制曲线
plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=150)

# 绘制理想理论曲线
plt.plot(N, Q4, color='#1f77b4', linewidth=2.5, label=r'Ideal Theory: $Q_4(N) = 1 - e^{-N/\tau}$')

# 绘制理论渐近线 Q4 = 1
plt.axhline(y=1.0, color='gray', linestyle='--', alpha=0.7, label='Perfect Alignment Limit ($Q_4 = 1$)')

# 设置坐标轴与标签
plt.xlabel('Number of Rotations ($N$)', fontsize=14)
plt.ylabel(r'Cubatic Order Parameter $Q_4$', fontsize=14)
plt.title('Theoretical Evolution of Cubatic Order Parameter', fontsize=16)

# 设置坐标轴范围与网格
plt.xlim(0, 100)
plt.ylim(0, 1.05)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.5)
plt.legend(loc='lower right', fontsize=12)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 驱动周期 N 范围
N = np.linspace(0, 40, 300)

# 给定的 3 个驱动强度 a 值
a_list = [1.196, 5.260, 11.09]
colors = ['#2ca02c', '#ff7f0e', '#d62728']

# 初始状态为高度有序态 Q4(0) = 0.85
Q4_initial = 0.85

plt.figure(figsize=(8.5, 5.5), dpi=150)

for idx, a in enumerate(a_list):
    if a == 1.196:
        # 小驱动：维持在有序态
        Q4_steady = 0.84
        tau = 5.0
    elif a == 5.260:
        # 中大驱动：从有序态衰减，稳态控制在 0.6 以下
        Q4_steady = 0.35
        tau = 4.0
    elif a == 11.09:
        # 强驱动：快速从有序态崩塌至无序态
        Q4_steady = 0.20
        tau = 2.0

    # 从有序态向稳态指数衰减 / 演化方程
    Q4_N = Q4_steady + (Q4_initial - Q4_steady) * np.exp(-N / tau)

    plt.plot(N, Q4_N, label=f'$a = {a}$', color=colors[idx], linewidth=2.5)

# 辅助线标注 0.6 阈值
plt.axhline(0.6, color='gray', linestyle=':', linewidth=1.2, label='Threshold ($Q_4 = 0.6$)')

plt.xlabel(r'Driving Cycles $N$', fontsize=13)
plt.ylabel(r'Tetratic Order $Q_4$', fontsize=13)
plt.title(r'Double-Layer ($L=2$) $Q_4(N)$ Decay from Initial Order ($Q_4(0) = 0.85$)', fontsize=14)

plt.xlim(0, 40)
plt.ylim(0.15, 0.95)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.5)
plt.legend(loc='upper right', fontsize=10, frameon=True)
plt.tick_params(direction='in', top=True, right=True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

2026 S... 仅用于...